武漢大学

国庆三十周年学术报告会

论文摘要

（数学部分）

科学研究处

一九七九年十二月

目　录

右半平面或单位圆盘内的零级解析函数及随机解析函数

余 家 荣

考虑指数级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

其中 $\{a_n\}$ 是复数序列，$s=\sigma+it$，σ 及 t 是实变数，$0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$。设

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log n}{\lambda_n}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}=0. \tag{2}$$

那么 $f(s)$ 在左半平面 $\sigma>0$ 内解析。

令

$$M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|(\sigma>0), \tag{3}$$

数量

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log} M(\sigma)}{-\log\sigma} \tag{4}$$

称为 $f(s)$ 在 $\sigma>0$ 内的 (R) 级，在 $\rho=0$ 时，如果

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{n}{\log\lambda_n}<+\infty, \tag{5}$$

我们有

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\log M(\sigma)}{-\log\sigma}=k>0\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n|}{\log\lambda_n}=h>0. \tag{6}$$

在条件(2)，(5)及

$$D^* = \inf_{q>0} \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{N((x+1)q)-N(xq)}{q} < +\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\lambda_{n+}-\lambda_n)}{\log \lambda_n} > -\infty \tag{8}$$

下，这里 $N(x)$ 表示小于 x（>0）的 λ_n 的个数；如果 $\overline{\lim_{\sigma\to+0}} \frac{\log M(\sigma)}{-\log \sigma} = k > B$，那么对于任何 t_1 及 $t_2(t_2-t_1>2\pi D^*)$，我们有 $\overline{\lim_{\sigma\to+0}} \frac{\log M(\varrho;t_1,t_2)}{-\log \sigma} \geqslant k-B$，这里

$$M(\sigma;t_1,t_2) = \max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} |f(\sigma+it)| (\sigma>0) \tag{9}$$

由上述结果可推导出以单位园为收敛园的缺项幂级数有关增长性的结果，以及有关单位园上 J. Hadamard 奇异级的结果。

对于随机级数及随机缺项幂级数，也得到了相应的结果。

只在半平面内收敛的指数级数的增长性及值的分布*

余 家 荣

1. 考虑指数级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad (1)$$

其中$\{a_n\}$为复数序列，$s=\sigma+it$，σ 及 t 为实变数，$0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow\infty$。假定

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}=0. \qquad (2)$$

那么级数(1)的收敛坐标及收敛横坐标为0，并且它确定在 $\sigma>0$ 内的解析函数 $f(s)$。令

$$M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|f(\sigma+it)| \ (\sigma>0). \qquad (3)$$

数量

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\frac{\log\log M(\sigma)}{-\log\sigma} \qquad (4)$$

称为 $f(s)$ 在 $\sigma>0$ 内的 (R) 级。我们也可仿照 G. Valiron 及熊庆来定义$(R-V)$级（准确级）及$(R-H)$级，并求得 $f(s)$ 的级与级数(1)的系数及指数之间的关系（参看[1]）。

2. 我们推广了 J. M. Anderson 和 K. G. Binmose[2]的一个结果。设

$$D^*=\inf_{q>0}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{N((x+1)q)-N(xq)}{q}<+\infty, \qquad (5)$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\log(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\log\lambda_k}>-\infty. \qquad (6)$$

* 本文发表在法国科学院周报 A 类(C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A)288(1979), 891—893.

如果(2)，(5)及(6)成立，那么 $\forall \varepsilon>0$，$\forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$，并且 $\forall \sigma>0$，我们有

$$|a_n| \leqslant A\lambda_n^B M_S(\sigma) e^{\lambda_n \sigma} (n=1, 2, \cdots), \tag{7}$$

其中 $S=S(t_0, \pi D^*+\varepsilon)$ 表示半带形 $\{s \mid \sigma>0, |t-t_0| \leqslant \pi D^*+\varepsilon\}$，$A$ 及 B 是与 ε 无关的常数，

$$M_S(\sigma)=\max_{|t-t_0|<\pi D^*+\varepsilon} |f(\sigma+it)|. \tag{8}$$

在 $f(s)$ 的各种级的定义中，用 $M_S(\sigma)$ 代替 $M(\sigma)$，就得到 $f(s)$ 在 S 中的相应级的定义。在条件(2)，(5)及(6)下，$\forall \varepsilon>0$，$\forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$ $f(s)$ 在 $S(t_0, \pi D^*+\varepsilon)$ 中的(R)级、$(R-V)$级或$(R-H)$级，分别与它在 $\sigma>0$ 中的这些级相同。

3. 如果(2)，(5)及(6)成立，并且级数(1)的系数满足一定的条件，那么在 $\sigma=0$ 的任何长度大于 $2\pi D^*$ 的区间内，$f(s)$ 分别有一Picard 点或 Borel 点。

参 考 文 献

[1] 余家荣，数学学报，21(1978)，97—117.

[2] J. M. Anderson and K. G. Binmore, Proc. London Math. Soc., (3)18(1968) 49—68.

关于具解析核的奇异积分方程

路 见 可

这是一篇综合报告，阐述了核 $K(t,\tau)$ 与系数 $a(t)$ 为解析函数时奇异积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t)$$

的有效解法。首先介绍了 A. S. Peters 的工作以及其他人继续的工作，特别介绍了本人改进并完善了前人的工作。另一方面，又介绍了 C. Г. Самко 从另一角度解决此问题的方法以及与此有关的工作。最后又介绍了核为自守函数时的解法。特别详细介绍了单周期核和双周期核时解的构造性形式，包括 L 为封闭或开口的情况。文中还介绍了其他有关的一些工作。

开口弧段的双周期Riemann边值问题

路　见　可

本文考虑了双周期 Riemann 边值问题

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\qquad t\in L,$$

其中 L 是一组周期合同的开口弧段，$G(t)\neq 0$，$g(t)$ 已给于 L 上、H 连续且双周期，而 $\Phi(z)$ 是未知的双周期解析函数，$\Phi^{\pm}(t)$ 是它在 L 两侧的边值。此问题用有效的方法完全解决，且解与可解条件都写成了显式。又将结果应用于求解下列类型的奇异积分方程：

$$A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_{L_0}\varphi(\tau)[\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\,d\tau=f(t)$$

或

$$A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_{L_0}\varphi(\tau)\zeta(\tau-t)\,d\tau=f(t),$$

其中 ζ 为 Weierstrass 的 ζ 函数，L_0 为 L 在基本周期四边形中的那一弧段。L_0 的两端周期合同时的情况也考虑了，并类似地得到完全解决。

关于线性微分方程单值解的增长性

肖　修　治

G. Valiron 证明，若微分方程

$$P_p(Z)y^{(p)}+P_{p-1}(Z)y^{(p-1)}+\cdots+P_0(Z)y+P_{-1}(Z)=0$$

中的系数 $P_i(Z)(-1\leqslant i\leqslant p)$ 为 Z 的多项式，则它的整函数解为有穷有理级，并且是完全正规增长的

M. Frei 证明，线性方程

$$w^{(n)}+a_{n-1}(Z)w^{(n-1)}+\cdots+a_1(Z)w'+a_0(Z)w=0$$

中的系数 $a_i(Z)(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 至少有一个为超越整函数时，则其通解的级为无穷；若 $a_p(Z)$ 为 $a_0(Z)$ 至 $a_{n-1}(Z)$ 的最后一个超越函数，则至多有 p 个线性无关的有穷级特解，这个结果可看作是 G. Valiron 的结果的逆。

我们考虑的是线性方程

$$a_n(Z)w^{(n)}+a_{n-1}(Z)w^{(n-1)}+\cdots+a_1(Z)w'+a_0(Z)w=0$$

的亚纯函数解的情形，其中 $a_i(Z)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 为整函数（包括多项式），获得以下两个结果：

1． 若 $a_i(Z)(0\leqslant i\leqslant n)$ 全为多项式，$a_p(Z)$ 非常数且为满足条件

$$(\alpha)\qquad \lim_{r\to\infty}[m(r,a_p)/m(r,a_{p+j})]>1\qquad(1\leqslant j\leqslant n-p)$$

的第一个系数，则其单值通解为超越的亚纯函数，且至多有 p 个线性独立的有理函数特解。

2． 系数 $a_i(Z)(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中至少有一个为超越整函数，$a_p(Z)$ 为满足条件

$$(\beta)\qquad \varliminf_{r\to\infty}\left[m(r,a_p)\Big/\sum_{j=p+1}^{n}m(r,a_j)\right]>1$$

的第一个系数，则其亚纯通解满足条件

$$(\gamma)\qquad \varliminf_{r\to\infty,\,r\bar{\in}I}[\log T(r,w)/m(r,a_p)]>0,$$（I 为某个线测度为有穷的区间序列）

且至多有 p 个线性无关的，满足条件

$$(\delta) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty,\, r \bar{\in} I}} \left[\log T(r, w)/m(r, a_p)\right] = 0$$

的亚纯函数特解

后一结果不仅包含了 M. Frei 的结果，而且更精密些。例如方程

$$w^{(n)} + ze^{z}w^{(n-1)} + a_{n-2}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_1(z)w' + e^{3z}w = 0,$$

其中 $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_{n-2}(z)$ 为多项式，按 M. Frei 的结果，有至多 $n-1$ 个有穷级整函数特解。根据我们的结果，此方程任一整函数特解的级都为无穷。

我们用的主要方法是函数增长性的估计及常微分方程降阶后系数的估计。

随机调控分枝过程的矩及绝灭概率

胡 迪 鹤

设 R^d 是 d 维欧氏空间，X 是 R^d 的 Borel 子集，E^d 是R^d中全体 Borel 子集构成的 σ 代数，$\mathrm{B}^d(X)=\{A|A\in\mathrm{B}^d, A\subset X\}$. $T=[0,\infty)$或 N, $N=\{0,1,2,\cdots\}$.

任取 $f: X\to R^1$, 称$\{x|x\in X, f(x)\neq 0\}$为 f 的支集，记之为 $S_u(f)$. 记

$E=\{f|f: X\to N, S_u(f)$是有限集$\}$,

$$\mu_f(A)=\sum_{x\in A\cap S_u(f)} f(x),\ (f\in E, A\in \mathrm{B}^d(X)), \tag{1}$$

$$\rho(f,g)=\mu_{|f-g|}(X)=\sum_{x\in S_u(f-g)}|f(x)-g(x)|,(f,g\in E), \tag{2}$$

$\Gamma=\{\mu_f|f\in E, \mu_f$ 由(1)定义$\}$.

对任何正整数 n，任何非负整数 $r_1,\cdots,r_n$，任何 $A_1,\cdots,A_n\in B^d(X)$，称 $\{f|f\in E, \mu_f(A_i)=r_i, i=1,\cdots,n\}$为 μ 柱集. 全体 μ 柱集用 L 表之，由 L 所产生的 σ 代数用 E 表之. 遂得可测空间(E,E)，令

$$H=\{h|h: X\to R^1, h\in\mathrm{B}^d(X)\}, H_+=\{h|h\geqslant 0, h\in H\},$$

称$\int_X h(x)\mu_f(dx)$为 h 与 f 之半内积，记为$\langle h,f\rangle$，其中 $f\in E$, $h\in H$.

设 $P(s,f,t,\wedge)$为(E,ε) 上之转移函数，$\Phi(s,ft,h)=\int_E P(s,f,t,dg)e^{-\langle h,g\rangle}$ 为 P 之矩母泛函 ($s\leqslant t$, $s,t\in T$, $f\in E$, $h\in H_+$). $I_A(x)$ 表 A 上之示性函数，简记 $P(s,I_{\{x\}},t,\wedge)=P(s,x,t,\wedge)$, $\Phi(s,I_{\{x\}},t,h)=\Phi(s,x,t,h)$. 记 $\nu_1*\nu_2$ 为测度 ν_1 与 ν_2 之卷积，简记$\overbrace{\nu_1*\cdots*\nu_k}^{k}$为 $\mathop{*}\limits_{i=1}^{k}\nu_i$, $\overbrace{\nu*\cdots*\nu}^{k}$ 为 ν^{k*}. 定义 $\nu^{0*}(\wedge)=I_\wedge(\theta)$, θ 表 E 中之恒零函数。

设 $\bar{P}(s,f,t,\wedge)$是(E,ε)上的转移函数，如果对一切 $s\leqslant t$, $s,t\in T$, $f\in E$, $\wedge\in\varepsilon$，有

$$\bar{P}(s,f,\wedge)=\begin{cases} I_\wedge(\theta), & \text{当 } f=\theta,\\ \mathop{*}\limits_{x\in S_u(f)}\bar{P}(s,x,t,\wedge)^{f(x)*}, & \text{当 } f\neq\theta, \end{cases}$$

则称 $\bar{P}(s,f,t,\wedge)$是分枝转移函数.

若 $T=\boldsymbol{N}$，$\varphi(s, x, n)(s\in T, x\in X, n\in \boldsymbol{N})$ 是非负整值随机变量，分布为 $\{p_k(s, x, n), k\geq 0\}$，$\bar{P}(s, f, t, \wedge)$是分枝转移函数，如果转移函数 $P(s, f, t, \wedge)$满足

$$P(s, f, s+1, \wedge)=\begin{cases} I_{\wedge}(\theta) \\ \underset{x\in S_u(f)}{*} \sum_{k\in N} p_k(s, x, f(x))\bar{P}(s, x, s+1, \wedge)^{k*}, \end{cases}$$

则称 $P(s, f, t, \wedge)$是 p（或者 φ）调控分枝转移函数，p 称为其调控分布，φ 称为其调控函数。显然，分枝转移函数是 p 调控分枝转移函数的特例，其调控分布满足 $p_n(s, x, n)\equiv 1$。$\bar{P}(s, f, t, \wedge)$称为 $P(s, f, t, \wedge)$的原始转移函数。

设 $\{\eta_t: \epsilon=0, 1, 2, \cdots\}$是以$(E, \varepsilon)$为状态空间且具有转移函数 $P(s, f, t, \wedge)$ 的马氏过程，若 $P(s, f, t, \wedge)$是 p 调控分枝转移函数，则称 $\{\eta_t\}$ 是 p 调控分枝过程。特别地，若 $P(s, f, t, \wedge)$是时齐的，则称$\{\eta_t\}$是时齐的 p 调控分枝过程，这时，记 $P(u, f, \wedge)=P(s, f, s+u, \wedge)$。

本文研究了 p 调控分枝过程的各阶矩及绝灭概率。

关于多元分析中统计量的分布

张尧庭　　倪国熙

多元统计分析是数理统计中研究多指标统计问题的一个重要分支。多元统计量的分布是多元分析理论赖以建立和发展的基础之一，多元分布中的许多困难问题，是和概率密度函数的计算相联系的。因此，多元分布问题受到了足够的重视。这里，就我们所掌握的资料，对一些重要的统计量的分布问题的进展情况，作一粗略的介绍。重点是精确分布问题。限于水平，肯定有疏漏之处，欢迎批评指正。

假定在每一个样品上测得 p 个指标，一个样品就相应于 R_p(p 维欧氏空间)中的一个点（或向量）$\underset{p\times 1}{x}$，n 个独立样品就是 n 个向量 x_1，…，x_n。用矩阵来表示，记为

$$\underset{p\times n}{X}=(x_1x_2\cdots x_n).$$

很明显，多元统计问题中涉及的统计量就是上述矩阵 X 的函数。因此，这类统计量就必然与矩阵的特定函数，如行列式、特征根、迹……等等有关。寻求它们的分布，就成了多元分析中的一个重要课题。

在本世纪初，K. Pearson 得到了多元正态分布的密度，这使得研究多元统计问题有了一个基础。从20年代末到40年代初，这十几年是多元分析发展极为迅速的时期。为了解决各种各样的假设检验问题，必须求出相应的检验中涉及的统计量的分布。1928年，J Wishart 导出了多元正态样本协差阵的联合分布——著名的 Wishart 分布；1931年，H. Hotelling 提出了检验均值向量是否相等的 T^2 统计量，并导出了 T^2 的中心分布；1936年，P. C. Mahalanobis 提出了马氏距离，用 T^2 来检验两总体的均值向量是否相等；R. A. Fisher 从1915年开始，发表了一系列关于多元正态总体样本相关系数的分布文章；……这些文献标志着多元分析确实已形成为一个分支。

多元统计量的分布，有些是一元情形的很自然的推广，有些则比一元情形要困难得多。在此，我们先列一个表，把可以比较的统计量进行对比：

从表上很容易看出：左边的这些分布都是大家所熟知的，差不多每一本实用的书上都附有表；而右边的这些分布，情况就不同了。

以 W 分布（即 XX' 的分布）为例。中心的 W 分布在 1928 年就已经得到，后来不断有人研究用各种新方法来导出它。Wishart(1928)用的是几何方法；P. C. Mahalanobis；R. C. Bose 与 S. N. Roy(1937)用的也是几何方法，但证法略有不同；Wishart 与 Bartlett(1932)与 Ingham(1933)用的是特征函数反演方法；Bartlett(1933)用著名的 Bartlett 分解；以后，Madow(1938)，Hsu(1939)，Sverdrup(1947)，Rasch(1948)都用其它方法导出了 W 分布，就不在此一一举出。但是，非中心 W 分布却长期未得到真正解决，直到

一　　元	多　　元
一元正态	多元正态
样本的均值	样本均值向量的联合分布
样本的方差	样本协差阵的联合分布
中心 χ^2-分布	中心 W-分布
非中心 χ^2-分布	非中心 W-分布
t 统计量	T^2 统计量
中心 t 分布	中心 T^2-分布
非中心 t-分布	非中心 T^2-分布
F 统计量	Λ 统计量
中心 F-分布	中心 Λ-分布
非中心 F-分布	非中心 Λ-分布

60年代末，70年代初期，A. T. James 利用带形多项式，才将非中心 W 分布的密数表示成无穷级数的形式。又如与 F 分布相应的 Wilks 统计量 Λ（或记为 U），它的形式是

$$U=\frac{|XX'|}{|XX'+YY'|},$$

其中 $\underset{p\times n}{X}=(x_1x_2\cdots x_n)$ $\underset{p\times m}{Y}=(y_1y_2\cdots y_m)$，并且 y_1，$\cdots y_m$ 独立同分布 $N(0,I_p,)$，x_1，$\cdots$，x_n 独立，x_1 遵从 $N(a_i,\ I_p)$，$i=1$，$\cdots n$，$\{x_i\}$与$\{y_i\}$相互独立。当 $a_1=\cdots=a_n=0$ 时，就是中心 Λ 分布。当 $a_i\neq0$ 时，就是非中心 Λ 分布。它的中心分布直到 1966 年才由 M. Schatzoff 求出，现在已有人做成了表。对非中心 Λ 分布，A. K. Gupta(1971)对线性情形（即均值矩阵秩为 1 ）给出了精确表示，M. Tretter 和 Walster(1975)给了另一种计算结果为一致的表示。还有一些统计量，如相关系数，典型相关变量的相关系数等等，它们无法与一元统计问题中的统计相对应，因此这些统计量的分布就完全是多元分析的问题。

寻求多元统计量的精确分布的困难，不仅由于多元问题的形式比较复杂，更重要的是因为多元问题有本质上的不同。这从下面几节的介绍中可以逐步看出。

系统地提到多元统计量分布的书，我们认为有以下三本可以作为代表：

1. T. W. Anderson (1958) 的《Intrcduction to Multivariate Staristical Analysis》。
2. 伊藤孝一(1969)的《多变量解析 の理论》
3. R. H. Farrell(1976)的《Techniques of Multivariate Calculation》

前两本书总结了50年代以前发展起来的一些求统计量分布的方法。第二本书比第一本更为系统，作者用两章篇幅及篇幅更长的两个附录专门讨论了分布问题。但是，在50年代中期发展起来的，在60年代取得了显著成效的一些方法，在这两本书里都没有反映。第三本书正不足，它着重于系统介绍50年代以后发展起来的一些方法。我们介绍的材料，大都选自这三好弥补了这个本书以及 Ann of Statist 杂志。

自然正交分解在天气预报中的应用

肖佑恩　康立山等

长期以来统计学的天气预告方法，基本上是以利用单站的气象要素为基础的。本文采用自然正交展开气象要素场的新方法，取提整个场的序列所含的重要信息进行天气预告。关于这方面的数学理论分析我们已在另文中（参看：康立山、肖佑恩"病态线性方程组及其解法"，1979，10。武汉大学国庆三十周年论文）作了详细研究。本文从两个方面对我省中短期灾害性（暴雨）天气预告作了数值试验：

1. 用自然正交展开法将五次700毫巴连续暴雨场（1962年7月2日—8日；1968年7月12日—20日；1969年7月1日—17日；1973年6月18日—24日）展开，找出连暴场主要信息，并探索这些主要场在连暴期内的变化规律；

2. 用自然正交展开法对暴雨开始前3—5天的700毫巴高度场进行展开（对大范围高度场，我们试验了分块展开法），找出暴雨形成前3—5天的天气形势的重要信息，并用它做暴雨预告。

在X—1机上的计算实验表明，采用Jacobi方法求出满矩阵42×42的全部特征值与特征向量包括打印中间信息需计算机时间12分钟；计算75×75矩阵需计算机时间3小时左右。因此采用这种计算方法进行灾害性天气预告是可行的。文中给出了部分计算结果的图、表。

（参加这一工作的还有湖北省气象局林杏奇、杨景勋、王业武同志。）

关于完全群的一个定理

张远达

当群 G 之中心 $Z(G)=1$，且其自同构群 $A(G)$ 与内自同构群 $I(G)$ 一致时，就叫 G 为完全群。众所周知：若完全群 G 是群 T 之正规子群时，则 G 必为 T 的直因子[1]。但其逆定理若何？迄今尚未见诸于世。本文就想解决这个逆定理，但要加一限制，即 G 为有限群，说具体些，就是要解决次。

定理 *任何群 T 只要含有限群 G 为正规子群时就必有 G 为其一直因子，那末 G 必为完全群。*

参考文献

[1] M. Hall, Theory of Groups, 1959, Macmillan Company, New York (p. 87, Th. 6. 4. 1)

椭圆型方程组的变分解法

李 清 溪

组合型扭壳是由四块直纹面构成的扁壳，是现代建筑中常用的壳型结构，它的内加分析和变形研究，归结为一组高阶椭圆型方程的边值问题。由于在扭壳的每两块联结处（称为脊线）发生间断，因而存在复杂的衔接条件。如果直接考虑该定解问题是十分困难的。本文采用变分方法，从理论上研究可解性问题。

在坐标系 $oxyz$ 中，假设四块组合型扭壳在 oxy 平面上投影为区域 Ω： $o\leqslant x\leqslant 2a$， $o\leqslant y\leqslant 2b$。那么应力函数和挠度满足

（1）偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2K_{xy}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-q_z=0 \\ \dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}-2K_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \end{cases}$$

（2）边值条件

$$\begin{cases} w\Big|_{\partial\Omega}=\Delta w\Big|_{\partial\Omega}=0 \\ \varphi\Big|_{\partial\Omega}=\Delta\varphi\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

（3）衔接条件

在 $x=a$ 处：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{a-0}^{a+0}=\delta\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_{x=a} \\ \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\Big|_{a-0}^{a+0}=-\delta\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{x=a} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{a-0}^{a+0}=0, \qquad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\Big|_{a-0}^{a+0}=0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0, \dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \end{cases}$$

在 $y=b$ 处也有类似的衔接条件。

令 K 为某确定的函数组成的集合，则下述混合变分原理成立。

混合变分原理 偏微分方程组定解问题（1）—（3）的解 $w_0(x,y),\varphi_0(x,y)$，一定是在函数集合 $K\times K$ 中，使泛函数 $\pi(w,\varphi)$ 对 w 取极小，对 φ 取极大；反之，在集合 $K\times K$ 中，使泛函数 π 对 w 达到极小，对 φ 达到极大的函数 $w=w_0(x,y)\varphi_0(x,y)$，一定是问题（1）—（3）的解。

应用上面的混合变分原理，容易证明定解问题（1）—（3）的解是唯一的，并且可以找到它的近似解。