

高等学校教材

数学模型方法及应用

Shuxue Moxing Fangfa Ji Yingyong

● 熊启才 主编
● 曹吉利 张东生 赵临龙 副主编

重庆大学出版社

数学模型方法及应用

熊启才 主 编
曹吉利 张东生 赵临龙 副主编

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 简 介

数学模型是近些年发展起来的新学科,是数学理论与实际问题相结合的一门科学。它将现实问题归结为相应的数学问题,并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析 and 研究,从而从定性或定量的角度来刻画实际问题,并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。

本书通过物理、化学、生物、交通、机械、经济管理和工程技术中众多数学模型的实例,阐述并建立各种现实问题数学模型的主要方法和基本规律。通过本书学习,将有助于增强分析问题和解决问题的能力,提高利用应用数学解决实际问题的能力,从而进一步培养学习者的创新意识和创新能力。

本书可作为高等院校理工科各专业以及经济管理相关专业的教材,也可供高等学校师生、科研、工程技术和经济管理等人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型方法及应用/熊启才主编. —重庆:重庆大学出版社,2005.3

ISBN 7-5624-2880-8

I. 数... II. 熊... III. 数学模型 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 120433 号

数学模型方法及应用

熊启才 主 编

曹吉利 张东生 赵临龙 副主编

责任编辑:曾显跃 版式设计:曾显跃

责任校对:李定群 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆科情印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:11.25 字数:281 千

2005年3月第1版 2005年3月第1次印刷

印数:1—4 500

ISBN 7-5624-2880-8 定价:18.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究。

前言

21 世纪是知识经济和信息时代,也是人才和科学技术激烈竞争的时代。为使人才和科学技术在激烈的竞争中立于不败之地,我们必须加强人才的培养和科学技术的不断发展。

随着科学技术的发展和社会的不断进步,数学这一重要的基础科学迅速地向自然科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济建设及金融管理、生物医学等方面发挥出愈来愈明显的作用。特别是数学与计算机技术相结合,已形成一种重要的、可以实现的技术。“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已为人们所接受。然而,一个现实世界中的问题,包括科学技术中的问题,往往并不是自然地以一个现成数学问题的形式出现的。要充分发挥数学的作用,首先要将所考察的现实世界中的问题归结为一个相应的数学问题,即建立该问题的数学模型。这是一个关键性的步骤,在此基础上才有可能利用数学的概念、方法和理论进行深入的研究,从而从定量或定性的角度,为解决现实问题提供精确的数据和可靠的方法。

不同的现实问题,往往有不同的数学模型;即使对同一现实问题,也可能从不同的角度或根据不同精度的要求而归结出不相同的数学模型。另一方面,同一个数学模型又往往可同时用来描述表面上看来毫无关联的自然现象和社会规律。但对于归结数学模型的方法,不可到处生搬硬套,应根据不同的自然现象和问题,建立不同的数学模型。尽管如此,人们在用数学工具解决各种各样实际问题的过程中,通过大量归结数学模型的实践,逐步发现和总结一些建立数学模型的规律,数学模型这一新的学科分支以及相应的课程设置便因此应运而生。

这些年来,数学模型这一新型的课程已在国内外愈来愈多的学校开设,通过数学模型课程学习,使读者在应用数学知识基础上,不断提高分析问题和解决问题的能力,培养其创新

思维,使其成为高科技的创新人才。编者正出于此目的,编写了这本教材。本书通过选择一些实际问题,内容涉及物理、化学、生物、交通、机械、经济管理、工程技术等众多方面的数学建模实例,向读者展示建立数学模型的方法,以及用数学解决实际问题的过程,起到“抛砖引玉”的作用。我们相信,通过本书学习,将对广大读者领会数学模型的真正含义,提高利用数学知识解决实际问题的能力,起到积极的促进作用。

本书共 13 章,第 1、4、6、7、10 章由熊启才编写,第 3 章由曹吉利编写,第 8、11、12 章由张东生编写,第 2 章由曹吉利、张东生编写,第 13 章由赵临龙编写,第 5 章由贾吉林编写,第 9 章由赵临龙、贾吉林编写。熊启才任主编,曹吉利、张东生和赵临龙任副主编,全书由熊启才、张东生统稿,文字的编排和插图工作由贾吉林完成。我们在编写本书过程中,参考了国内外一些优秀的数学模型的案例和思维方法,在此表示衷心的感谢。此书得到陕西理工学院 2004 年教学改革研究项目资助(YJG0420)。

数学模型作为一门新型课程,目前尚不完全成熟,还有待于进一步探索和发掘。限于编者水平,书中会有谬误和不妥,希望读者提出批评意见,以利于本书不断改进和完善。

编 者
2004 年 7 月

目 录

第 1 章 建立数学模型	1
1.1 从现实生活到数学模型	1
1.2 数学模型	4
1.3 数学模型方法的基本特征	7
1.4 数学模型的要求和步骤	10
1.5 数学建模的逻辑思维方法	12
1.6 观察力和想像力的培养	19
习题	20
第 2 章 数学模型的构造方法	22
2.1 直接分析法	22
2.2 系统动力学方法	25
2.3 概率统计分析法	29
2.4 网络计划分析法	31
2.5 状态空间分析法	38
2.6 模糊评价分析法	41
2.7 投入产出法	44
2.8 层次分析法	47
习题	50
第 3 章 代数方法的数学模型	52
3.1 安全渡河数学模型	52
3.2 商店经营状态数学模型	54
3.3 正则链数学模型	55
3.4 微量元素磷转移数学模型	56
3.5 基因遗传和近亲繁殖数学模型	58
习题	59

第4章 微分法的数学模型	61
4.1 不允许缺货的存贮数学模型	61
4.2 允许缺货的存贮数学模型	63
4.3 森林救火数学模型	64
4.4 最优价格数学模型	65
4.5 肿瘤的生长规律数学模型	66
4.6 传染病数学模型	69
4.7 糖尿病的检测数学模型	72
习题.....	74
第5章 微积分方法的数学模型(续)	76
5.1 雨中行走问题数学模型	76
5.2 磁盘的最大存储量数学模型	77
5.3 通信卫星的覆盖面积数学模型	79
5.4 水的流出时间数学模型	80
5.5 追击问题数学模型	81
5.6 最速降线问题数学模型	82
5.7 交通管理中黄灯时间数学模型	84
5.8 新产品销售量数学模型	86
习题.....	87
第6章 稳定性方法的数学模型	90
6.1 平衡状态的交通流数学模型	90
6.2 捕鱼业的持续收获数学模型	93
6.3 种群的相互竞争数学模型	96
6.4 种群的相互依存数学模型	98
习题.....	99
第7章 变分法的数学模型	101
7.1 生产计划的制订数学模型.....	101
7.2 生产与贮存的控制数学模型.....	103
7.3 国民经济收入增长数学模型.....	105
7.4 林木砍伐最佳时机数学模型.....	107
习题	109
第8章 加工流水线设计的数学模型	111
8.1 加工流水线设计问题数学模型.....	111
8.2 加工次序问题数学模型.....	117
习题	120

第 9 章 层次分析法的数学模型	122
9.1 学生评价数学模型	122
9.2 招聘人员的数学模型	123
9.3 合理利用企业利润数学模型	124
9.4 教学质量评估指标体系数学模型	125
习题	127
第 10 章 图论方法的数学模型	129
10.1 消防设施数学模型	129
10.2 化学制品的存放数学模型	131
10.3 循环比赛的名次数学模型	132
10.4 教学管理评价体系数学模型	135
习题	137
第 11 章 随机服务的数学模型	139
11.1 收款台前的排队数学模型	139
11.2 机器维修服务数学模型	143
11.3 快餐店以快取胜数学模型	146
11.4 计算机的序贯处理数学模型	149
11.5 开水房合理设计数学模型	151
11.6 顾客服务数学模型	153
习题	154
第 12 章 模糊评价分析数学模型	155
12.1 三好学生模糊综合评选数学模型	155
12.2 学生实习成绩的模糊评定数学模型	158
12.3 学生素质和能力综合评价数学模型	162
习题	163
第 13 章 投入产出综合平衡数学模型	165
13.1 价值型投入产出数学模型	165
13.2 开放型投入产出数学模型	168
13.3 经济系统价值型投入产出数学模型	169
习题	170
参考文献	171

第 1 章

建立数学模型

随着科学技术的迅速发展,数学模型在现代人的生产、工作和社会活动中发挥着重要作用。电气工程师必须建立所要控制生产过程的数学模型,用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算,才能实现有效的过程控制。气象工作者为了得到准确的天气预报,一刻也离不开根据气象站和气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型。生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型,就可以分析药物的疗效,有效地指导临床用药。城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型,为领导层对城市发展规划的决策提供科学根据。厂长、经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、储存费用等信息,筹划出一个合理安排生产和销售数学模型,就可以获得更大的经济效益。即使在日常活动(如访友、采购)中,人们也常会提出一条优化的出行路线,它也是一个数学模型的建立与求解。因此,对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说,建立数学模型是沟通实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁。

1.1 从现实生活到数学模型

人类生活在丰富多彩、变化万千的现实世界里,无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界,从而不断地创造出日新月异、五彩缤纷的物质文明和精神文明。博览会常常是集中展示这些成果的场所之一。那些五光十色、精美绝伦的展品给我们留下了深刻的印象。工业博览会上,豪华、舒适的新型汽车叫人赞叹不已;农业博览会上,硕大、娇艳的各种水果令人流连忘返;科技展览厅里,大型水电站模型雄伟壮观,人造卫星模型高高耸立,清晰的数字和图表显示着电力工业的迅速发展,与整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线,核电站工程的彩色巨照前,手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍核反应堆的运行机理;电影演播室里,播放着一部现代化炼钢厂实现生产自动控制的科技影片,其中既有火花四溅的钢坯浇铸情景,也有展示计算机管理和控制的框图、公式和程序。

参观博览会,像汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人以亲切真实的感受,可是从开阔眼界,丰富知识的角度看,电站、卫星、铁路、钢厂……这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象,以它们的各种形式的模型——实物模型、照片、图表、公式、程

序等等汇集在人们面前,这些模型在短短几小时里所起的作用,恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的。

与形形色色的模型相对应,它们在现实世界里的原始参照物通称为原型。

原型和模型 原型(Prototype)和模型(Model)是一对对偶体。原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象。在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process)等词汇,如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统,又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等。本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型。模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物。

这里特别强调构造模型的目的性。模型不是原型原封不动的复制品,原型有各个方面和各种层次的特征,而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次。一个原型,为了不同的目的可以有许多不同的模型,如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真,但不一定会飞,而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能,在外观上不必苛求,至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟,则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性,毫不涉及飞机的实体。所以,模型的基本特征是由构造模型的目的决定的。

模型有各种形式,用模型替代原型的方式来分类,模型可以分为物质模型(形象模型)和理想模型(抽象模型)。前者包括直观模型、物理模型等,后者包括思维模型、符号模型、数学模型等。

直观模型 指那些供展览用的实物模型,以及玩具、照片等,通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大,主要追求外观上的逼真。这类模型的效果一目了然。

物理模型 主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型,它不仅可以显示原型的外形或某些特征,而且可以用来进行模拟实验,间接地研究原型的某些规律。如波浪水箱中的舰艇模型,用模型来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能;风洞中的飞机模型,用来试验飞机在气流中的空气动力学特性。有些现象直接用原型研究非常困难,更可借助于这类模型,如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等,应注意验证原型与模型间的相似关系,以确定模拟实验结果的可靠性。物理模型常可得到实用上很有价值的结果,但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点。

思维模型 指通过人们对原型的反复认识,将获取的知识以经验形式直接贮存于人脑中,从而可以根据思维直觉做出相应的决策。如汽车司机对方向盘的操纵,一些技艺性较强的工种(如钳工)的操作,大体上是靠这类模型进行的。通常说的某些领导者凭经验做决策也是如此,思维模型便于接受,也可以在一定条件下获得满意的结果,但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点,难以对它的假设条件进行检验,并且不利于人们的相互沟通。

符号模型 是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等按一定形式组合起来描述原型(如地图、电路图、化学结构式等),具有简明、方便、目的性强及非量化等特点。

本书专门讨论的数学模型则是由数字、字母或其他数学符号组成的,描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法。

与数学模型有密切关系的数学模拟,主要指运用数字式的计算机模拟(Computer Simulation),它根据实际系统或过程的特性,按照一定的数学规律用计算机程序语言模拟实际运行状况,并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析。例如,通过各种工件在不同机器上按

一定工艺顺序加工的模拟,能够识别生产过程中的瓶颈环节;通过高速公路上交通流的模拟,可以分析车辆在路段上的分布,特别是堵塞的状况。与用物理模型的模拟实验相比,计算机模拟有明显的优点;成本低,时间短,重复性高,灵活性强,有人把计算机模拟作为建立数学模型的手段之一,数学模型在某种意义上描述了对象内在特性的数量关系,其结果容易推广,特别是得到了解析形式答案时,更易推广。而计算机模拟则完全模仿对象的实际演变过程,难以从得到的数字结果分析对象的内在规律。当然,对于那些因内部机理过于复杂,目前尚难以建立数学模型的实际对象,用计算机模拟获得一些定量结果,可称是解决问题的有效手段。

为什么需要数学模型 数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学。它的产生和许多重大发展都是与现实世界的生产活动及其他相应学科的需要密切相关的,同时,数学作为认识改造世界的强有力的工具,又促进了科学技术和生产建设的发展。17世纪伟大的科学家牛顿在研究力学的过程中发明了近代数学最重要的成果之一——微积分,并以微积分为工具推导了著名的力学定律——万有引力定律,这一成就是科学发展史上成功地建立数学模型的范例。

数学的特点不仅在于它的概念的抽象性、逻辑的严密性和结论的确定性,而且在于它的应用的广泛性。进入20世纪以来,数学的应用不仅在它的传统领域(物理领域)继续取得许多重要进展(诸如力学、电学等学科在机电、土木、冶金等工程技术);而且迅速进入了一些新领域(非物理领域)产生了如数量经济学、数学生态学等边缘学科(诸如经济、交通、人口、生态、医学、社会等领域)。

马克思曾说过:“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步”。可以认为,数学在各门科学中被应用的水平标志着这门科学发展的水平。随着科学技术的进步,特别是计算机技术的迅速发展,数学已经渗透到从自然科学技术到工农业生产建设,从经济活动到社会生活的各个领域。一般地说,当实际问题需要人们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时,往往都离不开数学的应用,而建立数学模型则是这个过程的关键环节。

分析 通常指定量研究现实对象的某种现象或定量描述某种特性。例如,研究不同种群的生物在同一自然环境下生存时,相互竞争和依存的现象;描述药物浓度在人体内变化规律,以分析药物的疗效。

预报 一般是根据对象的固有特性,预测当时间或环境变化时对象的发展规律。天气预报以及传染病蔓延高潮时刻的预报可以作为这方面的例子。

决策 其含义很广,譬如根据对象满足的规律做出使某个数量指标达到最优的决策。使经济效益最大的价格策略,使总费用最小的设备维修方案都是这类决策。

控制 一般指根据对象的特征和某些指标给出尽可能满意的控制方案。例如,化工生产过程中对温度和流量的控制,利用红绿灯对交通流进行控制等。

以上列举的关于分析、预报、决策、控制的例子,大部分将作为典型的数学模型出现在本书的各个章节中。

虽然数学模型应用的领域十分广泛,但是本书以讨论非物理领域中的模型为主。这是因为在一些物理领域特别是与力学、电学等学科相关的工程技术领域中,主要由物理定律所确定的数学模型已经比较成熟,一些比较深入的问题常常需要专门的知识不可能也不便于在这本书中讨论。而数学在一些非物理领域中的应用则刚刚起步,需要研究的问题很多,并从模型的

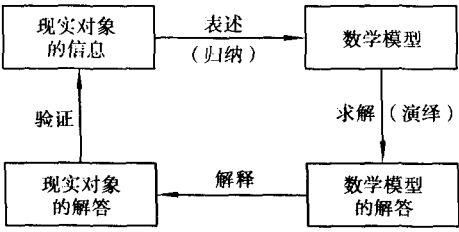


图 1.1 现实对象和数学模型的关系

实际背景往往容易了解。这些领域可以说是应用数学的一块广阔的新天地。

建立数学模型的全过程 一般说来,建立数学模型的全过程可以分为表述、求解、解释、验证几个阶段,并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型,再从数学模型回到现实对象的循环,如图 1.1 所示。

表述 (Formulation) 是指根据建模的目的和掌握的信息(如数据、现象),将实际问题翻译成数学问题,用数学语言确切地表述出来。

求解 (Solution) 即选择适当的数学方法求得数学模型的解答。

解释 (Interpretation) 是指把数学语言表述的解答翻译回现实对象,给出实际问题的解答。

验证 (Verification) 是指用现实对象的信息检验得到的解答,以确认结果的正确性。

表述属于归纳法,求解属于演绎法。归纳是依据个别现象推断一般规律,演绎则是按照一般原理考察特定对象,导出结论。因为任何事物的本质都要通过现象来反映,必然要透过偶然来表露,所以正确的归纳不是主观、盲目的,而是有客观基础的,但也往往是不精细的,带感性的,不易直接检验其正确性。演绎利用严格的逻辑推理,对解释现象做出科学预见具有重要意义,但是它要以归纳的结论作为公理化形式前提,只能在这个前提下保证其正确性。因此,归纳与演绎是一个辩证统一的过程;归纳是演绎的基础,演绎是归纳的指导。

图 1.1 揭示了现实对象和数学模型的关系。数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的产物,它源于现实,又高于现实,因为它用精确的语言表述了对象的内在特性。数学模型经过求解、演绎,得到数学上的解答,再经过翻译回到现实对象,给出分析、预报、决策、控制的结果。最后,这些结果必须经受实际的检验,完成“实践—理论—实践”这一循环。如果检验结果正确或基本正确,就可以用来指导实际,否则应重复上述过程。

1.2 数学模型

在传统的工程技术中,常把数学模型分为确定型和随机型,或者分为静态模型(用代数方程描述)和动态模型(用微分或差分方程描述)。在系统工程中,还要分为近代数学模型和经典数学模型。前者主要用于开发和描述概念,后者主要用来描述各类子系统,所以人们又将后者称为第一类工程数学,将前者称为第二类工程数学。

1.2.1 数学模型的特点

(1) 高度的抽象性

任何一门学科都具有一定的抽象性,数学则比其他学科具有更高的抽象性,这是数学方法区别于其他学科和方法的显著特点。数学方法不仅要抛开事物的次要属性,突出事物的本质属性,而且要舍弃事物的物质和能量方面的具体内容,只考虑其数量关系和空间形式,同时还要把这些数据关系和空间形式做进一步的抽象,加以形式化和符号化,以便能够进行逻辑推理

和数值运算。这种高度的抽象性,实质是对事物认识上的高度概括和深化,对同类问题包含更多的经验和理解。

(2) 高度的精确性

数学方法的高度精确性表现在三个方面:一是表达各种因素、变量与它们之间的关系相当明确和清楚;二是逻辑推演和运算规则十分严密;三是结论非常确定。数学方法可以处理多变量、关系复杂的问题,可在有意义的范围内获得令人满意的计算精度,因此,特别适合于揭示事物量的确定性,成为定量研究的有力工具。

(3) 应用的普适性

数学方法的高度抽象和精确,使之比任何一种科学方法的应用范围都更为广泛,或者说,任何一门学科的发展都必须引进和应用数学方法。可以说,目前只存在尚未运用数学方法的领域,而不存在不能运用数学方法的领域。许多相同形式的数学模型可用于不同的实际问题,具有重要类比和借鉴意义。数学方法的形式化和公理化,使模型本身、计算过程和计算结果都便于交流,数学模型易变动,便于修改参数和改变计算关系,分析和求解问题速度快,求解成本低,特别是同计算机相结合时,这一特点更为突出。

尽管数学模型缺乏直观性、形象性和实时性,但由于上述特点,一直是普遍使用的有效模型,而通常所说的模型化过程主要是指建立数学模型的过程。

经典工程数学模型包括微分方程、积分方程、积分变换、变分、矩阵等,这些源于物理系统的研究模型,一般称为第一类工程数学。

运筹学模型则是研究包含人的某些活动规律在内的问题,如最短路径问题、最佳服务问题、竞争问题等,并在此基础上发展了一类运筹数学模型,如规划问题、排序问题、库存问题、决策问题和博弈问题等等。这些包含人的活动准则在内的运筹学,以及能够表达人的概念和思维过程的由数理逻辑、集合论、关系和图论、代数系统、组合分析等近代数学所组成的“离散数学”,通称为第二类工程数学。

数学模型可分为描述模型和评价模型。描述模型注重对所研究系统的状态和过程的描述,通常是一组系统中各个要素之间关系的量化方程。系统工程中的一个重要问题是对系统结构、功能、价值的评定,称为评价系统,该系统的模型称为评价模型。评价系统具有多目标和多因素的特点,因此评价模型通常需要构建一个完整的价值目标集合(如包括性能、成本、时间、可靠性等目标)和反映该目标集合的评价指标体系,在此基础上,还要建立不同方案之间的评价准则和评价方法。对于有人参与的社会系统或生产系统,由于包含了人的因素,会带来系统行为描述和系统价值评价的某种不确定性或模糊性,也是这类系统建模中的难点。

1.2.2 数学模型的评价和应用

(1) 数学模型的评价标准

数学模型是定量分析的工具,如果一个数学模型不能用来对问题进行定量分析,则该模型便失去它的现实意义。一个合适的数学模型一般应具备以下三个条件:

- ①相似性 能够真实反映所研究对象的本质特征和运动规律。
- ②简明性 结构简明,便于理论分析、逻辑推理和数值计算。
- ③可检验性 能有效地说明和解释实际问题,并能检验其可靠程度。

(2) 数学模型的应用

应用数学模型方法对现实世界中的研究对象进行科学合理的抽象,主要是指运用数学的概念、逻辑、方法对所研究对象的性质和规律进行量化研究,它不仅包括建立研究对象的数学模型,更重要的是仿照数学的逻辑思维方法建立一整套科学的公理化体系。实践表明,数学模型不仅已成为重大工程问题研究和数量分析的科学工具,而且也是政策、决策和工程效果验证的有效实验手段。数学模型不仅能为揭示特定的数量关系提供科学有效的工具和手段,而且能够通过自身的思维特性和在整个历史过程中不断发展并确定下来的全部通用思维方法与手段来影响人的思维活动,提高人的认知能力。因此,系统工程问题的建模一般都力求采用数学模型,并且以此作为衡量模型研究水平的重要标志。

但是,由于客观世界固有的复杂性,大量的系统工程问题中存在着模糊性、不确定性、无样本性和信息的不充分性,很难完全使用数量关系的形式描述和揭示,这就使数学模型的定量研究受到许多因素的制约。因此,数学模型也往往存在以下缺陷:

- ①对事物的科学抽象不合理;
- ②模型的结构形式不合理;
- ③遗漏重要变量使模型失真;
- ④模型过于复杂而难以求解;
- ⑤模型参数取值困难或取值不准确,影响计算结果的可信性和可靠性。

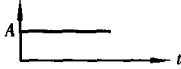
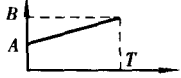
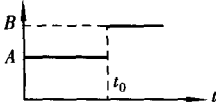
基于上述原因,有时需要多次修正和改进,才能获得令人满意的数学模型。

更重要的是,依靠对研究对象的现有认识和数学工具,单凭定量方法并不一定能真实反映复杂系统的性质和运动规律,因此,定量研究还必须与定性研究结合起来。此外,数学模型也不是万能的,只有当数学模型非常接近实际,客观反映了各种因素间的关系和运行机制,并且输入的数据准确可靠时,数学模型求解的可信度才高。总之,解决复杂的系统工程问题,在力求采用数学模型的同时,往往又不能单纯依赖于数学模型。

1.2.3 常用的单因素变量模型

单变量模型,一般都可以通过数学变换转化为线性模型,因此被广泛应用。其基本构型见表 1.1。

表 1.1 常用的单因素变量模型

类 型	表 达 式	图 像
常量型	$f(t) = A$	
渐升(降)型	$f(t) = A + \frac{(B-A)t}{T}$	
阶跃型	$f(t) = \begin{cases} A & t \leq t_0 \\ B & t > t_0 \end{cases}$	

续表

类 型	表 达 式	图 像
尖峰型	$f(t) = ke^{-1/(t-t_0)^2}$	
高速增长 (下降)型	$f(t) = ke^{1/t}$	
阶跃恢复型	$f(t) = \begin{cases} A & t \leq t_0 \\ ke^{-1/(t-t_0)^2} & t > t_0 \end{cases}$	
龚帕兹 曲线型	$\ln f(t) = k + AB^t$ $A < 0 \quad 0 < B < 1$	
生长型	$f(t) = k - AB^t$ $A > 0 \quad 0 < B < 1$	
二次曲线型	$f(t) = A + Bt + Ct^2$ A, B, C 为三次指数平滑系数	

1.3 数学模型方法的基本特征

数学模型方法实质是主体反映客体(研究对象)揭示其性质和规律,并且利用和改造客体的手段。系统工程研究和处理的对象是复杂多变的系统及其某些特定的方面和特定的问题,因此,在认识客体上要从整体上综合把握各种因素和关系的有机联系。在方法上不能拘泥于固定不变的程序、模型和方法,需要发挥人的独特天赋——创造性。而模型所反映的认识与方法的正确与否,只有通过实践来检验。

1.3.1 数学模型方法的综合性

理论综合是自然科学研究中重大突破的推动力。牛顿将天体运动与物体运动联系起来进行综合研究,创立了经典力学,奠定了整个物理学和天文学的主要基础。爱因斯坦将物质与运动、空间与时间、质量与能量、光与电联系起来进行综合研究,创立了相对论,成为现代科技发展的理论支柱之一。维纳则将许多表面上看来互不相关的领域,如生命现象、人类社会、机器系统和人类思维等,在具有相同的调节与控制关系这一点上联系起来进行综合研究,创立了控制论,同时开辟了智能模拟和仿生研究的新天地,如此等等,都表明综合方法给人类认识带来的巨大飞跃。

当前,科学技术的突飞猛进,使复杂系统的建模不能仅仅依靠个人的智慧和经验,单一方法的运用,以及单因素的思维和单一学科的知识,而必须依靠各行各业的专家,各种方法综合集成,多因素、多视角的立体思维和多学科知识的融合、交叉和渗透。要求系统建模具备综合的观念、综合的方法、综合的评价、综合的原则和综合的技能。同时需要建立一支由不同知识结构组成的,运用自然科学和社会科学的理论和方法的,可以互相补充、启迪和具有丰富的知识信息综合体的系统队伍,进行集体研究和联合攻关。西方国家有许多研究机构(如美国的蓝德公司),其研究队伍由自然科学家和社会科学家组成,研究工作按矩阵方式组织,即按专题组织各有关学科的人员协同研究,这样的知识信息综合体,有利于克服专业人员的局限性,扩大知识领域,同时也往往使问题在意想不到的领域找到有效的解决办法。

数学模型方法是由各领域、各方面、各系统、各层次、各行各业、各学科的种种方法构成的综合体。可以用“千方百计”来形容,也只有“千方百计”才能解决系统工程领域,尤其是规划、决策和管理中千变万化的各种问题。而且,建模活动所产生的效能,都不是一种方法产生的作用,而是多种方法协同配合、综合作用的结果。因此,综合是模型方法的基础,综合性是模型的一个基本特征。

1.3.2 数学模型方法的创造性

(1) 建模与创造性

现有的各种系统工程的模型方法,具有一定的普遍性和适用性,在系统建模活动中,可以直接使用或加以仿效、效法。然而,所谓通用“模型”或软件包绝不是具体解决各种问题的现成模式,而是需要从实际出发,根据不同情况,借助不同方法,采取不同措施,创造性地加以运用和发展。因此,对于一般意义上的建模活动而言,往往是现有模型方法的改进、提高、完善和更新的过程;而对于探索人类未知领域的那些建模活动,则更是完全意义上的新模型创造活动。总之,建立系统数学模型,尤其是抽象程度高的模型,是一种创造性的劳动。创造性是数学模型方法的灵魂。

所谓创造力,是指首创前所未有的、具有社会价值的精神产品或物质产品的能力;创造性则是提出新的设想、创造新事物的能力,也就是能产生出新设想的创造性思维能力、新产品开发能力和生产力转化及其社会价值的实现能力。

模型是现实系统的某种表征,人们希望建立一个比现实系统远为简单,但又可用的、有足够精度的、能预测和解释现实系统的模型。这就要求从所研究的目标出发,正确地把握对象系统的本质,抓住其中的主要因素。建模的无特定性,要求不局限于现成的思路 and 模式。所有这些都是需要发挥创造力加以解决的问题。

系统建模的困难性和挑战性主要表现为以下几点。

①系统运行的机制或机理尚不十分清楚,即使有系统辨识理论和方法,但对复杂系统而言,现有的系统辨识理论和方法仍有局限性,因而需要创造性地探索解决系统的辨识问题。现代科学表明,大系统的复杂性,充分体现在系统的整体性、有机性、非还原性、非决定性和不可逆性等基本性态上,探索研究这些基本性态的内在机理,是系统辨识中重要而艰巨的任务。

②有些系统运行的机制或机理虽然比较清楚,但由于数学工具不够,人们仍无法描述它,需要创造性地探索解决系统模型的描述形式和方法,即所谓创造性建模。

③有些系统模型虽然可以比较确切地描述,但其解集方案数量巨大,即使使用计算机也难

以寻优,因而需要创造性地解决模型求解的快速寻优近似算法。

因此,在实践中,始终需要探索模型方法同其他方法相结合的新途径。例如,专家系统、人工智能、决策支持和情景分析等方法,这需要人们进行创造性的研究和开发。从这个意义上说,创造力是系统工程的支柱,必须重视创造能力的培养。

(2) 创造力的培养

培养创造能力,主要应从以下三方面着手:

①树立辩证唯物主义的世界观。从实际出发,在尊重客观规律的基础上分析问题。开拓创新、提倡实证精神、理性精神和规律意识。重视研究高新技术发展对改变观念,改变管理方式,改变服务手段,改善企业形象,创造市场的作用。

②知识是创造的基础。要加强基础理论,不断更新专业知识和拓展知识面,注意从实践中学习和吸取新知识,积累新经验,重视不同学科知识间的衔接、融合、交叉和渗透。

③培养和训练创造性的科学思维方法。

创造性思维具有以下特殊品质:

A. 独立性。独立思考,敢于提出自己的独到见解,不迷信权威,不崇尚书本,不机械地照搬他人的模式。

B. 广阔性。扩大思维的参照系,对事物从各个方面、各个角度、各个层次上在广阔的时空范围内,进行“全方位”的观察与思考。

C. 系统性。强调对事物进行整体考察,从整体上把握事物的功能和规律。

D. 敏捷性。对环境变化及事物的运动做出快速反应,在复杂多变的随机现象中,准确判断出事物的本质和规律,当机立断,加快进程,争取主动。

E. 灵活性。将扩散思维和集中思维结合起来。扩散思维是充分发挥想像力,通过不同方向的思维的转移作用使思考对象增添新的意义;集中思维则是以某个思考对象为中心,从不同方向将思维指向这个中心,以达到解决问题的目的。创造活动,从思维过程来看,都是扩散思维与集中思维结合运用的结果。

F. 逻辑性。逻辑性就是思维的科学性。它是创造性思维的基础,要求在分析处理问题时,遵循一定的程序性、条理性和严谨性。

G. 反馈性。充分吸收各种反馈信息,不断修正和完善思考方案。

H. 预见性。预见性就是思维的超前性。要立足现实,着眼未来,不仅要把握事物的现状,而且要分析事物的发展趋势,展望事物的发展前景。

(3) 创造性方法与技巧

人们在具体的建模活动中,也总结出以下创造性解决问题的方法与技巧。

1) 智力激励法

采用小组会议方式,与会者围绕特定课题,每人提出自己的思考和设想,通过质疑和争论产生的互激效应,引发不同的思考和新的设想,达到集思广益。

2) 联想发明法

从一事物的表象、动作或词语联想到另一事物的表象、动作或词语,从而产生新的创造性设想。

3) 类比创造法

将研究对象同其他事物进行比较,从异中求同,同中求异,找出它们的类似之处,加以吸收