中学教师之友

1

# 现代数学基础知识浅说

福建教育出版社

小学教师之友（1）

# 现代数学基础知识浅说

卢 正 勇

福 建 教 育 出 版 社

## 内 容 提 要

现代数学思想渗透到小学教材，这就向小学数学教师提出新的学习课题．本书参考国内外小学教材，选择集合与对应、函数的概念、概率与统计初步以及框图四部分内容，对有关基础知识作了通俗的介绍．作者注意引用我国现行小学数学课本的大量例子，阐述渗透其中的现代数学思想．因此，本书可供小学数学教师、师范学校学生以及小学数学教研工作者学习参考．

小学教师之友（1）

现代数学基础知识浅说

卢 正 勇

出 版：福 建 教 育 出 版 社

发 行：福 建 省 新 华 书 店

印 刷：福 建 新 华 印 刷 厂

787×1092 1/32开本 3.25印张 72千字

1981年12月第一版 1981年12月第一次印刷

印数：1—7,000

书 号：7159·648 定 价：0.27元

# 目　　录

# 第一章　集合与对应

集合与对应是近代数学中最基础的概念，许多重要的近代数学如近世代数、数理逻辑、泛函分析、概率统计、拓扑学等都建立在集合的基础上。因此，许多国家新编的中小学数学课本，都力图及早地介绍或渗透集合与对应的思想。目前我国小学新课本中，对集合与对应的思想采用“渗透”的办法，本章介绍与小学数学课本关系较密切的有关集合与对应的最基本知识。

正如点、直线、平面等概念是平面几何学中的不定义的原始概念一样，集合、集合的元素、元素属于集合及对应等也是不定义的原始概念。对这些概念，我们只对它作描述性的说明，然后从这些概念出发，再定义其他一些概念。

## §1　集合的概念

### 一、集合的概念

具有某种共同特征的一些事物的全体叫做集合。

〔例 1〕某校一年一班所有班委组成一个集合。这个集合里的“事物”是人，这些事物的共同特征是：他们都是某校一年一班的班委。

〔例 2〕小于5的所有自然数组成一个集合。这 个 集合

里的“事物”是数，这些事物的共同特征是：它们都是自然数，而且都小于5。

〔例 3〕下面的式子中，和是12的式子组成一个集合（第一册第68页*）：

8＋5，3＋9，7＋7，9＋4，8＋4，8＋6，6＋8，9＋5，7＋6，6＋6。

这个集合里的“事物”是式子。其共同特征有两个：(i) 这些式子是从上面十个式子中选来的；(ii) 这些式子的和是12。

我们还可以举出集合的很多例子：

(1) 26个英文字母构成一个集合；

(2) 一个人手掌上的5个手指构成一个集合；

(3) 太阳系中的九大行星构成一个集合；

(4) 一个人身中的所有白血球构成一个集合；

(5) 所有自然数构成一个集合；

(6) 100以内的所有自然数构成一个集合，等等。读者可以想一想，上面各集合的“事物”是什么？它们的共同特征是什么？

我们把组成集合的每个事物叫做这个集合的元素。例如：3是例 2 所说的集合的一个元素；如果李红是某校一年一班的班委，则她就是例 1 所说的集合的一个元素；3＋9；8＋4，6＋6都是例 3 所说的集合的元素。

从上面几个例子可以看出，集合的元素可以是人，数，式子，星球，白血球等等。因此，元素的概念是从形形色色

---

* 本书许多例子引自新编《全日制十年制小学数学课本》（中小学通用教材数学编写组编，人民教育出版社出版）。以下引用时，都只注明册次和页码。

的具体事物中抽象出来的一个数学概念。这样，我们就可以说，集合是由一些确定的元素组成的整体。这种说法就比前面的说法抽象。但是由于集合的元素可以是各种事物，所以在研究了集合的性质后，我们就可把集合的知识应用到数学、化学、医学等各门学科中去。

对于一个给定的集合，集合中的元素是完全确定的。也就是说，给定了一个集合，我们可以判断任何一个事物是不是这个集合的元素。如对于“由小于5的所有自然数组成的集合”，我们可以判断3是这个集合的元素，6不是这个集合的元素，李红不是这个集合的元素等等。在这个意义下，我们不认为“所有高个子的人”组成一个集合，也不认为“所有很小的数”组成一个集合。它们属于近年来新发展的“模糊集论”所讨论的范围。

## 二、集合的表示法

为了研究方便，常用$A$、$B$、$C$、…等大写拉丁字母记一个集合，用$a$、$b$、$c$、…等小写拉丁字母记集合中的元素。

表示集合的方法，常用的有列举法、描述法及韦恩图表示法。

### 1. 列举法

把集合的所有元素一一列举出来，写在大括号内，用来表示集合，这种方法叫做列举法。

如在例1中，以$A$记某校一年一班全体班委组成的集合，并设这个班的全体班委是：李红、张勇、刘伟，则$A$可表示成：

$$A=\{李红，张勇，刘伟\}.$$

如果用$a$、$b$、$c$分别代表李、张、刘三人，则$A$亦可写成：

$$A=\{a, b, c\}.$$

若把例2所说的集合记为$B$，则$B$可写成：

$$B=\{1, 2, 3, 4\}.$$

若把例3所说的集合记为$C$，则

$$C=\{3+9, 8+4, 6+6\}.$$

如果$a$是集合$A$的元素，我们就说$a$属于集合$A$，记作“$a\in A$”，读作“$a$属于$A$”。例如：李红$\in A$，$3\in B$，$8+4\in C$。

如果$a$不是集合$A$的元素，我们就说$a$不属于集合$A$，记作“$a\overline{\in} A$或$a\notin A$”，读作“$a$不属于$A$”。例如：李明$\overline{\in} A$，$\overline{\in} B$，$7+7\overline{\in} C$。

由于元素和集合是两个不同的概念，所以$a$和$\{a\}$是不同的。$a$表示一个元素，而$\{a\}$表示只有一个元素$a$的集合。

在集合的概念里，由于“全体”一词，含有元素无序的意思，所以集合$B=\{1, 2, 3, 4\}$也可以表示为$\{2, 3, 1, 4\}$。但是一个集合的元素是指这个集合中的互不相同的事物，所以在同一集合里不能重复出现同一个元素。例如，小于5的自然数的集合不能写成$\{1, 2, 2, 3, 4\}$。集合元素的确定性、互异性与无序性是集合概念的三个特征。

**2. 描述法**

描述集合中元素的共同特征，并把它写在大括号内，用来表示集合，这种方法叫做描述法。

上面所举的集合$A$、$B$，用描述法可表示成：

$$A=\{\text{某校一年一班班委}\};$$

$$B=\{x\mid x\text{是小于5的自然数}\}$$

或

$$B=\{x: x\text{是小于5的自然数}\}.$$

又如：

$$M=\{x\mid x^2-1=0\}$$

表示由方程$x^2-1=0$的所有解组成的集合；

$$N=\{\text{直角三角形}\}$$

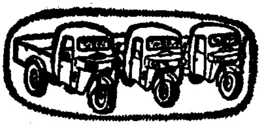
表示由所有直角三角形组成的集合；

$$G=\{\text{直线}l\text{上的所有点}\}$$

表示由直线$l$上的所有点组成的集合。这里$G$不能用列举法表示。在一个问题中用什么方法表示集合，要看具体问题而定。

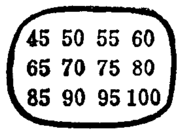
表示集合，除了上面介绍的列举法和描述法外，还可以在一个集合的所有元素外面画一个圈，直观地表示这个集合。这种表示集合的直观图叫韦恩图（韦恩是英国的一个数学家的名字）。

例如：



（第一册第8页）

图 1·1




（第一册第89页）

图 1·2

图1·1表示由三辆汽车构成的集合。图1·2表示下面的集合：

$$\{45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}.$$

用韦恩图表示集合更直观、形象，易为儿童所接受。所以小学课本中，虽然没有提出集合这一名称，但已经采用这样的表示法来渗透集合思想。在理解小学课本中用韦恩图表示的集合时，必须注意以下三点：

1．用韦恩图表示的集合，它的所有元素都被显示在圈圈内。例如，对于一个画出实物的韦恩图，画在圈内的事物是

它的元素，不在圈内的事物不属于这个集合。因此“都被显示在圈内”就自然成为这样的集合元素的一种共同特征。这样，对于图1·2所示的集合，既可以说是“由45到100所有5的倍数所组成的集合”也可以简单地说是“画在圈内的事物的集合”或“写在圈内的数的集合”。所以我们可以画上一个圈圈，在圈内画上我们所感兴趣的各种事物，来表示这些事物所成的集合。

2. 由于集合元素的互异性，如果一个韦恩图中所画的实物有外形相同的话，应当把它们理解为不同的实物。如图1·1中的三辆汽车，虽然外形相同，但应当理解为三辆不同的汽车（比如它们有不同的车号），而不应把它们理解为同一个元素出现三次。类似地，一个韦恩图中画三个形状相同的三角形，也应当把它们理解为三个不同的三角形（如三块三角板）。

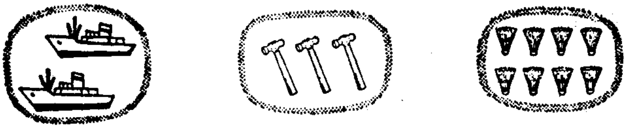
3. 一个韦恩图中所画的一个实物，只表示一个元素。例如第一册第3页，画一个书包，外面画一圈圈，表示“由一个书包构成的集合”，不能理解为“由书包构成的集合”。如果教学时把它说成“由书包构成的集合”，将被误解为“由所有书包构成的集合”。如果要表示“由所有书包构成的集合”，可以写上“书包”两个字，外面加一个圈圈。例如第七册中就有把“正方形”三字写在一个圈内，用以表示由所有正方形构成的集合。可见小学课本里，用画圈圈表示集合，有列举与描述两种办法。

## 三、集合概念在小学数学中的渗透

小学数学课本中由具体到抽象、从易到难地相继出现一系列韦恩图，给学生以集合的感性认识。

1．先出现由实物图、几何图形组成的韦恩图，然后逐渐发展到由数、式子组成的集合．圈内的元素，由逐个列举过渡到文字描述，元素个数也由有限多个扩展到无限多个．从中渗透了构成集合的事物的多样性．它们可以是军舰、三角形，……元素个数可以是有限个，也可以无限多个．

例如在第一册，开始认数时，出现的一些韦恩图是：



（第一册第4页）　（第一册第5页）　（第一册第24页）

图 1·3

这些集合的元素都是实物．到了第一册第68页的第5题，就出现这样的练习：

| | |
|---|---|
| 8＋5 | 3＋9 |
| 7＋7 | 9＋4 |
| 8＋4 | 8＋6 |
| 6＋8 | 9＋5 |
| 7＋6 | 6＋6 |

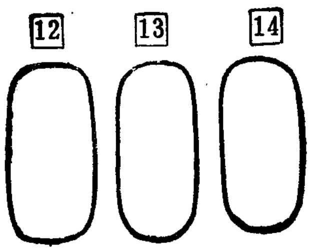
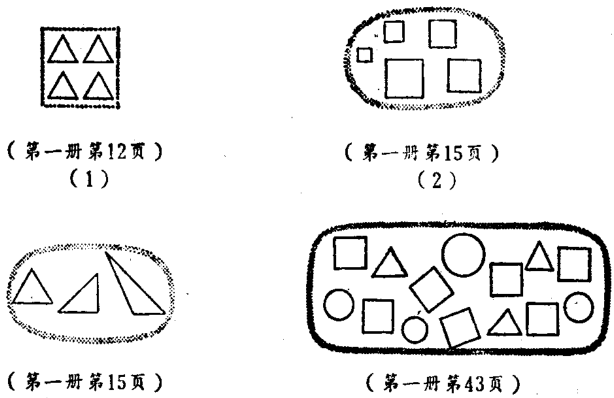



图 1·4

题目要求学生从左边的十个式子中，选出和为12、13、14的式子分别填入右边的三个圈子中．这样，图1·4中的三个韦恩图所表示的集合中的元素便是式子，而不是实物．第一册第89页出现的韦恩图如图1·2所示，它所表示的集合的元素是数，前面说过，第七册中的所有正方形所成集合，它的

元素有无限多个。

2．儿童初学数数，习惯于数形状相同的事物。例如数几只小鸡，数完后他会答出其中有几只小鸡。当我们把母鸡、公鸡、小鸡合在一起让他数，如果他能说出这里有几只“鸡”.说明他的认识已经从“公鸡”、“母鸡”、“小鸡”中抽象出“鸡”的共同属性了。所以这种问题能锻炼学生的抽象能力。类似地，把苹果和梨合在一起让他数出有几个（水果），也有一个从梨和苹果中抽象出共同特征——“水果”的过程。课本从易到难地，先出现由一些外形相同的事物组成的集合（如图1·3所示的几个韦恩图），而后，逐渐出现由外形不同的事物组成的集合，让学生数集合中元素的个数，从中无形地锻炼学生的抽象能力。例如：在图1·5（4）中，学生填写一共14个时，他在思想上已经透过圈中各图形形状、大小不同的现象，认识到圈中有“14个图形”或“14个东西”。这就是今后认识这集合有14个元素的基础。



（第一册第12页）
（1）

（第一册第15页）
（2）

（第一册第15页）
（3）

（第一册第43页）
（4）

图 1·5

## 练 习 一

1. 举出10个集合的例子。

2. 下面的说法是否正确？为什么？

(1) 某灯泡厂1980年3月2日生产的所有灯泡构成一个集合；

(2) 某教室里所有的课桌椅构成一个集合；

(3) 方程$3x-2=0$的所有解构成一个集合；

(4) 一个人，一本书，一个萝卜不能画在一个韦恩图里构成一个集合；

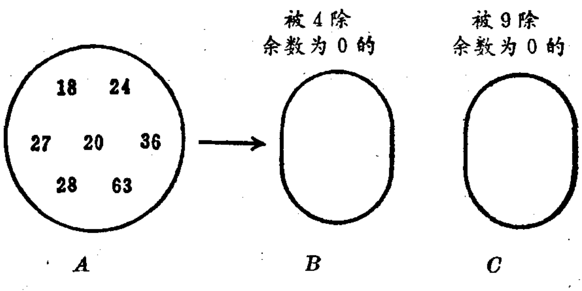
(5) 所有很会唱歌的人构成一个集合；

(6) 所有好看的影片构成一个集合；

(7) 某小学的校长是我国所有小学校长集合的一个元素；

(8) 设$A=\{$三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，则$B$是$A$的一个元素。

3. 用列举法表示下列韦恩图所示的集合$A$、$B$、$C$(第三册第41页)。




（第 3 题）

4. $A$、$B$、$C$是第3题所给集合．试在下列横线上适当地填写$\in$，$\bar{\in}$，$B$，$C$。

(1) 20____$B$;　　16____$B$;　　27____$B$。

(2) $24\in$ ____； $18\overline{\in}$ ____；

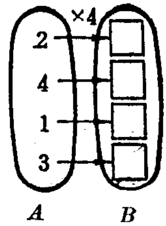
$27\in$ ____.

5. 设$A=\{13, 24, 40, 62\}$，

$B=\{y|y=x-5, x\in A\}$，

试用列举法表示集合$B$.

6. 在右图中（第二册第63页）用列举法和描述法表示集合$B$.




（第6题）

## §2 集合的包含与相等

### 一、子集

先看两个集合：

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B=\{3, 4\}.$$

我们看出，集合$B$的每一个元素都是集合$A$的元素，可见集合$B$是由$A$的一部分元素组成的，我们将说，集合$B$是集合$A$的子集。

〔定义1〕如果集合$B$的任何一个元素都是集合$A$的元素，称集合$B$是集合$A$的子集。集合$B$叫做集合$A$的扩集。记作

$$B\subseteq A \quad 或 \quad A\supseteq B.$$

读作"$B$包含于$A$"或"$A$包含$B$".

在上面的例子中，集合$\{1\}$，$\{2, 3, 5\}$都是$A$的子集。但集合$C=\{2, 3, 5, 6\}$不是$A$的子集，因为$C$的元素6不属于$A$.

〔例 1〕设 $A=\{某校一年一班全体学生\}$，

$B=\{该校一年一班全体男生\}$，

则有 $$B\subseteq A.$$

〔例 2〕课本第一册第89页第14题：

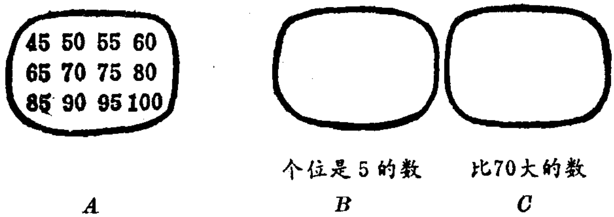



图 1·6

我们有 $A\supseteq B$， $A\supseteq C$。

对于任何一个集合$A$，因为它的任何一个元素都属于集合$A$，所以

$$A\subseteq A.$$

也就是说，任何一个集合是它本身的子集。

从图1·6可见，$A$，$B$，$C$三个集合都是$A$的子集。但其中$B$，$C$与$A$是不同的，我们将称与$A$不同的子集$B$、$C$为$A$的真子集。

〔定义2〕如果$B$是$A$的子集，并且$A$中至少有一个元素不属于$B$，称$B$为$A$的真子集，$A$是$B$的真扩集，记作

$$B\subset A \quad 或 \quad A\supset B.$$

在例 2 中，集合$B$是$A$的真子集，这是因为：

(1) 集合$B$的每个元素都属于$A$；

(2) $A$中有一个元素——50不属于$B$。同理，$C$也是$A$的真子集。

在例 1 中，若设某校一年一班有一个女生，那么这个女生不属于$B$，这时$B$是$A$的真子集。如果该班全是男生，那么$B$是$A$的子集但不是$A$的真子集。

如果该班全是女生，那么$B$中一个元素也没有，我们把不含任何元素的集合叫做空集。空集记作$\phi$。我们还规定空集$\phi$是任何集合的子集。在例 2 中，如果该班全是女生，则$B$就是空集$\phi$，并且$B$仍看作是$A$的子集。

〔例 3〕 $\{x \mid x^2+1=0$的实数解$\}=\phi$。

$\{x \mid 3x=0$的解$\}=\{0\}$。

应当注意，一个集合是空集与一个集合只包含一个元素0是不一样的。在例 3 中，第一个集合，表示方程$x^2+1=0$的实数解的集合，由于这方程无实数根，所以它是空集，第二个集合表示方程$3x=0$的解的集合，它有一个解$x=0$，所以$\{0\}$不是空集。

〔例 4〕 写出集合$A=\{1, 2, 3\}$的所有子集。

〔解〕 $A$ 的所有子集是

$\phi$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$。

由此可见，$A$的子集或者由$A$的全部元素组成，或者由$A$的一部分元素组成，或者是$\phi$。所以，对于子集这一概念，我们可用下面较通俗的话来说：

由集合$A$的全部元素或者一部分元素（0个元素也行）所组成的集合$B$，叫做$A$的子集。

## 二、集合的相等

设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{4, 2, 1, 3\}$。这里$A$是$B$的子集，同时$B$也是$A$的子集。$A$和$B$实际上是同一个集合。这时，我们说$A$与$B$相等。

〔定义3〕 如果$A$是$B$的子集，同时$B$也是$A$的子集，即$A \subseteq B$ 且$B \subseteq A$，称$A$与$B$相等。记作

$$A=B$$

读作"集合$A$等于集合$B$"。

在例1中，如果某校一年一班全班都是男生，则$A=B$。

容易看出，集合$A$等于集合$B$时，$A$与$B$包含的元素完全一样，或者$A$与$B$都是空集。

按照定义3，证明两个集合$A$与$B$相等的办法是：

(i) 先证明 $A\subseteq B$，即若$a\in A$，必有$a\in B$；

(ii) 再证明 $B\subseteq A$，即若$a\in B$，必有$a\in A$。

〔例 5〕设$A=\{$小于5的质数$\}$，

$B=\{2, 3\}$，

试证 $A=B$。

〔证明〕(i) 设$a$是$A$的任一元素，即$a\in A$，则$a=2$或$a=3$。若$a=2$，有$a\in B$，若$a=3$，也有$a\in B$。可见$A$的任一元素$a$都属于$B$，由子集定义有$A\subseteq B$。

(ii) 设$a\in B$，则或者$a=2$，或者$a=3$。若$a=2$，2是小于5的质数，所以$a\in A$。同理，若$a=3$，也有$a\in A$。故$B\subseteq A$。

由定义3有 $A=B$。

集合的相等与包含关系有传递性，即

(1) 若$A=B$，$B=C$，则$A=C$。

(2) 若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

(3) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

以证明(2)为例。设$a\in A$，由$A\subseteq B$，有$a\in B$。由$B\subseteq C$，有$a\in C$。可见$A$的任一元素$a$都属于$C$，所以$A\subseteq C$。

必须注意，记号$\in$与$\subseteq$是不相同的，前者表示元素与集合的属于关系，后者表示集合与集合的包含关系，使用时应注意区别。