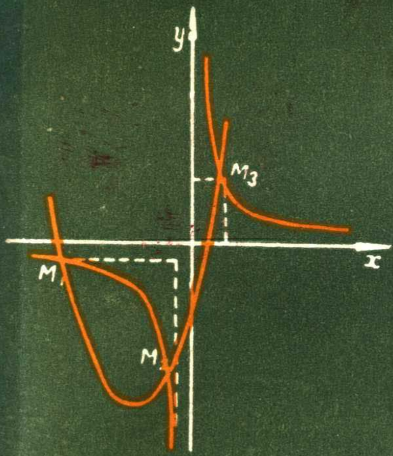

下册

余斯晟 主编

代数

中央广播电视大学出版社

下册

代数

代 数

下 册

余斯晟 主编

中央广播电视大学出版社

代　　数

下　册

余斯晟　主编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张12.25　　千字255

1984 年 5 月第 1 版　　1985 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—51[illegible]000

书号：7300·15　定价：1.50元

目　录

任意角及其三角函数

一、角的概念的推广

（一）角的生成

1.复习问题

在平面几何里，角是怎样定义的？

答：从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。

这种定义是把角看作是固定的图形，不涉及到它的生成过程。因此任作（或给定）一个角AOB，如图1，它的大小，自然总是正的。而且在没有特别说明时，$\angle AOB$总是小于平角（或至多等于平角）的。

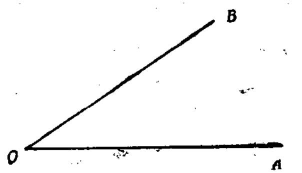

图1

2.角的生成

从另外的角度看，角可以认为是在旋转运动中生成的。

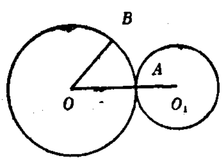

图2

如图2。圆O和圆O_1代表互相啮合的齿轮，切点A是啮合点(OAO_1是一直线)。旋转开始时固定在齿轮O上的半径OA，经过某时间以后转动到位置OB。OA、OB当然组成了一个角。因此在旋转运动中可以生成角这是正确的。

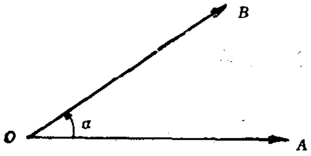

图 3

在三角中，我们把角看成是由一条射线绕着它的端点O，从原来的位置OA旋转到另一个位置OB而形成的，如图3。旋转开始时的射线OA叫做角α的始边，旋转终止时的射线OB叫做角α的终边，射线的端点O叫做角的顶点。

注意现在的角的概念中包括了它的形成过程，我们把形成角时所旋转的多少作为角的大小的度量。这样角既可以有正负，又可以取任意值。

思考：按现在角的概念，为什么角可以有正负？为什么又可以有任意大小？

答：旋转可以有两种方向，因此就可以有正与负。旋转可以超过半周，也可以超过一周乃至若干周，因此角就可以有任意大小。

（二）任意大小的角

今后经常在直角坐标系里讨论角，把角的顶点与坐标原点重合，始边与X轴正半轴重合。

我们规定，在直角坐标系里，按反时针方向旋转而成的角是正角，按顺时针方向旋转而成的角是负角。所以这样规定是为了要和坐标系中象限的顺序规定一致。当一条射线不作任何旋转时叫做零角。

在图上，为了表示旋转的方向，可以用起自始边、终至终边的螺旋线并附以指向终边的箭头标出。如图4，角α是

135°，角α'是$-225°$。又如图5，$\angle\alpha$是$630°$（或$\frac{7}{2}\pi$）。

这样规定之后，就可以有任意大小的角。如果以弧度为单位，角可以取遍实数中的所有值。

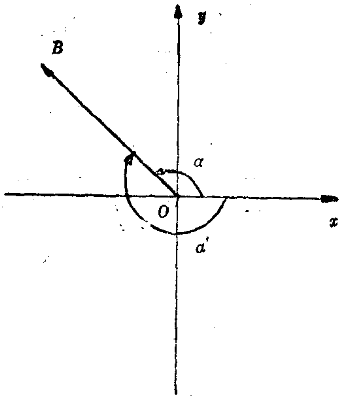

图 4

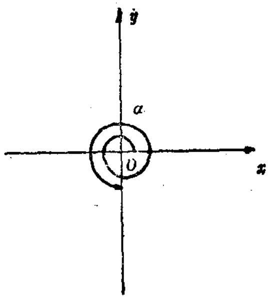

图 5

思考：两个不同的角是否可以有相同的终边？

（三）终边相同的角的表示式

设一条射线从始边旋转终止以后，形成的角是α（注意α是任意角），如果α的终边按反时针方向再转一圈，就得到$360°+\alpha$（或$2\pi+\alpha$）的角；再转两圈，就得到$2\times360°+\alpha$（或$2\cdot2\pi+\alpha$）的角；……；一般地，α的终边按反时针方向再转n圈（$n=1,2,3,\cdots$），得$n\cdot360°+\alpha$（或$2n\pi+\alpha$）的角，所有这些角都和α有相同的终边（始边当然也相同）。类似地，α的终边按顺时针方向再转n圈（$n=1,2,$

3，…），得$-n\cdot 360°+\alpha$（$-2n\pi+\alpha$）的角，同样，所有这些角都和α有相同的终边（始边当然也相同）。这样，所有的角$n\cdot 360°+\alpha$或$2n\pi+\alpha$（α以弧度为单位）这里的$n=0$，± 1，± 2，…，都和α有相同的终边。

反过来，凡是和α角有相同的终边（始边当然也相同）的角，和α只能相差360°（或2π）的整数倍。因此，在同一直角坐标系内和α终边相同的角的一般表示式是

$n\cdot 360°+\alpha$或$2n\pi+\alpha$（$n=0$，± 1，± 2，± 3，…）

由以上可得，相等的角终边一定相同，但终边相同的角却不一定相等，它们彼此之间相差360°（或2π）的整数倍。

例1 判断下列的每一对角是否终边相同？

（1）729°与$-351°$；（2）$\frac{33}{7}$和$\frac{7\pi}{2}$。

解 （1） $729°-(-351°)=729°+351°=1080°$

$\frac{1080°}{360°}=3$ 是整数

∴ 两个角的终边相同；

（2） $\frac{7\pi}{2}-\frac{33}{7}=\frac{49\pi-66}{14}$，这个数不可能是$2\pi$的整数倍。

∴ 两个角的终边不同。

（四）角所在的象限

角的终边在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角。如$\frac{\pi}{4}$，405°，$-315°$的角都是第一象限的角；120°的角

是第二象限的角；$-\frac{2\pi}{3}$的角是第三象限的角，若角的终边与X轴或Y轴重合，这样的角不属于任何象限，如$0°$，$\frac{\pi}{2}$，π，$270°$，$360°$，$-90°$，-3π的角等等，它们不属于任何象限。

例2 判断$120°$，$-45°$，$390°$各是第几象限的角，写出和它们有相同终边的一切角，并把其中在$-360°$到$720°$间的角写出来。

解 （1） $120°$是第二象限的角，和它有相同的终边的一切角是：

$$n\cdot360°+120°$$

其中在$-360°$到$720°$间的角是：

$$-1\times360°+120°=-240°$$

$$0\times360°+120°=120°$$

$$1\times360°+120°=480°$$

（2）$-45°$是第四象限的角，与它有相同终边的一切角是：

$$n\cdot360°-45°$$

其中在$-360°$到$720°$间的角是：

$$0\times360°-45°=-45°$$

$$1\times360°-45°=315°$$

$$2\times360°-45°=675°$$

（3）$390°=360°+30°$

$\therefore$ $390°$是第一象限的角，与它有相同终边的一切角是

$n \cdot 360° + 390°$

其中在$-360°$到$720°$间的角是：

$$0 \times 360° + 390° = 390°$$

$$-1 \times 360° + 390° = 30°$$

$$-2 \times 360° + 390° = -330°$$

注意，求终边相同的一切角的公式并不是唯一的，例如（3）中与390°有相同的终边的一切角也可以写作

$n \cdot 360° + 30°$

例3 把90°，120°，135°，150°，$-30°$，$-45°$，$-60°$换算为弧度。

解： 由公式$1° = \frac{\pi}{180}$弧度，可以求出下表：

角　度	90°	120°	135°	150°	$-30°$	$-45°$	$-60°$
弧　度	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

注意（1）将角的度数化为弧度时，要写成多少π的形式，不要取π的近似值，这和代数中2倍的$\sqrt{2}$写成$2\sqrt{2}$，而不写成2.8284一样；

（2）最容易用尺规作出图的某些角，如30°，45°，60°，90°，22.5°等，我们常称为特殊角，特殊角的角度与弧度间的换算关系要熟悉，它们是今后常常要用到的。

习　题

1．指出下列角所在的象限：

（1）$4\times360^\circ+30^\circ$；　（2）$-3\times360^\circ+150^\circ$；

（3）$n\cdot360^\circ-30^\circ$（n为任意整数）。

2.把下列各角写成$n\cdot360^\circ+\alpha$（$0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$，$n$是整数）的形式：

（1）1350°；（2）3250°；（3）-2860°；（4）-3000°。

3.写出与上题各角终边相同的角的一般表示式。

4.用弧度制表示下列各角：

（1）$22^\circ30'$；　（2）$-67^\circ30'$；　（3）-270°；

（4）240°；　（5）360°的k倍。

5.用角度制表示下列各角：

（1）$\frac{\pi}{12}$；　（2）$\frac{11}{6}\pi$；　（3）$\frac{5\pi}{3}$；　（4）$\frac{7\pi}{10}$。

6.指出下列各式中的α，β，γ，δ各是第几象限的角（n是整数）：

$2n\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2n\pi$；　$\frac{\pi}{2}+2n\pi<\beta<(2n+1)\pi$；

$(2n+1)\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$；　$\frac{3\pi}{2}+2n\pi<\delta<2(n+1)\pi$。

7.在直角坐标系中，用圆规直尺作出角$-\frac{5\pi}{6}$的终边。

二、任意角的三角函数的定义

（一）任意角的三角函数的定义

1.复习问题

已知自变量x的值是1，一次函数$y=f(x)=2x+3$的函数值$f(1)$是多少？

答：$f(1)=5$，即对于$x=1$，$y=2x+3$有唯一确定的值5与之对应。

以前学过了一次函数、二次函数和反比例函数，它们的特点是用代数式定义的，因此，要求对应于某个自变量的值时所对应的函数值，只用代数运算就够了。

以下我们将根据几何关系来定义一类函数——三角函数。

2. 正弦函数的定义

下面定义角的函数时，总是在直角坐标系中，让角 α 的顶点与坐标原点重合，始边与x轴正半轴重合。

对于任意角α，在它的终边上任取不是原点的一点$A(x, y)$，如图6。设O到A的距离为$r(r>0)$，令A点的纵坐标y与r的比，即$\frac{y}{r}$与α对应，则比$\frac{y}{r}$是不是α的一个函数呢？

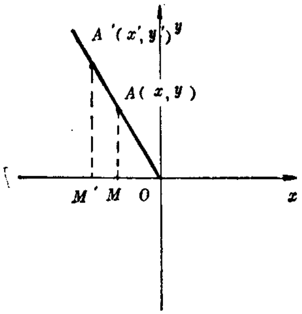

图 6

思考：要说明比$\frac{y}{r}$是角α的一个函数，应该说明什么？

要说明比$\frac{y}{r}$是角α的函数，必须说明对于每一个角α，比$\frac{y}{r}$都有唯一确定的值与之对应，即必须说明比$\frac{y}{r}$与A点的选取无关，只和α有关，那么依照函数的定义，比$\frac{y}{r}$就是α的一个函数了。

我们从角α的终边上再另外任取一点$A'(x', y')$，如图6，自A和A'向x轴作垂线，垂足分别是M和M'，则有向线段MA和$M'A'$的数量就是y和y'，它们总是同号的。又

$\triangle OMA \backsim \triangle OM'A'$

$$\therefore \quad \frac{MA}{OA}=\frac{M'A'}{OA'}$$

即 $\quad \dfrac{y}{r}=\dfrac{y'}{r'}$（设$O$到$A'$的距离为$r'>0$）这就证明了比 $\dfrac{y}{r}$确实与A点的选取无关。

由于α确定，α的终边就唯一确定了，比$\dfrac{y}{r}$又与A点的位置无关。因此，比$\dfrac{y}{r}$就由α唯一确定了，比$\dfrac{y}{r}$确实是α的一个函数。所以定义比$\dfrac{y}{r}$是α的一个函数是合理的。

定义 在直角坐标系中，设α为顶点在原点，始边在x轴正半轴的任意角，$A(x, y)$是α的终边上任一点，原点到A点的距离是$r>0$，A点的纵坐标y与r的比叫做α的**正弦函数**，记为$\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}$$

例 设α终边上一点的坐标是$(3, -4)$，求$\sin\alpha=?$

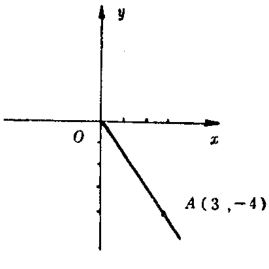

图 7

解 从图 7 中，可以看出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

因此，本题中的

$$r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5, \quad \text{又 } y=-4$$

$$\therefore \sin\alpha=\frac{-4}{5}=-0.8$$

思考：r，x，y之间可以组成几个比？它们都是角α的函数吗？

3.余弦、正切、余切、正割、余割函数的定义

点A的坐标(x, y)和O到A点的距离r之间一共可以组成六个比：

$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{x}{y}, \quad \frac{r}{x}, \quad \frac{r}{y}$$

这六个比实际都和A点的选取无关，而只和α有关，因此它们都可以看成是角α的函数。

前面已经把$\frac{y}{r}$定义为α的正弦函数，并记为$\sin\alpha$，下面补充定义

定义 x与r的比叫做α的**余弦函数**，记为$\cos\alpha$，即

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}$$

定义 y与x的比叫做α的**正切函数**，记为$\operatorname{tg}\alpha$，即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$

定义 x与y的比叫做α的**余切函数**，记为$\operatorname{ctg}\alpha$，即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

定义 r与x的比叫做α的**正割函数**，记为$\sec\alpha$，即

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}$$

定义 r与y的比叫做α的**余割函数**，记为$\csc\alpha$，即

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}$$

上面六个函数，统称为角α的三角函数。对于正弦与余弦函数，由于$r>0$，所以对任意角α来说，它们都是有意义的；对正切与正割函数，必须要求$x\neq0$，即角α的终边不能落在y轴上；而对余切和余割函数，必须要求$y\neq0$，即角α的终边不能落在x轴上。

正弦函数和余弦函数互称余函数。同样正切函数和余切函数、正割函数和余割函数也互称余函数。

例1 已知$A(2,-3)$是角α终边上一点：

（1）问α是第几象限的角？

（2）求α的六个三角函数值。

解（1）$\because$ $A(2,-3)$是第四象限的点，

$\therefore$ α是第四象限的角。

（2）$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

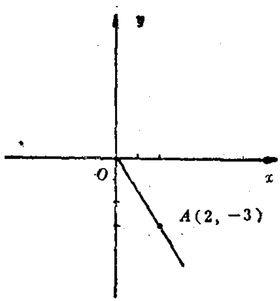

图 8

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}$$

思考：为什么在例1的图8中没有标明α，而且也没有标明α是怎样生成的？

（二）终边相同的角的同一三角函数的值相等

在定义三角函数时，A点是在角α的终边上任意取的。因此，A点的坐标(x,y)与r三者之间的比值，只与角α的终边位置有关，而与角α的生成过程无关。所以终边相同的一切角的同一个三角函数值总是相等的（图9）。

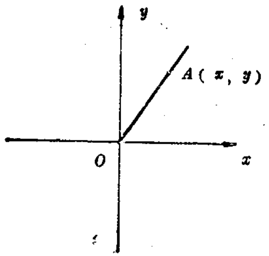

图 9

由于和角α有相同终边的一切角，可以表示成

$$n\cdot 360°+\alpha \text{或} 2n\pi+\alpha$$

（n为整数）。所以永远有

$\sin(n\cdot 360°+\alpha)=\sin\alpha$或$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(n\cdot 360°+\alpha)=\cos\alpha$或$\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(n\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$或$\mathrm{tg}(2n\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(n\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$或$\mathrm{ctg}(2n\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$

$\sec(n\cdot 360°+\alpha)=\sec\alpha$或$\sec(2n\pi+\alpha)=\sec\alpha$

$\csc(n\cdot 360°+\alpha)=\csc\alpha$或$\csc(2n\pi+\alpha)=\csc\alpha$

应当注意反过来并不成立，即两个角的某一个三角函数值相等，两个角的终边可能不同。这个问题读者可以自己思考，今后将会学到。