北京市高等教育精品教材立项项目

陆启韶 主编
陆启韶 周 梦 高宗升
郭定辉 陈迪荣 孙海燕 编著

高等学校研究生教材

现代数学基础（第二版）

北京航空航天大学出版社

北京市高等教育精品教材建设立项项目

现代数学基础

（第二版）

陆启韶　主编

陆启韶　周　梦　高宗升
郭定辉　陈迪荣　孙海燕　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是一本概论性的现代数学教材，重点介绍与科学技术密切相关的一些重要的现代基础数学与应用数学分支的基本概念和方法，为进一步深入学习和运用现代数学知识打下基础，主要包括近世代数和拓扑、泛函分析、微分流形、偏微分方程的现代理论、小波分析和随机微分方程等6个方面的内容。前3章分别从代数、几何和分析的角度介绍了现代基础数学的基本内容；后3章介绍与现代科技密切相关的一些现代应用数学内容。这些内容不但在数学科学中占有重要地位，而且在不同的科学技术领域中都有广泛应用。

本书取材广泛，重视基础，结构合理，深入浅出，实用性强，可作为理工科大学研究生(尤其是工科博士生)的现代数学教材或参考书，也可供高年级大学生、教师及科学技术人员自学和参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础/陆启韶主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2005.9

ISBN 7-81077-663-0

Ⅰ.现… Ⅱ.陆… Ⅲ.数学—教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第044276号

现代数学基础

(第二版)

陆启韶 主编

责任编辑 赵延永

责任校对 陈 坤

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印制 各地书店经销

*

开本：787×1092 1/16 印张：21.75 字数：557千字

2005年9月第2版 2005年9月第1次印刷 印数：3 000册

ISBN 7-81077-663-0 定价：30.00元

序　言

数学科学是科学技术中一门重要的基础性学科。在长期的发展过程中，它不仅形成了自身完美严密的理论体系，而且成为一切科学技术必需的研究手段和工具。数学的发展关系到整个科学技术的进步。综观人类社会和科学技术的发展史，科学技术领域的每一次历史性重大变革都与数学科学的突破性进展紧密联系。今天，无论基础数学、应用数学，还是计算数学、实验数学，都取得了空前的巨大进展。随着计算机和高新科学技术的进步，现代数学在科技领域和国民经济中发挥着越来越重要的作用。

研究生教育是高等教育的一个重要层次。为了提高研究生的培养质量，增强科研创新能力，以适应现代科学技术发展的需要，必须进一步深化课程改革，完善课程体系，优化知识结构。在博士生课程设置上，更要拓宽基础，追踪前沿，重视不同学科的相互交叉和渗透。针对当前我国一般理工科博士生的现状，有必要设立一些介绍现代数学内容的基础课程，以提高现代数学素质和培养创新思维方法，增强他们运用数学知识去分析和解决问题的能力。因此，我校对全体博士生开设了“现代数学基础”系列公共学位课程，本书就是在这些课程基础上编写的一本现代数学概论性教材，可作为理工科大学研究生（尤其是工科博士生）的教学用书或参考书，也可供高年级大学生、教师和科学技术人员自学参考之用。

本书初步地介绍与科学技术密切相关的一些主要的现代数学分支的基本概念、方法和应用。根据现代数学的发展现状、现代科学技术的需要以及理工科专业设置的特点，选取了6个方面的题材：近世代数与拓扑、泛函分析、微分流形及其应用、偏微分方程的现代理论、小波分析及其应用、随机过程与随机微分方程。前3章分别从代数、几何和分析的角度去介绍现代基础数学的基本内容；后3章介绍与现代科技密切相关的一些应用数学内容，这些内容对于理工科博士生掌握和运用现代数学方法来说是基本和必要的。它们不但在现代数学中占有重要地位，而且在不同的科学技术领域中都有广泛的应用。

本书是按照理工科大学研究生的数学基础和学习特点进行编写的，力求深浅适度，重点突出。在编写中注重基本概念的引进及其内在联系，尽量避免繁琐论证，运用较多实例加以说明，并给出基本理论的一些重要应用。本书各章的内容相对独立，可在研究生教学中单独使用，也便于读者选学。每章后面分别配有习题和主要参考文献，书末还有中英文对照的名词索引。

本书于1997年首次出版后，得到广大读者，特别是理工科大学教师和研究生的欢迎和好评。此次，我们根据近年来在该课程系列中的教学改革经验，以及读者在使用中的反馈意见，对本书进行了全面的补充和修订。在新版中，增加了绪论中关于现代数学的介绍和第6章中随机微分方程的内容；重写了第2章，其中同时包含了线性和非线性泛函分析的基本内容；其他各章亦作了较大的改动，着重加强了应用性内容。

本书的各章依次分别由周梦、高宗升、陆启韶、郭定辉、陈迪荣和孙海燕负责执笔，最后由陆启韶整理定稿。新版书稿承蒙柳重堪教授详细审阅并提出建设性意见，北京大学李忠教授、北京理工大学史荣昌教授，以及许多读者对本书初版提出许多宝贵建议，在此谨致衷心的

谢意。本书得到北京市高等教育精品教材建设项目的资助，对于北京航空航天大学研究生院、教材科和北京航空航天大学出版社对本书出版的关心和支持，一并表示感谢。由于作者的水平所限，本书在内容选取、表述和编排等方面难免存在不足之处，敬请读者和同行批评指正。

主编　陆启韶

2005年5月于北京航空航天大学

目　录

绪 论

数学是一门十分古老而又飞速进步的基础科学。由于数学自身的内在矛盾和科学技术的外在需求的推动,数学理论体系不断发展和完善,其内容、方法和应用都在日益扩展。数学科学的发展大致可划分为经典数学和现代数学两个主要阶段,它们通常以 19 世纪后期康托(Cantor)创立"集合论"作为分界线。特别是进入 20 世纪以来,数学的面貌及其在科学技术中的地位发生了根本性的变化,从而跨进了现代数学的新阶段。因此,深刻认识现代数学的特点、发展趋势,以及其在现代科学技术中的作用,对于学习和运用现代数学知识具有重要的意义。

一、现代数学内容的抽象化和体系的统一化

客观事物是通过"数"和"形"描述的。数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学。在从经典数学向现代数学发展的进程中,"数"和"形"的概念和范畴不断扩展,已经远远超出人们日常的直观理解,可以包括客观现实中任何关系和形式。例如,"数"的概念已由自然数、实数、复数、向量、张量扩展到抽象集合的元素;"形"的对象也由低维向量空间的直观几何图形性质转移到高维向量空间、无穷维函数空间、拓扑空间和概率空间的结构特性。总的来说,按照集合论的思想和观点,经典数学主要针对有限维向量空间的集合和映射(尤其是函数和几何变换),而现代数学主要处理抽象空间的一般集合和映射。因此,现代数学是经典数学的抽象化结果。数学的抽象化可以把客观世界的不同事物按其共性进行本质上的概括综合,并将它们在更高层次上统一地进行研究,揭示它们的共同规律,从而形成现代数学的公理化和结构化的理论体系。

数学的抽象化和统一化是相辅相成的,这个过程正以越来越快的趋势向更高级的阶段推进。例如,算术和初等几何经历了数千年,直到 19 世纪才建立比较完整的高等代数和高等几何的体系;又过了上百年,才进入以公理化体系的统一观点描述的近世代数和近代微分几何。又如,从牛顿-莱布尼兹的初等微积分体系发展到柯西-维尔斯特拉斯的高等微积分体系,人们用了 200 多年的时间,然而在其后的数十年时间里,就相继出现了泛函分析、微分流形等近代分析理论。上述情况表明,抽象化和统一化是现代数学发展的必然趋势。

我们还注意到,现代数学呈现的高度抽象性和统一性是数学科学自身矛盾发展的结果。从表面上看,这似乎使数学越来越远离现实世界,但是实际上这样使得数学理论体系日臻完美,研究内容扩大,观点方法更新,研究对象和应用范围更加广泛,从而能在更大的广度和深度上认识客观世界,更有效地处理和解决不同领域的实际问题。因此,正确对待现代数学的抽象性、统一性和客观世界的现实性、特殊性的关系是十分必要的。

二、现代数学学科的广泛交叉渗透和研究方法的综合运用

著名数学家希尔伯特曾经说过:"数学是一个不可分割的整体,它的生命力正是在于各部分之间的联系。"如同经典数学以高等几何、高等代数和微积分作为主要基础学科一样,拓扑

学、近世代数和泛函分析、大范围分析成为现代数学的支柱。然而，在现代数学阶段里，数学内部的各个分支学科的相互交叉和渗透显著加强，原有的学科界限逐渐模糊淡化，涌现大量新的跨学科研究领域，例如代数几何、代数拓扑、微分拓扑、泛函微分方程和随机微分方程等，它们已成为数学新的生长点。在数学研究方法方面，代数、几何、拓扑、分析，以至随机的方法相互交融，综合运用，产生了许多崭新的理论和方法，解决了重大的古老难题和现代课题，大大拓宽了数学研究思路，在数学理论和应用研究中显出强大的生命力。

另外，现代数学与科学技术的广泛深入结合，也造就了许多新的应用数学和其他交缘科学分支，例如非线性科学、信息数学、生物数学和金融数学等。现代应用数学大大扩展了数学的研究领域，与现代纯粹数学紧密联系而又互有特色，共同组成一个不可分割的整体。

总之，现代数学的学科交叉和方法综合的发展趋势从一定角度反映了数学本身和外部世界中的多样性与统一性之间的关系，体现了学科变革的活力，有力地推动了数学科学的整体进步。

三、现代数学与计算机的密切关系

计算机是人类在 20 世纪里最伟大的科学成就之一，对社会进步和科技发展起着十分重要的作用。计算机与现代数学有着很密切的关系。一方面，无论是计算机的原理、计算技术，还是它的应用，都是以数学(尤其是现代数学)作为基础的；另一方面，计算机的出现剧烈地改变了数学的学科面貌。

首先，计算机具有空前强大的计算能力和效率，使得利用数学的思想和方法去解决大规模的科学和工程问题成为可能。数值计算和仿真已成为现代科学和工程技术的关键性手段，由此促成了计算数学各个分支的繁荣发展，成为现代数学的重要组成部分。其次，计算机使得人们从事数学研究时不再单纯依靠“一张纸，一支笔”的个人脑力活动的传统方式，还添加了借助计算机去证明定理、验证理论结果和发现新现象、开拓新思路的新方法。例如“四色定理”的证明、几何学定理的机械化证明、数学公式的符号运算推导、混沌、分形、孤立子等重要非线性现象的发现，无一不是依靠计算机才能完成的。因此，计算机开辟了数学定理的机器证明和实验数学的新领域，这也是现代数学的重要组成部分。另外，计算机和信息技术的发展为数学研究信息化和资源管理智能化奠定了坚实基础。我们完全可以认为，计算机正在开辟数学研究的一条新路。

四、现代数学在科学技术进步中的重要作用

著名科学家钱学森指出：“一切科学技术都用数学”，“数学的发展关系到整个科学技术的发展”。数学不仅是自然科学的基础，而且是一切重大技术革命的基础。20 世纪科学技术的巨大成就都是与在此期间现代数学的迅速发展分不开的。在 20 世纪前期，黎曼几何和泛函分析分别为相对论和量子力学的诞生提供了坚实的理论基础，从而使世界步入了原子能的新时代。微分方程研究促进了流体力学、固体力学和控制理论的发展，也为人类开创了航空航天的伟大事业。在 20 世纪后期，现代数学在科学技术中的重要应用成果更是比比皆是。例如，变分原理与有限元法、偏微分方程现代理论与高速流动计算和天气预报、快速傅氏分析和小波分析与信号处理、数论与密码学、人工神经网络与智能技术、纤维丛与规范场论以及微分流形和动力系统与非线性科学等。即使一些以往与数学几乎无缘的学科领域，如生物学、心理学、经

济学、管理学，甚至语言学、考古学等，今天都已成为数学大显身手的场所。可以预期在21世纪，现代数学将在科学技术领域，特别是非线性科学、信息科学、生命科学、材料科学和金融、管理科学中发挥越来越重要的作用。

回顾数学的发展历程，可以清楚地看到一条由初级到高级、由简单到复杂、由具体到抽象、由孤立到统一的漫长而曲折的道路。展望数学的未来趋势，正在呈现由低维到高维、由连续到离散、由线性到非线性、由局部到整体、由光滑到非光滑、由确定性到随机性的发展前景，现代数学的思想、理论和方法必将有更大的进展和更辉煌的成就。

在当今科学技术突飞猛进的时代，高素质创新型人才应当重视现代数学的基础。在学好现代数学知识的同时，更应把提高数学素养作为出发点和落实处。为此，一方面要注意培养创造性思维能力和方法，增强运用数学的原理和方法解决实际问题的能力；另一方面还要培养对数学的学习兴趣和动力，领悟数学内在的逻辑美和结构美，提高持续的自我接纳和更新数学知识的能力。愿现代数学在我们的学习、工作和生活中发挥更大的作用，成为每个人的得力助手和终身朋友。

第一章　近世代数与拓扑

本章扼要论述现代数学的基础性分支——近世代数与点集拓扑的基本内容。它们不仅在数学的其他分支中已成为必不可少的基本工具，而且在计算机科学、数字通信、近代物理、系统工程等领域也有广泛而重要的应用，是现代科学技术的基础之一。近年来，其本身亦获得了迅猛的发展，模论、同调论以至范畴论的语言、方法已广泛渗入到经典理论之中。由于这一原因，我们在论述基本内容的同时，将尽量反映数学中比较现代的思想观点：现代数学最基本的着眼点不在于元素，而在于结构及结构之间的联系；许多重要而深刻的概念，本质上是某种泛映射性质。本章对于群、环、域、拓扑空间等基本的经典内容的论述采用了现代的方式；一些在现代数学中已广泛使用的概念和方法，如同态序列、模、范畴等在其中得到了体现。此外，为了给出抽象化的具体背景，本章较详尽地论述了许多具体的代数结构和大量实际应用中的代数构造、拓扑构造的例子。

1.1　代数基本概念

1.1.1　逻辑与集合

现代数学的重要发展趋势是公理化和结构化。公理化就是遵循严格的逻辑演绎规则，从最少的不加证明的公理出发推演出整个体系。结构化就是认为数学研究的对象本质上是结构及结构间的联系。我们先对需用的基本逻辑规则和逻辑术语作一简述。

任何一个叙述或论断称为一个命题。我们约定命题只取“真”值或“假”值中的一个。即任一命题或者是真命题，或者是假命题，而不能是又真又假的命题。命题包含条件和结论两个部分，其一般形式为“若 A，则 B”。任何一个命题有与其相联系的逆命题、否命题、逆否命题。如果原命题为“若 A，则 B”，逆命题就是“若 B，则 A”，否命题是“若非 A，则非 B”，逆否命题是“若非 B，则非 A”。

例 1.1.1　古希腊哲学家柏拉图曾给人下过一个定义：两足行走、没有羽毛的动物。这实际上是给出了一个命题：“若一动物是两足行走且没有羽毛的，则它是人。”与这一原命题相联系的逆命题、否命题、逆否命题分别为：

逆命题：若一动物是人，则它是两足行走且没有羽毛的。

否命题：若一动物不是两足行走且没有羽毛的，则该动物不是人。

逆否命题：若一动物不是人，则它必不是两足行走且没有羽毛的。

如果一个命题 P 真时，另一个命题 Q 必真，则称 P 蕴涵 Q。记为 $P\Rightarrow Q$，有时也称为 P 推出 Q。如果 P 与 Q 互相蕴涵，则称 P 与 Q 等价，记为 $P\Leftrightarrow Q$，有时把它读作“P 当且仅当 Q”。等价的命题必同时为真或同时为假。原命题与逆否命题是等价的。逆命题与否命题是等价的。常用的“反证法”就是通过证明逆否命题来使原命题获得证明。

下面简述关于集合的基本内容。

集合是数学中最基本的概念，以 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，以 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素。$a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A。$a\notin A$ 表示元素 a 不属于 A。人们一度认为集合的概念是无需定义的，只要描述性地说明任何一些对象(元素)均可组成集合就可以了。然而很快发现这会引起一些困难的悖论。

例 1.1.2(理发师悖论)　在一个小岛上有惟一的一位理发师。他宣称：我为岛上所有不为自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。现在要问，按他的规则，他本人的头发该由谁来理？他实际上把岛上居民分成了两类，A 类是为自己理发的那部分居民，B 类则由不属于 A 类的人组成。在他的理发规则下，他不能为自己理发，也不能不为自己理发。即他不能属于 A 类，也不能不属于 A 类。这虽然是一个以文字游戏形式表现的悖论，但已包含了集合论悖论的基本要素。

例 1.1.3　考虑集合 $M=\{A\mid A$ 是集合且 A 不是 A 的元素$\}$。这样的 M 不是空集。但 M 是不是 M 的元素？如果是，那么根据 M 中元素的定义，M 不是 M 的元素！如果不是，那么 M 适合 M 中元素的定义，又得 M 是 M 的元素！总之，这是一个悖论：$M\in M$ 同时又 $M\notin M$!

在处理有限对象时，诸如此类的矛盾并不表现出来，然而一进入无穷世界，这种矛盾就不可避免。现代数学与古典数学相区别的一个主要特征就是处理的对象的无穷性(无论是无穷大还是无穷小)，因而对集合论进行严格处理是必要的。

现代集合论已经非常严密和精确地公理化了。在集合论的公理化形式下，类、成员、相等是不加定义的原始术语。所有公理均由这些原始术语和一阶谓词推演来叙述。集合概念被叙述为：一个类 A 称为一个集合当且仅当存在另一个类 B，使得 A 是 B 的成员。用符号表述就是：类 A 是一个集合$\Leftrightarrow\exists$ 类 B：$A\in B$。不是集合的类称为本性类。例 1.1.3 中的 M 是一个本性类而不是一个集合。

以下复习一些关于集合运算的内容。这些内容基本上是大家熟悉的。在集合论公理体系中，存在着充分多的公理，保证这些运算在集合上能够施行。

A 称为 B 的子集合，若对 A 中每一个元素 x，皆有 x 属于 B。用符号表述为："$A\subseteq B$"$\Leftrightarrow$"$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$"(读作：$A$ 含于 B 当且仅当对每个 x 属于 A 必有 x 属于 B)。

集合 A 与集合 B 称为相等，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。记为："$A=B$"$\Leftrightarrow$"$(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$"(读作：$A$ 等于 B 当且仅当 A 含于 B 且 B 含于 A)。

不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。$\varnothing\Leftrightarrow\forall x:x\notin\varnothing$(读作：空集当且仅当对任何一个 x 有：x 不属于它)。空集$\varnothing$是任何一个集合 A 的子集。当 $A\subseteq B$ 且 $A\neq\varnothing$、$A\neq B$ 时，称 A 是 B 的真子集。

由集合 A 的所有子集合作为元素构成的集合称为 A 的幂集合，记为 2^A。若 A 含有限个元素，设为 n 个，则 A 的幂集合 2^A 含 2^n 个元素。在讨论以集合为元素的集合时，我们有时为了表明这点而称这种集合为**集簇**。

例 1.1.4　$A=\{1,2,3\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$。

例 1.1.5　$A=\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$是全体自然数组成的集合，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\cdots,\{1,2\},\{1,3\}\cdots,\{2,3\},\{2,4\},\cdots,\{1,2,3\},\{1,2,4\},\cdots,\cdots\}$，即在 A 中随意取出任意多个数组成的集合都是 2^A 的一个元素。

一些集合 $A_i,i\in I$ 的**并**和**交**分别是指

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I:x\in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的并当且仅当存在 i 属于 I 使 x 属于 A_i）

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I: x \in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的交当且仅当对每个 i 属于 I 有 x 属于 A_i）

其中指标集 I 可以是有限的，也可以是无限的。

集合 A 与 B 的**差集**记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$①，它由属于 A 但不属于 B 的元素组成：$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$。当所讨论的所有集合均含在某个固定集合 U 中时，记 $U-A$ 为 A'，称之为 A 的**补集**。

对集合的交、并、补运算，不难验证以下算律：

$$A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

$$A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i', (\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

1.1.2 映射、积与关系

集合之间的联系是通过映射来实现的。映射概念在数学中是基本的。我们简述映射的基本内容，并通过映射概念定义积与关系。

定义 1.1.1 设 A, B 是两个给定的集合。如果通过某种对应法则 f 使 A 中的每一个元素 a 对应于 B 中某个惟一的元素 b，则称 f 为一个从 A 到 B 的**映射**。记为 $f: A\to B$。b 称为 a 在 f 下的**像**，记为 $b=f(a)$。

两个映射 f_1, f_2 称为相等的，如果它们都是 A 到 B 的映射，且对每个 $a\in A$ 有 $f_1(a)=f_2(a)$。一个映射 f 称为**单射**，如果 $\forall a, a'\in A, a\neq a' \Rightarrow f(a)\neq f(a')$。一个映射 f 称为**满射**，如果 $\forall b\in B$，皆存在 $a\in A$ 使 $b=f(a)$。若 f 既是单射又是满射，则称 f 为一个**一一对应**。

对映射 $f: A\to B$，集合 $f_{\mathrm{Im}}=\{b\in B \mid \exists a\in A: f(a)=b\}$ 称为 f 的**像集**。$f^{-1}(B)=\{a\in A \mid f(a)\in B\}$ 称为 f 的**原像集**。

例 1.1.6 设 A, B 都是含 5 个点的集合，图 1.1 给出 A 到 B 的对应法则 f_1, f_2, f_3, f_4，判断它们是否映射、单射、满射、一一对应。

解 f_1, f_2 不是映射。f_3 是映射但既不是单射也不是满射。f_4 是单射又是满射，从而是一一对应。

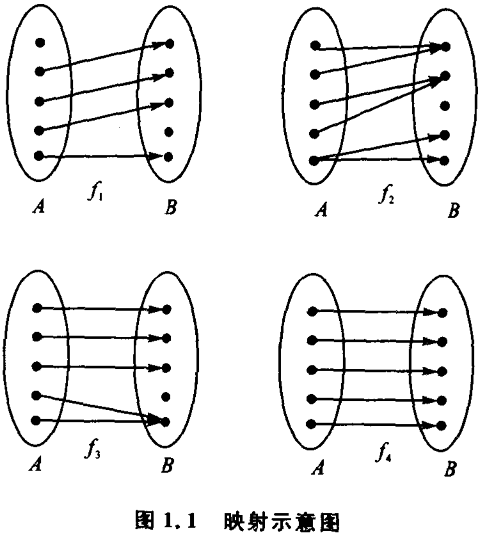

图 1.1 映射示意图

若 $f: A\to B$ 为映射，且 $S\subseteq A$，那么把 S 中的元素按法则 f 对应到 B 中元素，就得到一个 $S\to B$ 的映射 f_1，当然 f_1 在 S 上的作用

① 国标 GB3102.11—1993 规定差集用 $A\backslash B$，不用 $A-B$。考虑到作者和读者的使用习惯，本书没有取消 $A-B$ 的表达方式。

与 f 是一样的。我们称 f_1 为 f 在 S 上的限制，记为 $f|S:S\to B$。若 f 是 $A\to A$ 的映射且 $f(a)=a,\forall a\in A$，则称 f 为恒等映射，记为 $1_A:A\to A$。当 $S\subseteq A$ 时，$1_A|S:S\to A$ 称为 S 到 A 的包含映射。

若 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 为映射，则由法则 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 给出的 A 到 C 的映射称为 f 与 g 的合成映射，记为 $gf:A\to C, gf(a)=g(f(a)),\forall a\in A$。

定义 1.1.2　由映射 f,g 和 h 构成的一个图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

如果适合 $gf=h$，即 A 通过 f 映到 B 再通过 g 映到 C 的效果与 A 通过 h 映到 C 的效果是一样的，就称此图为一个交换的映射图。

类似地，若图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

满足 $gf=kh$，也称为一个交换的映射图。

定理 1.1.1　设 $f:A\to B$ 为一个映射，且 $A\neq\varnothing$，则

(1) f 为单射$\Leftrightarrow$存在映射 $g:B\to A$，使 $gf=1_A$；

(2) f 为满射$\Leftrightarrow$存在映射 $h:B\to A$，使 $fh=1_B$；

(3) f 为一一对应$\Leftrightarrow$存在映射 $f^{-1}:B\to A$，使 $ff^{-1}=f^{-1}f=1$。

证　首先易知，gf 为单射$\Rightarrow f$ 为单射，gf 为满射$\Rightarrow g$ 为满射，从而(1)，(2)，(3)的“$\Leftarrow$”部分立刻得证。现若 f 为单射，则对每个 $b\in f(A)$ 均有惟一的 $a\in A$ 使 $f(a)=b$。取定一个 $a_0\in A$，作

$$g:B\to A, g(b)=\begin{cases} a, & \text{若 } b\in f(A) \text{ 且 } f(a)=b \\ a_0, & \text{若 } b\notin f(A) \end{cases}$$

可验证 $gf=1_A$。若 f 为满射，则对每个 $b\in f(A)$，$f^{-1}(b)\neq\varnothing$。取一个 $a_b\in f^{-1}(b)$，作

$$h:B\to A,\quad h(b)=a_b$$

可验证 $fh=1_B$。当 f 为一一对应时，f^{-1} 的作法更是显然的。证毕。

定义 1.1.3　设 $\{A_i|i\in I\}$ 是一族集合，I 是它的(非空)下标集合。则集合

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f\mid f \text{ 是 } I \text{ 到 } \bigcup_{i\in I}A_i \text{ 的映射，使对每个 } i \text{ 有 } f(i)\in A_i\}$$

称为集合族 $\{A_i|i\in I\}$ 的**笛卡儿积**。$\Pi_k:\prod\limits_{i\in I}A_i\to A_k, f\to f(k)$ 称为此笛卡儿积在它的第 k 分量上的**射影**。

例 1.1.7　当指标集 I 是有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 时，我们把笛卡儿积 $\prod\limits_{i\in I}A_i=\prod\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的每个元素 f 写成 n 元组 $(f(1),f(2),\cdots,f(n))$ 的形式，其中每个 $f(i)\in A_i$。特别，$I=\{1,2\}$ 时，笛卡儿积 $A_1\times A_2=\{(f(1),f(2))\mid f(1)\in A_1, f(2)\in A_2\}=\{(a,b)\mid a\in A_1,$