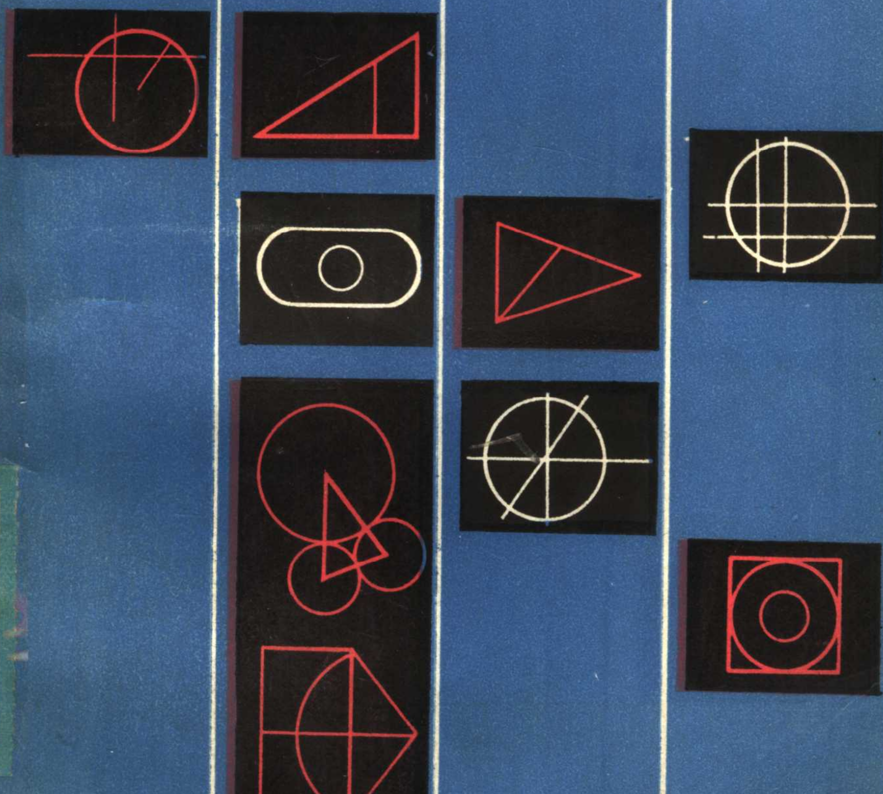
中学微积分教学辅导



中学微积分教学辅导

张华忠　王成新　编

山东人民出版社

一九八一年·济南

中学微积分教学辅导

张华忠　王成新　编

*

山 东 人 民 出 版 社 出 版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
山东新华印刷厂临沂厂印刷

*

787×1092毫米32开本　13.75印张　278千字
1981年9月第1版　1981年9月第1次印刷
印数：1—4,000

书号 7099·1022　定价 1.15 元

前　言

根据《全日制十年制学校中学数学教学大纲》（试行草案）的要求，在高中数学教学内容中增加了微积分的初步知识。为帮助教师教好这门课程，特编写了这本教学参考书。

在本书中，除了包含教学大纲所提出的要求外，还作了适当的加深加宽，并把教学中容易出现的问题归纳在一起加以介绍。为便于教学，每章都配有习题，书后附有答案。希望读者多加批评指正。

编　者

1980年4月

目　录

绪　言

开始学习微积分时，应该首先概括地了解一下微积分研究的对象、方法及其与初等数学的区别和联系。

1. 研究的对象

客观世界的一切事物都在不断地运动变化，而且这种运动变化又互相联系着，有的联系还存在着规律。

事物的运动变化往往伴随着量的变化，因而事物运动变化之间的联系也反映在变化着的量即变量之间的联系上，并且这种变量之间的联系往往也有着联系的规律。这种有规律的联系在数学中叫做函数关系，进而又从这里抽象出了函数这个概念。微积分研究的对象就是实数范围内的函数——实函数。所以，微积分研究的对象是客观世界中变量之间的一种有规律性的数量联系以及它们的变化规律。

初等数学则不同，它主要研究的是常量之间的数量联系。由于在相对静止的状态下，变量之间的联系就转化为常量之间的联系，因此微积分在研究变量之间的联系时，总离不开初等数学；而微积分研究的内容和所得到的结论也比初等数学更广泛、深刻。

2. 研究的方法

研究的对象不同，决定了研究的方法也是不同的。我们知道，辩证法是从事物、现象之间的联系来考察事物的运

动、变化和发展的.既然微积分研究的对象是变量之间的联系和变化规律，所以，微积分的研究方法也就必须运用辩证的方法.因此，微积分在研究问题时，首先从变化的观点出发引入变量这个概念.在引入变量以后，又不是孤立地研究每一个变量，而是研究变量之间的相依关系，从变量之间的联系中去考察问题，从而使用了充分体现辩证方法的极限方法，解决了一系列用孤立静止的观点所不能解决的问题.

同样，由于初等数学主要研究的是常量之间的联系，所以相对来说在初等数学中所使用的方法，基本上属于形式逻辑的范围，也就是它对许多问题是采用孤立静止的方法来处理的.

3. 实例

下面通过两个例子，说明微积分与初等数学从研究对象到研究方法的不同以及二者之间的联系.

例1. 求圆的面积.

在初等数学中，直就是直，曲就是曲，两者是有严格区别的. 所以，在初等数学中多边形的面积和圆的面积是放在两个章节中分别研究的，而看不到它们之间的联系，因此，也就不能科学地给出圆面积的定义和计算圆面积的方法. 为了求得圆面积的计算公式，我们常常利用长方形的面积公式计算圆的面积，如同图0—1所表示的分割拼凑办法，这样，以近似的关系式

$$AB\approx \pi R,\quad AC\approx R$$

得到了精确的圆面积的计算公式$S=\pi R^2$.在逻辑上当然这是矛盾的.

而在微积分中，把正多边形作为圆的内接图形，从而把正多边形与圆之间的关系作为对立统一关系来处理。在通常静止的状态下正多边形的面积与圆的面积没有任何关系，但是，在运动变化中它们就可以统一起来，也就是在正多边形的边数不断增加的运动变化中，正多边形的面积向圆的面积不断地转化着，而在极限状态下，正多边形的面积就转化为圆的面积了，也就是把圆面积作为当边数无限增加时圆内接正多边形面积的极限，从而辩证地得到了圆面积的计算公式。具体的处理方法如下.如图0－2，设圆内接正六边形的边长和边心距分别用a_6、R_6表示，则

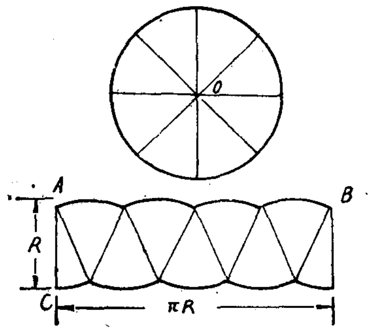


图 0—1

$$S_6=\frac{1}{2}\cdot 6a_6R_6.$$

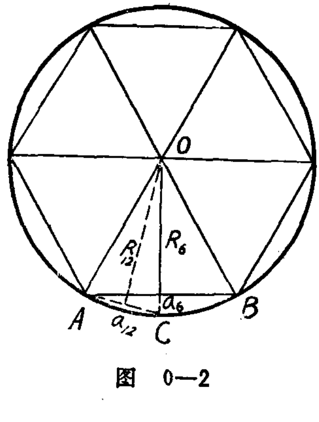


图 0—2

显然，S_6可以作为圆面积的近似值，但是太不精确. 为了得到更精确的值，我们增加正多边形的边数，比如把边数加倍，从而得到

$$S_{12}=\frac{1}{2}\cdot 12a_{12}R_{12}.$$

从图上看出，用S_{12}作为圆面积的值比S_6精确了一些，但仍然是近似值。即使把边数继续加倍得S_{24}、S_{48}、S_{96}等等，也仅是一次次地提高了精确度，但总归还是圆面积的近似值。由此可见，用孤立的静止的方法寻求圆面积的精确值是达不到目的的，也就是初等数学的处理方法在这里是无能为力了。因此，我们改用辩证的方法，就是让正多边形的边数n取的值从静止状态运动变化起来，也就是让n无限增大，从而正多边形的面积S_n也运动变化，而从S_n的运动变化和发展的趋势中寻求圆的面积。在直观上很明显，当n无限增大时$na_n\to 2\pi R$，$R_n\to R$，从而有$S_n\to S$。就是

$$
\begin{array}{l}
S_6=\frac{1}{2}\cdot 6a_6\cdot R_6\\[2ex]
S_{12}=\frac{1}{2}\cdot 12a_{12}\cdot R_{12}\\[2ex]
S_{24}=\frac{1}{2}\cdot 24a_{24}\cdot R_{24}\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
S_n=\frac{1}{2}\cdot na_n\cdot R_n\\
\quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow\\
S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2
\end{array}
$$

在运动变化中，我们终于得到了圆面积的精确值。

从这里我们看到了微积分与初等数学在处理方法上的不

同，看到了辩证法的威力，也看到了微积分同初等数学在处理方法上相辅相成的关系。

我国古代数学家刘徽（公元三世纪，魏晋人）总结前人的成果，在他著的《九章算术注》中就提出了用圆内接、外切正多边形计算圆面积的"割圆术"。上面的作法正体现了他的思想。他从半径为一尺的圆内接正六边形开始，让正多边形的边数倍增，从而用正多边形的面积逐渐逼近圆的面积。他一直算得

$$S_{192}=3.14\frac{64}{625}\text{平方尺。}$$

刘徽并不认为S_{192}是终结，而表示可以象这样继续割下去。他说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"这就是说，边数越多，则圆内接正多边形的面积越与圆的面积接近，当边数无限增加时，正多边形面积的极限就是圆面积。

应该注意，刘徽这种思想的含义是完全正确的。但是他原文的"以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"是不确切的。首先，这种分割可以无限次地分割下去，而不至于不可割；其次，随着分割的继续正多边形的周长与圆周长无限靠近，而不能与圆周合体。在刘徽所处的时代，"无限"的思想还在发展阶段中，所以他把无限过程作为有限过程来处理了。

例2. 自由落体的瞬时速度。

自由落体的运动规律是 $S=\frac{1}{2}gt^2$。它在下落的过程中速

度越来越快，因此各个时刻的速度不一样。为了求得t_0时刻的速度，我们从t_0时刻前后的运动过程中去考察，让时间从t_0变到t，这样落体所通过的路程也从$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$变到$S=\frac{1}{2}gt^2$（图0—3）。在$t-t_0$这段时间里，落体的平均速度是

$$\overline{v}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}.$$

若$t-t_0$很小，那么显然可以用$\overline{v}$作为t_0时刻的速度v_0的一个近似值，并且$t-t_0$越小，$\overline{v}$的精确度也越高。但是，只要t所取的值是一个静止的数，那么所得到的$\overline{v}$总是v_0的一个近似值。所以，要得到精确值，就必须从前后的联系中，从无数个近似值的变化趋势中来寻求。就是让$t\to t_0$，由

$$\overline{v}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0)$$

看出，这时

$$\overline{v}\to\frac{1}{2}g(t_0+t_0)=gt_0.$$

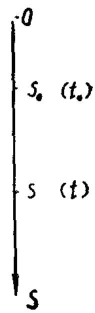


图0—3

这就是t_0时刻的精确速度，即$v_0=gt_0$。

要想得到任何一个时刻t的速度，只要把t_0换成t就可以了，就是$v=gt$。

以上两个例子清楚地说明了微积分研究的对象、方法与

初等数学的不同和联系。概括来说，微积分研究的主要是变化的数量和数量关系，初等数学研究的主要是不变化的数量和数量关系。微积分以运动变化的观点方法研究对象，而初等数学主要是用静止的观点方法来研究对象的。从而微积分研究的对象、方法更具有普遍意义，研究的结果也就更全面、更深刻。

第一章　函　数

客观世界的一切事物，都在不断地运动变化，它们在数学中的反映就是变量．变量之间的相互依赖关系——函数关系，是微积分研究的对象．

第一节　变量与常量

1．变量、常量

量是数学中一个重要的基本概念．什么是量？用描述的方法来说，就是在选取了度量单位以后可以表示出大小、多少的对象．例如，体积、重量、温度、时间、距离、速度、电流等等都是量．量反映着对象的一种特性．随着科学的发展，人们通过各种手段可以使本来无法度量的对象也成为可以被度量的量了．例如，光的明度，声音的强度，颜色的色度等等，因而使量的内容越来越丰富．

度量量的结果得到抽象的数，叫做量的数值．由于客观现实中的具体的量总可以用抽象的数表示，所以，在数学中我们研究的总是作为量的共同特征的数，不管它们带有单位还是不带有单位，都叫做数或者数量．

客观事物的运动发展呈现两种状态，一是相对静止状

态，一是运动状态，因此我们所研究的量也有两种状态．有的量在问题的研究过程中始终取同一个数值，叫做常量；而有的量在问题的研究过程中不断变化，取不同的数值，叫做变量．例如，地面附近的重力加速度，在小范围内可以认为是处处相同的，即取作常量；但是在发射人造地球卫星时，就要考虑各地的差别而取作变量了．又如，在解一个具体的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$时，a、b、c是常量，不能任意取值；但是，当我们考虑所有实系数的一元二次方程的解的情况时，a、b、c就可以在实数范围内任意取值，而成为变量了．

2．注意的问题

（1） 一个量是常量还是变量是相对的，这是因为，一方面与研究问题的过程有关，如上面的例子；另一方面，有的量在问题的研究过程中是变量，但它不是影响问题的决定因素，因此也可以把它看作常量．

（2） 常量有两种．一种常量是它取的值与给定的条件有关，就是在一种条件下它始终取同一个值，而在另一种条件下又取另一个相同的值．这种常量叫做相对常量．例如椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中的参数$a$、$b$；单摆振动周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$中的重力加速度$g$．另一种常量，它在任何条件下都取同一个数值，这种常量叫做绝对常量．比如，圆面积公式$S=\pi R^2$中的π，多边形内角和公式$A=(n-2)180°$中的2、