工程數學

（下 冊）

曹鶴蓀　張理京譯訂

龍 門 聯 合 書 局 出 版

工程數學

下冊

L. A. Pipes 原著

曹鶴蓀
張理京 譯訂

龍門聯合書局出版

目　次

（下　册）

第十二章

第十三章

第十四章

第十五章

第十六章

第十七章

第十八章

第十九章

第二十章

第二十一章

第二十二章

第十二章

嘎馬函數倍塔函數及誤差函數

1. 引言 本章中所講的幾個函數是在解決物理問題時所產生的，同時這些函數在數學分析中也很重要.

我們自然不能在有限的幾頁內用具有普遍性的數學方法來討論這幾個函數. 我們所能講的祇是這些函數中比較重要的與基本的性質.

2. 嘎馬函數❶ 歐拉所規定的嘎馬函數，就是定積分

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \qquad n>0 \tag{2.1}$$

在 n 爲正數時這定積分是收斂的，因此對於正 n 值來說定積分(2.1)規定了 n 的一個函數. 用直接積分法顯然可知

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1 \tag{2.2}$$

又用分部積分法可求得下列的恆等式：

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx+\left(-x^n e^{-x}\right)\Big|_0^\infty$$

$$=n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx. \tag{2.3}$$

跟(2.1)一比較，就可以看出

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \tag{2.4}$$

這是能爲嘎馬函數所適合的基本遞推關係式. 從這個關係式顯然可以看出，如果在 n 爲任何二隣接整數間的數值時，我們已經知道 $\Gamma(n)$ 的數值，則可累次應用(2.4)求得 n 爲一切正數值時的 $\Gamma(n)$ 值. 同時凡(2.1)對於某些 n 值所不能規定的函數值 $\Gamma(n)$ 也可以用方程(2.4)來

❶ 嘎馬函數 Gamma (Γ) function.

規定. 因爲我們可以把(2.4)寫成

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \tag{2.5}$$

則當

$$-1<n<0 \tag{2.6}$$

時可用(2.5)求出 $\Gamma(n)$, 因爲這時 $n+1$ 是正的. 接着我們又可以求出 $-2<n<-1$ 時的 $\Gamma(n)$ 值,因爲這時我們已經知道(2.5)右邊的 $\Gamma(n+1)$ 值. 照着這個樣子可以無限制地推算下去. 於是(2.1)及(2.5)給我們規定了一切 n 值時的 $\Gamma(n)$ 值.

3. 階乘積,高斯 π 函數 從方程(2.2)得

$$\Gamma(1)=1 \tag{3.1}$$

應用(2.4)可得

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1\cdot\Gamma(1)=1 \qquad (3.2)\\ \Gamma(3)&=2\cdot\Gamma(2)=2.1\\ \Gamma(4)&=3\cdot\Gamma(3)=3.2.1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Gamma(n+1)&=n!\end{aligned}$$

其中 n 爲正整數. 根據以上就可以規定 $0!$ 如下:

$$0!=\Gamma(1)=1 \tag{3.3}$$

高斯的 π 函數是用嘎馬函數來規定的:

$$\Pi(n)=\Gamma(n+1) \tag{3.4}$$

當 n 爲正整數時,得

$$\Pi(n)=n! \tag{3.5}$$

若令(2.5)中的 $n=0$, 得

$$\Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}=\frac{1}{0}=\infty \tag{3.6}$$

照這個樣子反覆應用(2.5), 則可知嘎馬函數在 n 爲零或負整數時變爲無限大.

4. $\Gamma(\frac{1}{2})$的值,嘎馬函數的圖線 如果在基本積分(2.1)內用替換式

$$x=y^2 \tag{4.1}$$

則得
$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2}\,dy \tag{4.2}$$

若 $n=\frac{1}{2}$，則得
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \tag{4.3}$$

應用十一章(11.22)式，得
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \tag{4.4}$$

從上式及(2.5)得
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} \tag{4.5}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, \text{ 等等} \tag{4.6}$$

圖(4.1)說明Γ(n)之曲線.

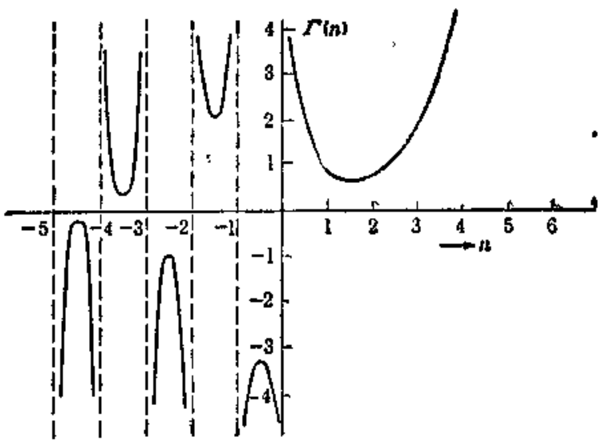

圖 4.1

5. **倍塔函數**❶　倍塔函數 $\beta(m,n)$ 用以下的定積分來規定
$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad m>0 \;\; n>0, \tag{5.1}$$

這是一個收斂的積分，所以它在 m 及 n 為正數時給我們規定了 m 及 n 的一個函數.　若將

❶ 倍塔函數 Beta (β) function.

$$x = 1 - y \tag{5.2}$$

代入(5.1)，得

$$\beta(m, n) = \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy = \beta(n, m) \tag{5.3}$$

倍塔函數的他種寫法　若令(5.1)中的 $x = \sin^2\phi$，則得

$$\beta(m, n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2m-1} (\cos\phi)^{2n-1} d\phi \tag{5.4}$$

若令(5.1)中的 $x = \frac{y}{a}$，得

$$\beta(m, n) = \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1} dy \tag{5.5}$$

又若(5.1)中代入 $x = \frac{y}{1+y}$，得

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1} dy}{(1+y)^{m+n}} \tag{5.6}$$

以上是倍塔函數中比較常用的形式。

6. 倍塔函數與嘎馬函數的關係　拿(4.2)中所規定的嘎馬函數來看：

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{(2n-1)} e^{-y^2} dy \tag{6.1}$$

再寫出一個

$$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{(2m-1)} e^{-x^2} dx \tag{6.2}$$

相乘得

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\left(\int_0^\infty x^{(2m-1)} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty y^{(2n-1)} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy \tag{6.3}$$

我們把以上的積分看作是 xy 平面第一象限內的一個面積分，並且採用極坐標

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

及面積素 ds

$$ds = r\, dr\, d\theta \tag{6.5}$$

則(6.3)變為

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}e^{-r^2}r\,d\theta\,dr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta\int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr \quad (6.6)$$

但我們從(5.4)知道

$$\beta(n,m)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta=\beta(m,n) \quad (6.7)$$

又我們從(6.2)知道

$$\Gamma(m+n)=2\int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr \quad (6.8)$$

故可將(6.6)寫成

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=\beta(m,n)\Gamma(m+n) \quad (6.9)$$

或

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (6.10)$$

這個公式在計算某一類定積分時是很有用的．例如我們可以從(6.7)及(6.10)得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad \begin{matrix} m>0 \\ n>0 \end{matrix} \quad (6.11)$$

如果我們在(6.11)中使

$$\left.\begin{matrix} 2m-1=r \\ 2n-1=0 \end{matrix}\right\} \text{ 或 } \left.\begin{matrix} m=\dfrac{r+1}{2} \\ n=\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad (6.12)$$

可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^r d\theta=\frac{\Gamma\left(\dfrac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r}{2}+1\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad r>-1 \quad (6.13)$$

同樣可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^r d\theta=\frac{\Gamma\left(\dfrac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r}{2}+1\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad r>-1 \quad (6.14)$$

照着同樣的辦法,我們可以用嘎馬函數來表示其他許多種積分. 如果我們有一本嘎馬函數表,那末這些積分的計算問題就比較簡單得多.

7. 嘎馬函數之間的一個重要關係式 將(5.6)代入(6.10)得

$$\int_0^\infty \frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \begin{matrix} m>0 \\ n>0 \end{matrix} \tag{7.1}$$

若令 $$m=(1-n), \quad 0<n<1 \tag{7.2}$$

則得 $$\int_0^\infty \frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)} = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)} \tag{7.3}$$

但我們在第十九章中❶可以證明

$$\int_0^\infty \frac{y^{n-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \qquad 0<n<1 \tag{7.4}$$

又因 $$\Gamma(1)=1, \tag{7.5}$$

故從(7.3)得一重要的關係式

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \qquad 0<n<1 \tag{7.6}$$

8. 誤差函數(或然率積分) 還有一個重要的函數,是各部門應用數學中所常用到的. 這就是誤差函數 $\operatorname{erf}(x)$ 或稱爲或然率積分,其規定如下:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-n^2}\,dn \tag{8.1}$$

這個積分在或然率理論中佔有重要的地位,並且有些物理問題的偏微分方程,要用這函數來表示其解答.

根據 $\operatorname{erf}(x)$ 的定義,可得

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \tag{8.2}$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \tag{8.3}$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-n^2}\,dn = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \tag{8.4}$$

$$\operatorname{erf}(jy) = \frac{2j}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{n^2}\,dn \qquad j=\sqrt{-1} \tag{8.5}$$

❶ 見第十九章的(16.9).

習　　題

1. 設 k 爲正整數，求證

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}$$

2. 設 n 爲偶數，求證

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\,\frac{\pi}{2}$$

3. 設 n 爲奇數，求證

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots n}$$

4. 求證

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

5. 算出下列各定積分之值：

(a) $\int_0^\infty e^{-x^4}dx,$　(b) $\int_0^\infty 4x^4e^{-x^4}dx,$　(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^5 x}}{\sqrt{\cos x}}dx$

6. 求證

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2}$$

7. 求證

$$\frac{d^n\Gamma(y)}{dy^n}=\int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}(\log y)^n\,dx$$

8. 求證藉適當的變數更換法，可得

$$\Gamma(n)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1}dy$$

9. 將積分 $\int_0^x e^{-n^2}dn$ 展成級數以求出其值，並證明

$$\int_0^x e^{-n^2}dn=x-\frac{x^3}{3\cdot1!}+\frac{x^5}{5\cdot2!}-\frac{x^7}{7\cdot3!}+\frac{x^9}{9\cdot4!}-R$$

其中 $R<\frac{x^{11}}{1{,}320}$.

10. 用分部積分法證明

$$\int_0^x e^{-n^2}dn=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot3}{2^2x^4}\right)+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\int_x^\infty\frac{e^{-n^2}\,dn}{n^6}$$

並說明可用上式來計算 x 具有大數值時的 erf(x) 值。

第 十 三 章

貝 塞 耳[1] 函 數

1. 引言 很多類型的應用數學問題,需要我們去求出線性微分方程或線性微分方程組的解. 通常這些微分方程是具有常係數的,這時所得的解乃是包含三角函數及雙曲線函數在內的指數函數. 例如研究動力系統的微小振動或分析線性電路時的情形就是如此.

除了指數函數三角函數或雙曲線函數以外,最常用到的函數也許就要算貝塞耳函數了,這種函數或稱爲貝塞耳微分方程的解.

鑒於這些函數在實用上的重要性,所以我們要在本章裏來討論它們的基本性質.

2. 貝塞耳微分方程 頭一步我們先來討論下列一個線性微分方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \tag{2.1}$$

其中 n 爲一常數.

上式在數學文獻上稱爲貝塞耳微分方程. 因爲它是一個二階的線性微分方程,所以必定具有兩個沒有線性關係的解答. (2.1)的通解可以寫成標準形式如下:

$$y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x) \tag{2.2}$$

其中 C_1 及 C_2 爲任意常數, $J_n(x)$ 稱爲 n 階第一類貝塞耳函數, $Y_n(x)$ 稱爲 n 階第二類貝塞耳函數. 這些函數值是有表可查的,其函數性質猶如幅度逐漸減小的三角函數. 要從大致上看出這一點性質時,可更換因變數 y, 使

$$y=\frac{u}{\sqrt{x}} \tag{2.3}$$

---

[1] 貝塞耳 Bessel.

於是將(2.1)變換爲

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[1-\frac{(n^2-\frac{1}{4})}{x^2}\right]u=0 \tag{2.4}$$

在

$$n=\pm\tfrac{1}{2} \tag{2.5}$$

的特殊情形下,(2.4)變爲

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=0 \tag{2.6}$$

故得

$$u=C_1\sin x+C_2\cos x \tag{2.7}$$

$$y=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \tag{2.8}$$

其中 C_1 及 C_2 爲任意常數. 又我們可以看出,當(2.4)中的 n 爲有限値而 x 漸近於無限大時,我們可以想像(2.1)的解在初次近似程度上大體具有(2.8)的性質.

3. 用級數作爲貝塞耳微分方程的解　我們可採用運算符號

$$\theta=x\frac{d}{dx} \tag{3.1}$$

將貝塞耳微分方程(2.1)寫成

$$\theta^2y+(x^2-n^2)y=0 \tag{3.2}$$

我們假定它的解具有無限級數的性質:

$$y=x^r\sum_{s=0}^{\infty}C_sx^s=\sum_{s=0}^{s=\infty}C_sx^{r+s} \tag{3.3}$$

又我們知道

$$\theta x^m=x\frac{d}{dx}x^m=xmx^{m-1}=mx^m \tag{3.4}$$

$$\theta^2x^m=\theta(mx^m)=m\theta x^m=m(mx^m)=m^2x^m \tag{3.5}$$

故將(3.3)代入(3.2)後可得

$$\theta^2y+(x^2-n^2)y=\sum_{s=0}^{s=\infty}[(r+s)^2+(x^2-n^2)]C_sx^{r+s}=0 \tag{3.6}$$

若令(3.6)中 x, 的各乘冪 x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, 等的係數等於零,則得下列方程組

$$C_s[(r+s)^2-n^2]+C_{s-2}=0 \tag{3.7}$$

由於(3.3)展開式中的頭一項是 C_0, 故得

$$\left.\begin{aligned} C_{-1} &= 0 \\ C_{-2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

鑒於這一點,故知(3.7)對於 $s=0, 1, 2, \cdots$ 時能成立.

令(3.7)中之 $s=0$, 得

$$C_0(r^2-n^2)=0 \tag{3.9}$$

上式稱爲指標方程❶. 因

$$C_0 \neq 0 \tag{3.10}$$

故知

$$r=\pm n \tag{3.11}$$

又從方程

$$C_1[(r+1)^2-n^2]=0 \tag{3.12}$$

可知

$$C_1=0 \tag{3.13}$$

每次取 $s=3, 5, \cdots$ 代入 C_s 及 C_{s-2} 之間的關係式(3.7),可以證明一切奇數級的係數都等於零.

先取 $r=n$, 則可將(3.7)寫成

$$C_s=-\frac{C_{s-2}}{s(2n+s)} \qquad s=2, 4, 6, \cdots \tag{3.14}$$

從(3.14)可知 C_2, C_4, C_6, 等各係數都可以用 C_0 來決定. 將這些係數值代入所設解(3.3)中,求得解答如下:

$$y=C_0\left[x^n-\frac{x^{n+2}}{2^2(n+1)}+\frac{x^{n+4}}{2^4(n+1)(n+2)2!}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{2s}(n+1)\cdots(n+s)s!}+\cdots\right]. \tag{3.15}$$

若將 n 爲負整數的情形除外,則各係數均爲有限值. 這時一般可取

$$C_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}=\frac{1}{2^n\Pi(n)} \tag{3.16}$$

或在 n 爲正整數時取

$$C_0=\frac{1}{2^n n!} \tag{3.17}$$

---

❶ 指標方程 indicial equation.

使解的形式趨於標準化. 把這 C_0 值代入(3.15)並用

$$(n+s)! = \Pi(n+s) \tag{3.18}$$

表示 n 非整數時的廣義階乘式,得

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Pi(s)\Pi(n+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \tag{3.19}$$

這級數對於 x 的有限值是收斂的,因此它代表 x 的一個函數 $J_n(x)$, 我們把它稱作 n 階第一類貝塞耳函數. 在 n 非整數時,可依照(3.11)以 $-n$ 代 n 求得第二個解. 故得

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Pi(s)\Pi(s-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \tag{3.20}$$

$J_n(x)$ 及 $J_{-n}(x)$ 的首項各爲 x^n 及 x^{-n} 的有限倍數(不等於零);這兩個函數彼此間沒有簡單的倍數關係,故可將貝塞耳微分方程的通解寫作

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \tag{3.21}$$

其中 A 及 B 爲任意常數, n 爲非整數.

當 n 爲整數時,因其在微分方程中僅以 n^2 的形式出現,故可假定它是正整數而不致失卻普遍性. 在這種情形下 $J_{-n}(x)$ 與 $J_n(x)$ 無異,並且 $J_{-n}(x)$ 的首 n 項中都含有因子

$$\frac{1}{\Pi(s-n)} = 0 \qquad s = 0, 1, 2, \cdots (n-1) \tag{3.22}$$

所以首 n 項等於零,得

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Pi(s)\Pi(s-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \tag{3.23}$$

若令

$$r = (s-n) \tag{3.24}$$

則得

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r+n}}{\Pi(r+n)\Pi(r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \\ &= (-1)^n J_n(r) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{3.25}$$

這時所得微分方程的兩個解就不再是線性獨立的了,於是我們須要再找出無線性依賴關係的第二個解答.

4. n 階第二類貝塞耳函數　我們從上節中知道當 n 不是整數時，n 階貝塞耳微分方程的通解是(3.21)．但當 n 爲整數時，則鑒於(3.25)可得

$$
\begin{aligned}
y &= AJ_n(x) + B(-1)^n J_n(x) \\
&= [A + B(-1)^n] J_n(x) \\
&= CJ_n(x)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

其中 C 爲一任意常數．因此所得的不再是貝塞耳微分方程的通解，因爲這種方程的通解中必須含有兩個各被任意常數乘過的線性獨立函數．現在我們來看一個函數

$$
Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi}[\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)] \tag{4.2}
$$

在 n 非整數時，函數 $Y_n(x)$ 由 $J_n(x)$ 及 $J_{-n}(x)$ 決定，同時因爲它是 $J_n(x)$ 及 $J_{-n}(x)$ 的線性結合式，所以 $Y_n(x)$ 是 n 階貝塞耳微分方程的解．若 n 爲整數，則由於(3.25)的關係得

$$
Y_n(x) = \frac{0}{0} \tag{4.3}
$$

所以當 n 爲整數時，我們須規定 $Y_n(x)$ 爲

$$
Y_n(x) = \lim_{r\to n}\left[\frac{J_r(x)\cos r\pi - J_{-r}(x)}{\sin r\pi}\right] \tag{4.4}
$$

這樣規定了 $Y_n(x)$ 之後，我們就可以實施極限步驟，得

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}Y_0(x) = J_0(x)\left[\log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
- \frac{(1+\frac{1}{2})(x/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{(x/2)^6}{(3!)^2} - \cdots
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

其中 γ 稱爲歐拉常數，係按下式規定之：

$$
\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.5772157 \tag{4.6}
$$

又當 n 爲任一正整數時可得

$$\pi Y_n(x)=2J_n(x)\left[\log\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right]$$
$$-\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!}\left(\sum_{m=1}^{n+r}m^{-1}+\sum_{m=1}^{r}m^{-1}\right)$$
$$-\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}\frac{(n-r-1)!}{r!}\tag{4.7}$$

在 $r=0$ 時,上式中的 $\sum_{m=1}^{n+r}m^{-1}+\sum_{m=1}^{r}m^{-1}$ 可以寫成 $\sum_{m=1}^{n}m^{-1}$.

由於函數 $Y_n(x)$ 中有對數項存在,所以這些函數在 $x=0$ 處爲無限大. 這時我們可以把貝塞耳微分方程的通解寫作

$$y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)\tag{4.8}$$

其中 C_1 及 C_2 爲任意常數.

5. x 爲大値及小値時的 $J_n(x)$ 及 $Y_n(x)$ 値　我們在第2節中用變換

$$y=\frac{u}{\sqrt{x}}\tag{5.1}$$

把貝塞耳微分方程化爲

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[1-\frac{(n^2-\frac{1}{4})}{x^2}\right]u=0\tag{5.2}$$

的形式. 從這裏我們大致可以猜想得到:在 x 爲大値時,貝塞耳函數的性質多少會跟下列方程的解相似

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=0\tag{5.3}$$

因上式係從(5.2)中略去 $1/x^2$ 而得到的. 於是我們知道貝塞耳函數在 x 爲大値時的性質相似於

$$y=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\tag{5.4}$$

用更精確的分析法可求得❶

❶ 參考 Watson, G. N.: a Treatise on the Theory of Bessel Function. Chap. VII. 1944. Cambridge University Press.