21世纪最新大学数学系列辅导丛书

线性代数复习与考研辅导

XIANXING DAISHU FUXI YU KAOYAN FUDAO

吴明鑫 穆瑞金 杨战民 编著

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n>i>j>1}(x_i - x_j)$$

国防工业出版社
National Defense Industry Press

21世纪最新大学数学系列辅导丛书

线性代数

复习与考研辅导

吴明鑫　穆瑞金　杨战民　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是按照“高等院校工科数学教材编写会议”确定的编写大纲和硕士研究生入学考试大纲，结合工科院校大学生学习线性代数课程的具体情况，并参照全国工科数学教学委员会新修定的“线性代数课程基本要求”而编写。本书对现行的《线性代数》教材中的每章内容作了简明扼要的归纳总结；精选的例题力求做到具有典型性、启发性和针对性。全书分为六章：行列式，矩阵及其运算，矩阵的初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性，相似矩阵及二次型，线性空间与线性变换。每章分为基本要求与基本内容，典型例题分析与解题思路总结，同济四版课后习题选解，历年考研题(线性代数部分)选解，综合习题及答案五部分。

本书可作为在校的大、中专学生线性代数课程的学习指导书，也可作为各专业的读者考研复习的参考资料，同时可供教师及工程技术人员参考及使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习与考研辅导 / 吴明鑫等编著 . —北京：国防工业出版社，2005.12

ISBN 7-118-04203-X

Ⅰ.线 ... Ⅱ.吴 ... Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 117880 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12 297 千字

2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册 定价：17.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

数学是科学技术的一个重要组成部分和思想库，数学素质是各类高层次人才必备的重要素质之一。线性代数作为数学中的重要组成部分，它是讨论代数学中线性关系经典理论的课程，它具有较强的抽象性与逻辑性，是高等学校理工科类、管理类各专业的一门重要的基础理论课。由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下，又可以转化为线性问题，因此线性代数中所介绍的方法广泛地应用于各个学科。

线性代数课程课时少、内容多、抽象性与逻辑性强，并且它的理论体系、思维方法和解题技巧自成体系，给读者的学习和掌握带来一定的困难。要想尽快地掌握该课程的规律，借助一本合适的学习辅导书是十分必要的。作者根据多年教授线性代数课程的经验和对历年硕士研究生入学考试题型的分析及学生在学习过程中反馈的信息，参照"高等院校工科数学教材编写会议"确定的线性代数编写大纲和硕士研究生入学考试大纲及全国工科数学教学委员会新修定的"线性代数课程基本要求"编写成书。通过对本书的学习，使读者能够全面掌握该课程的基本理论与基本方法，培养和提高解决实际问题的能力，并为学习相关课程及进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。

本书对现行的《线性代数》教材中的每章内容作了简明扼要的归纳总结；精选的例题力求做到具有典型性、启发性和针对性。本书(按同济大学第四版《线性代数》(简称同济四版)各章顺序)分为六章：行列式，矩阵及其运算，矩阵的初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性，相似矩阵及二次型，线性空间与线性变换。

本书各章体系特点如下：

1. 基本要求与基本内容：基本要求一目了然、简明扼要、目标清晰，基本内容提纲挈领、体系完善、内容全面；

2. 典型例题分析与解题思路总结：选题典型，解法灵活多变、技巧性强，题型多样，解题思路分析透彻、精练；

3. 同济四版课后习题选解：对课后难题作了详细解答，便于读者参考；

4. 历年考研题(线性代数部分)选解：按时间顺序汇编了 1987 年—2005 年的考研题及答案，并对 2004 年—2005 年考研题进行了详细的分析和解答，以供读者查阅；

5. 综合习题及答案：精选了一定数量的习题，供读者练习、自测。

本书可作为在校大、中专学生线性代数课程的学习指导书，也可作为各专业读者考研复习的参考资料，同时可供教师及工程技术人员参考及使用。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者及同行不吝赐教。

编 者

2005 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

一、基本要求与基本内容

1. 基本要求

(1)了解行列式的定义;掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开的方法;会计算简单的 n 阶行列式;

(2)了解克莱姆(Cramer)法则。

2. 基本内容

全排列　把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(称为排列),n 个不同元素的所有排列的种数用 P_n 表示。

逆序数　对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有 1 个逆序;一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。逆序数为奇(偶) 数的排列叫做奇(偶) 排列。

n 阶行列式的定义　设有n^2个数,排成 n 行n 列的数表,取表中位于不同行不同列的 n 个数作乘积:$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为数$1,2,\cdots,n$ 的排列,t 为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有 n!个,因而乘积共有 n!个。所有这些乘积的和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为n 阶行列式,记做 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,简记做 $\det(a_{ij})$。数 a_{ij} 称为 $\boldsymbol{D}$ 的元素。

对换　在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不变,这种作出新排列的过程叫做对换。将相邻两个元素对换,叫做相邻对换。

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性。

推论　奇排列调成标准排列对换次数为奇数,偶排列调成标准排列对换次数为偶数。

定理 2　n 阶行列式也可定义为$\boldsymbol{D}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$,其中 t 为排列$p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等。

性质 2　对调行列式的两行(列),行列式变号($r_i\leftrightarrow r_j$ 或 $c_i\leftrightarrow c_j$)。

性质 3　行列式的某一行(列) 中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式($r_i\times k$ 或 $c_i\times k$)。

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零。

性质 5 若行列式中某一行(列)的元素 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则此行列式可以分解为两个行列式的和

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)乘以常数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式值不变(r_i+kr_j 或 c_i+kc_j)。

代数余子式 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记做 $\boldsymbol{M}_{ij}$;记 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$,$\boldsymbol{A}_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

定理 3 **(行列式按行(列)展开法则)** 行列式等于它的任一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$\boldsymbol{D}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\boldsymbol{D}=a_{j1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{j2}\boldsymbol{A}_{j2}+\cdots+a_{jn}\boldsymbol{A}_{jn}(j=1,2,\cdots,n)$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn}=0,i\neq j \text{ 或 } a_{1i}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2i}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{A}_{nj}=0,i\neq j$$

含有 n 个未知数 n 个线性方程的方程组

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (*)$$

Cramer 法则 如果线性方程组(*)的系数行列式不等于零,即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么,方程组(*)有惟一解 $x_1=\dfrac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},x_2=\dfrac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\cdots,x_n=\dfrac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}}$

其中

$$\boldsymbol{D}_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 4 如果线性方程组(*)的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$,则(*)一定有解,且解是惟一的。

注 定理 4 的逆否定理:如果线性方程组(*)无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零。线性方程组(*)右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,线性方程组(*)叫做**非齐次线性方程组**,当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,线性方程组(*)叫做**齐次线性方程组**。

定理 5 如果齐次线性方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$,则齐次线性方程组没有非零解。

定理 5′ 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零(反之亦真)。

二、典型例题分析与解题思路总结

例 1-1 填空题。

(1) 由 1,2,…,9 构成的排列 $1274j56k9$ 为偶排列,则 $j =$ ______,$k =$ ______。

(2) 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为______。

(3) 如果 n 阶行列式中负项的个数为偶数,则 $n \geqslant$ ______。

(4) 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,x^3 项的系数是______。

(5) 设 α,β,γ 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} =$ ______。

答案 (1)$j = 8, k = 3$ (2)$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ (3)4 (4)-1 (5)0

【分析】 (1) 由题可知,j、k 的取值范围为$\{3,8\}$,当 $j = 3, k = 8$ 时,排列 127435689 的逆序数为 5,即为奇排列;当 $j = 8, k = 3$ 时,排列 127485639 的逆序数为 10,即为偶排列,故 $j = 8, k = 3$。

(2) 由行列式的定义可知,包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$,其中 i,j 为2,4或4,2,又该项的符号为负,所以 $i31j$ 为奇排列,从而 $i = 4, j = 2$。

(3) n 阶行列式中,共有 $n!$项,其中正、负项各占一半,若负项的个数为偶数,必有 $n \geqslant 4$。

(4) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘时才能出现 x^3 项,这时该项排列的逆序数为 $\tau(2134) = 1$,$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3$,故含 x^3 项的系数是 -1。

(5) 利用行列式性质及根与系数的关系有:$\alpha + \beta + \gamma = 0$,于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

例 1-2 单项选择题。

(1) 设 D 是5阶行列式,其中 $a_{12} = 0$,则 D 按定义的展开式中,等于零的项至少有( )项。

(A)4 (B)5 (C)24 (D)120

(2) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$,则 x^3 的系数为( )。

(A) $-(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$ (B)$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$

(C)$a_{11} + a_{22} + a_{44}$ (D) $-(a_{11} + a_{22} + a_{44})$

(3) 当 $\lambda =$ ( )时,齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + \lambda x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$有非零解?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$

(4) 对于非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$,以下结论中(　　)不正确。

(A) 若方程组有解,则系数行列式不等于零

(B) 若方程组有解,或者有惟一解,或者有无穷多解

(C) 若方程组无解,则系数行列式等于零

(D) 系数行列式不等于零是方程组有惟一解的充要条件

答案　(1) (C)　(2) (A)　(3) (C)　(4) (A)

【分析】　(1)5 阶行列式定义展开式中含有 $a_{12}=0$ 的项有 $a_{12}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$,其中 $p_2p_3p_4p_5$ 是 4 个数 1,3,4,5 的任一排列,不同的排列共有 $4!=24$,由于 $a_{12}=0$,故至少有 24 项等于零。

(2) 由行列式的定义可知,含 x^3 的项必须出现 3 个主对角线上的元素的积,因此第 4 个乘积因子也只能是剩余主对角元,即 x^3 只能出现在 4 个主对角元乘积的表达式中,由$(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$ 可知,x^3 的系数应该是 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$。

(3) 当系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$时,方程组有非零解,由此可得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$,故(C) 正确。

(4) 方程组有解,系数行列式不一定不等于零,故选(A)。

例 1-3　单项选择题。

(1) 下列各项中,(　　) 为 5 阶行列式中带正号的项。

(A)$a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$　(B)$a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$

(C)$a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$　(D)$a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$

(2) 设 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 为 n 阶行列式,则次对角线上元素的乘积 $a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$ 在行列式中的符号为(　　)。

(A) +　(B) −　(C)$(-1)^n$　(D)$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(3) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,$\boldsymbol{A}$ 中 3 个列向量以 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 表示,即 $|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)|$,则 $|\boldsymbol{A}|=$(　　)。

(A) $|(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1)|$　(B) $|(-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3)|$

(C) $|(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1)|$　(D) $|(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3)|$

(4) 行列式$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$(　　)。

(A)1000　(B) −1000　(C)2000　(D) −2000

答案　(1)D　(2)D　(3)D　(4)C

【分析】　(1)(A) 中有 2 个第 4 行的元素,(B) 中有 2 个第 1 列的元素,不是行列式的项,(C) 取负号,故只有(D) 正确。

(2) 因为 $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$,故(D)为正确答案。

(3) 利用行列式性质

$$|(A_3,A_2,A_1)|\overset{c_1\leftrightarrow c_3}{=}-|(A_1,A_2,A_3)|=-|A|,\ |(-A_1,-A_2,-A_3)|\underset{i=1,2,3}{\overset{c_i\div(-1)}{=}}-|(A_1,A_2,A_3)|=-|A|$$

$$|(A_1+A_2,A_2+A_3,A_3+A_1)|\underset{c_1+c_3}{\overset{c_1-c_2}{=}}|(2A_1,A_2+A_3,A_3+A_1)|\underset{c_3-c_1,c_2-c_3}{\overset{c_1\div 2}{=}}2|(A_1,A_2,A_3)|=2|A|$$

$$|(A_1,A_1+A_2,A_1+A_2+A_3)|\underset{c_2-c_1}{\overset{c_3-c_2}{=}}|(A_1,A_2,A_3)|=|A|$$

(4) 利用行列式性质

$$\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}\underset{c_3-2c_2}{\overset{c_1-c_2}{=}}\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}\overset{c_2-3c_1}{=}100\begin{vmatrix}3&-8&4\\-1&5&-5\\1&0&0\end{vmatrix}=2000$$

例 1-4 求下列排列逆序数,并确定它们的奇偶性。

(1)6372451 (2)53214 (3)$n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

答案 (1) $\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_7=0+1+0+3+2+2+6=14$,此排列为偶排列。

(2)$\tau(53214)=0+1+2+3+1=7$,此排列为奇排列。

(3)$\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

又由于$\dfrac{n(n-1)}{2}=\begin{cases}2k(4k-1) & n=4k\\2k(4k+1) & n=4k+1\\(2k+1)(4k+1) & n=4k+2\\(2k+1)(4k+3) & n=4k+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=4k\text{ 或 }4k+1 & \text{为偶排列}\\n=4k+2\text{ 或 }4k+3 & \text{为奇排列}\end{cases}$。

例 1-5 设排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 的逆序数为 k,求 $p_n\cdots p_3p_2p_1$ 的逆序数($p_1p_2p_3\cdots p_n$ 是 $1\sim n$ 的某一排列)。

解 因为排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 与排列 $p_n\cdots p_3p_2p_1$ 的逆序数之和等于 $1\sim n$ 这 n 个数中任取两个数的组合数,

即 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(p_np_{n-1}\cdots p_1)=c_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$,$\tau(p_np_{n-1}\cdots p_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-k$

例 1-6 计算:(1)$D=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\\4&1&3&-1\end{vmatrix}$ (2)$D=\begin{vmatrix}6&0&8&0\\5&-1&3&-2\\0&2&0&0\\1&0&4&-3\end{vmatrix}$

(3) $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$

解 (1) $D=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\\0&21&-9&11\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&-2&3\\0&1&1&1\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&2&-1&1\end{vmatrix}=$

$$(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&0&-3&-1\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&1&1&1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-\frac{11}{2}\end{vmatrix}=-55$$

(2) 按第 3 行展开 $D=0\cdot A_{31}+2\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}+0\cdot A_{34}=2\cdot$

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6&8&0\\5&3&-2\\1&4&-3\end{vmatrix}=-2\times 98=-196$$

(3) 增加一行一列变为范德蒙行列式 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}=$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)=$

$(x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots+abcd)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$

而 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}+$

$$x^2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}-x^3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}+x^4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$

故 $D=(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$。

例 1-7 计算下列行列式。

$$(1)\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n \qquad (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$$

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n \qquad (4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

【分析】 各行各列元素之和相等,一般情况①将第1,2,…,n 列(行)加到第1列(行)上;②零元素多时考虑采用行列式按行(列)展开法则;③将行列式的性质与按行(列)展开法则结合起来应用。

解

$$(1)\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1}y$$

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{(n-1)} = x^n + (-1)^{n+1}y^n$$

$$(2)\boldsymbol{I}_n = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 1 + \boldsymbol{I}_{n-1}$$

$$\boldsymbol{I}_{n-1} = 1 + \boldsymbol{I}_{n-2}, \cdots, \boldsymbol{I}_2 = 1 + \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_1 = 2, \boldsymbol{I}_n = n + 1$$

(3) 将 2,3,…,n 列都加到第 1 列上去

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{(i=2,3,\cdots,n)}{=}} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$-\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-2} =$$

$$-(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}$$

例 1-8 计算行列式。

$$(1)\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} (b_i \neq 0)$$

$$(2)\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$(3)\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$(4)\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 3 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

【分析】 (1) 采用加边法(升阶法)。

(2) 观察该行列式发现,每列元素都有相同的 $b_j(j=1,2,3,\cdots,n)$,每行元素都有相同的 $a_i(i=1,2,3,\cdots,n)$,故可通过加边法,利用“列倍加”、“行倍加” 的性质来化简行列式。

(3) 行列式第 1 行(或第 1 列) 有相同公因子 a_1,将第 1 列的公因子 a_1 提出后,从第 $j(j=2,3,\cdots,n)$ 列减去第 1 列的 a_j 倍,并令 $\lambda_{ij}=a_ib_j-a_jb_i,i,j=1,2,3,\cdots,n$,然后再将行列式按第 n 行展开,即可化为三角行列式。

(4) 递推法。

解

$$(1)\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}t & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n\end{vmatrix}=$$

$tb_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_n\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)$,其中 $t=1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$

$$(2)\boldsymbol{D}_n\overset{\text{加边}}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ -a_2 & a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_n & a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n\end{vmatrix}_{n+1}\overset{c_j+c_1}{\underset{j=2,3,\cdots,n+1}{=}}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & 1+b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ -a_2 & b_1 & 1+b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_n & b_1 & b_2 & \cdots & 1+b_n\end{vmatrix}_{n+1}\overset{\text{加边}}{=}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n\\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -a_1 & 1+b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & -a_2 & b_1 & 1+b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & -a_n & b_1 & b_2 & \cdots & 1+b_n\end{vmatrix}_{n+2}\overset{r_i+r_1}{\underset{i=3,\cdots,n+2}{=}}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n\\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{n+2}\overset{c_1-(c_3+c_4+\cdots+c_{n+2})}{\underset{c_2+(a_1c_3+a_2c_4+\cdots+a_nc_{n+2})}{=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} b_i & -\sum_{i=1}^{n} a_ib_i & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ -n & 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+2} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} b_i & -\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\ -n & 1+\sum_{i=1}^{n} a_i \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

$$(3)\boldsymbol{D} = a_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} \overset{c_j - a_jc_1}{\underset{j=2,3,\cdots,n}{=}} a_1\begin{vmatrix} b_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1n} \\ b_2 & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2n} \\ b_3 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1}a_1b_n\begin{vmatrix} \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \cdots & \lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_{i,i+1} =$$

$$(-1)^{n+1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)$$

$$(4)\boldsymbol{D}_n = n\boldsymbol{D}_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1)! = n[(n-1)\boldsymbol{D}_{n-2} + (-1)^{(n-1)+1}(n-1-1)!] +$$

$$(-1)^{n+1}(n-1)! = n(n-1)\boldsymbol{D}_{n-2} + (-1)^n\frac{n!}{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n} = \cdots =$$

$$n(n-1)\cdots 3\cdot\boldsymbol{D}_2 + (-1)^4\frac{n!}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n}$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = (-1)^2\cdot 2 + (-1)^3\cdot 1, \boldsymbol{D}_n = (n!)\left[\frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} + \frac{(-1)^4}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$$

例 1-9 计算行列式。

$$(1)\boldsymbol{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ a_3^n & a_3^{n-1}b_3 & a_3^{n-2}b_3^2 & \cdots & a_3b_3^{n-1} & b_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$，其中 $a_ib_i \neq 0(i=1,2,$

$\cdots,n+1)$

$$(2)\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_{n-1}^{n-2}&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_{n-1}^n&x_n^n\end{vmatrix}$$

【分析】 (1)这是一个变形的范德蒙行列式,只要从第 $i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 行提出公因式 a_i^n,即可成为范德蒙行列式。

(2)注意到 D_n 与范德蒙行列式十分接近,只要在第 $n-1$ 行与第 n 行之间适当增加一行,再加上列便构成范德蒙行列式。

解 (1)$\boldsymbol{D}_{n+1}=a_1^na_2^na_3^n\cdots a_{n+1}^n$

$$\begin{vmatrix}1&(b_1/a_1)&(b_1/a_1)^2&\cdots&(b_1/a_1)^{n-1}&(b_1/a_1)^n\\1&(b_2/a_2)&(b_2/a_2)^2&\cdots&(b_2/a_2)^{n-1}&(b_2/a_2)^n\\1&(b_3/a_3)&(b_3/a_3)^2&\cdots&(b_3/a_3)^{n-1}&(b_3/a_3)^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&(b_{n+1}/a_{n+1})&(b_{n+1}/a_{n+1})^2&\cdots&(b_{n+1}/a_{n+1})^{n-1}&(b_{n+1}/a_{n+1})^n\end{vmatrix}=$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}[(b_i/a_i)-(b_j/a_j)]$$

$$(2)\text{设 } f_{n+1}(x)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n&x\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2&x_n^2&x^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_{n-1}^{n-2}&x_n^{n-2}&x^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}&x_n^{n-1}&x^{n-1}\\x_1^n&x_2^{n-2}&\cdots&x_{n-1}^n&x_n^n&x^n\end{vmatrix}$$

则 $f_{n+1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$

由于行列式 $\boldsymbol{D}_n$ 恰好是行列式 $f_{n+1}(x)$ 的元素 x^{n-1} 的余子式 $\boldsymbol{M}_{n,n+1}$,即

$$\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{M}_{n,n+1}=-\boldsymbol{A}_{n,n+1}$$

而由 $f_{n+1}(x)$ 的表达式知 x^{n-1} 的系数为 $\boldsymbol{A}_{n,n+1}=-(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$

故 $\boldsymbol{D}_n=-\boldsymbol{A}_{n,n+1}=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$。

例 1-10 计算下列行列式。