

国家工科数学课程教学基地系列教材

微 积 分

下 册

电子科技大学应用数学学院

傅英定 谢云荪 主编

高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地系列教材

微 积 分

下 册

电子科技大学应用数学学院

傅英定 谢云荪 主编

高等教育出版社

内容简介

本书是我校“九五”规划特色教材及“十五”规划精品教材之一,也是我校“国家工科数学课程教学基地”系列教材之一。本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》和科技人才对数学素质的要求,本着面向 21 世纪深化课程体系与教学内容改革的精神,吸收国内外相关教材的长处编写的。其主要特点是:注重课程体系结构与教学内容的整体优化;重视基础,突出数学思想与方法,着力于数学素质与能力的培养;充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力;注重教学适用性。

本书分上、下两册。上册包括极限理论、一元微积分与常微分方程;下册包括多元函数微积分与无穷级数。每节后配有习题及思考题,每章后配有复习题,书末附有习题答案。

本书结构严谨、论证简明、叙述清晰、例题典型、便于教学。可作为高等工科院校的教材或参考书,也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/傅英定,谢云荪主编. —北京:高等教育出版社,2003.8

ISBN 7-04-011947-1

I. 微... II. ①傅...②谢... III. 微积分—高等学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037488 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京中科印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2003 年 8 月第 1 版
印 张	20.25	印 次	2003 年 8 月第 1 次印刷
字 数	380 000	定 价	21.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

策划编辑	李艳馥
责任编辑	李陶
封面设计	于涛
责任绘图	尹文军
版式设计	陆瑞红
责任校对	康晓燕
责任印制	宋克学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目 录

第五章 多元函数微分学	1
§ 5.1 多元函数	1
一、邻域	1
二、开集与闭集	1
三、区域	2
四、多元函数的概念	4
五、等值线	5
六、多元函数的极限	5
七、多元函数的连续性	8
思考题 5.1	9
习题 5.1	10
§ 5.2 偏导数	11
一、偏导数的概念	11
二、函数的偏导数与函数连续性的关系	14
三、偏导数的几何意义	14
四、高阶偏导数	15
思考题 5.2	17
习题 5.2	17
§ 5.3 全微分及其应用	18
一、全微分的概念	18
二、可微的性质	19
三、可微的充分条件	21
四、全微分在近似计算中的应用	22
思考题 5.3	25
习题 5.3	26
§ 5.4 多元复合函数的求导法则	27
一、复合函数求导的链式法则	27
二、一阶全微分形式的不变性	31
三、复合函数的高阶偏导数	32
思考题 5.4	34

习题 5.4	35
§ 5.5 隐函数求导法	36
一、一个方程的情形	37
二、方程组的情形	41
思考题 5.5	44
习题 5.5	45
§ 5.6 偏导数在几何上的应用	46
一、空间曲线的切线和法平面	46
二、空间曲面的切平面和法线	49
思考题 5.6	53
习题 5.6	53
§ 5.7 方向导数与梯度	54
一、方向导数	54
二、梯度	57
思考题 5.7	60
习题 5.7	60
§ 5.8 二元函数的泰勒公式	61
习题 5.8	64
§ 5.9 多元函数的极值与最大(小)值	64
一、无条件极值	64
二、有界闭区域上的最大值与最小值	68
三、条件极值 拉格朗日乘数法	70
思考题 5.9	75
习题 5.9	75
§ 5.10 应用实例	76
实例一 拐角问题模型	76
实例二 最优价格模型	77
复习题五	79
第六章 多元数量值函数积分学	81
§ 6.1 多元数量值函数积分的概念与性质	81
一、引例 非均匀物体的质量问题	81
二、多元数量值函数积分的概念	83
三、多元数量值函数积分的性质	85
思考题 6.1	86
习题 6.1	87

§ 6.2 二重积分的计算	87
一、二重积分的几何意义	88
二、在直角坐标系下计算二重积分	89
三、在极坐标系下计算二重积分	96
四、二重积分的换元法	101
思考题 6.2	103
习题 6.2	104
§ 6.3 三重积分的计算	106
一、在直角坐标系下计算三重积分	106
二、在柱面坐标系下计算三重积分	111
三、在球面坐标系下计算三重积分	114
四、三重积分的换元法	116
思考题 6.3	118
习题 6.3	118
§ 6.4 第一类曲线积分的计算	120
一、曲线的弧长	120
二、第一类曲线积分的计算	123
思考题 6.4	126
习题 6.4	127
§ 6.5 第一类曲面积分的计算	127
一、曲面的面积	128
二、第一类曲面积分的计算	131
思考题 6.5	136
习题 6.5	136
§ 6.6 积分在物理上的应用	137
一、重心	137
二、转动惯量	139
三、引力	141
思考题 6.6	144
习题 6.6	144
§ 6.7 含参变量的积分	145
一、有限区间上含参变量的积分	145
二、含参变量广义积分	148
习题 6.7	149
§ 6.8 应用实例	150

实例 通讯卫星的电波覆盖地球表面的面积	150
复习题六	152
第七章 多元向量值函数积分学	154
§ 7.1 第二类曲线积分	154
一、有向曲线	154
二、引例	155
三、第二类曲线积分的概念与性质	156
四、第二类曲线积分的计算	157
五、第二类曲线积分的应用	160
思考题 7.1	162
习题 7.1	162
§ 7.2 第二类曲面积分	163
一、有向曲面(曲面的侧)	163
二、引例	165
三、第二类曲面积分的概念与性质	166
四、第二类曲面积分的计算	167
五、第二类曲面积分的应用	172
思考题 7.2	173
习题 7.2	174
§ 7.3 微积分基本定理的推广	175
一、格林公式	175
二、高斯公式	180
三、斯托克斯公式	183
四、微积分基本定理的统一公式	187
思考题 7.3	191
习题 7.3	192
§ 7.4 曲线积分与路径的无关性	193
一、曲线积分与路径无关的条件	193
二、全微分方程	202
思考题 7.4	204
习题 7.4	204
§ 7.5 场论初步	205
一、场的概念	205
二、通量与散度	206
三、环流量与旋度	208

四、保守场与势函数	209
思考题 7.5	210
习题 7.5	210
复习题七	211
第八章 无穷级数	214
§ 8.1 常数项级数的概念与性质	214
一、常数项级数的概念	214
二、常数项级数的性质	218
三、级数收敛的必要条件	221
思考题 8.1	222
习题 8.1	222
§ 8.2 常数项级数的判别法	223
一、正项级数的判别法	223
二、交错级数的判别法	232
三、绝对收敛与条件收敛	235
思考题 8.2	238
习题 8.2	238
§ 8.3 幂级数	239
一、函数项级数的一般概念	239
二、幂级数及其收敛区间	241
三、幂级数的运算	245
思考题 8.3	249
习题 8.3	250
§ 8.4 函数展开成幂级数	250
一、泰勒级数	250
二、函数展开成幂级数	253
思考题 8.4	259
习题 8.4	259
§ 8.5 幂级数的应用	260
一、用幂级数表示函数	260
二、欧拉公式	260
* 三、微分方程的幂级数解	262
习题 8.5	265
§ 8.6 傅里叶级数	265
一、三角级数	265

二、三角函数系的正交性	266
三、欧拉-傅里叶系数公式	267
四、傅里叶级数的收敛问题	268
思考题 8.6	273
习题 8.6	273
§ 8.7 正弦级数与余弦级数	274
一、奇偶函数的傅里叶级数	274
二、函数展开成正弦级数与余弦级数	276
思考题 8.7	278
习题 8.7	278
§ 8.8 任意周期函数的傅里叶级数	279
一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	279
* 二、傅里叶级数的复数形式	283
* 三、傅里叶积分	286
习题 8.8	288
§ 8.9 应用实例	289
实例 银行存款问题	289
复习题八	291
习题答案	293
参考书目	314

第五章 多元函数微分学

前面我们研究了一元函数微积分及其应用.在自然科学与工程技术问题中,常常涉及多方面的因素,反映到数学上,就是多元函数的问题.从本章开始我们研究多元函数微积分及其应用.它是在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的极限、连续,并重点研究偏导数、全微分及它们的一些简单应用.多元函数是一元函数的推广,我们将重点研究二元函数.三元和三元以上的函数完全可以类推.

§ 5.1 多元函数

一、邻域

由于讨论多元函数的需要,我们首先将一元函数中的邻域和区间的概念加以推广.

设点 $P_0(x_0, y_0)$ 、 $P(x, y) \in \mathbf{R}^2$, δ 是某一正数,集合

$$U(P_0, \delta) = \{P \in \mathbf{R}^2 \mid \|PP_0\| < \delta\}$$

或

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域.若点 P_0 不包含在该邻域内,则称该邻域为点 P_0 的空心邻域,记为 $U(\hat{P}_0, \delta)$.如图 5.1(a)是包含点 P_0 的邻域 $U(P_0, \delta)$,图 5.1(b)是不包含点 P_0 的空心邻域 $U(\hat{P}_0, \delta)$.

在几何上 $U(P_0, \delta)$ 就是在 xOy 平面上,以 P_0 为中心, $\delta > 0$ 为半径的圆的内部的点的全体.因此, \mathbf{R}^2 中的邻域 $U(P_0, \delta)$ 是在一元函数中开区间概念的一个自然推广.

二、开集与闭集

设 D 为平面点集. $P_1 \in D$, 若存在点 P_1 的某个邻域 $U(P_1, \delta) \subset D$, 则称点 P_1 为 D 的内点(图 5.2). 例如点集

$$D^* = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

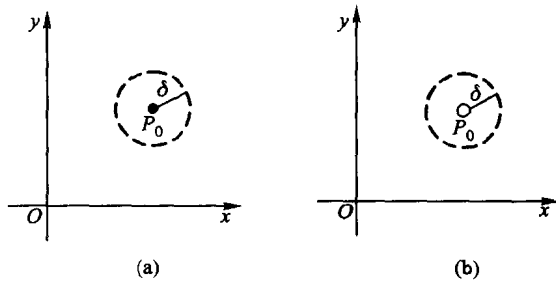


图 5.1

中每个点都是 D^* 的内点.

如果点 P_2 的任一邻域既有属于 D 的点,又有不属于 D 的点(不论 P_2 是否属于 D),则称 P_2 为 D 的边界点(图 5.2). D 的边界点的集合称为 D 的边界.例如上例中, D^* 的边界包括圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 与原点 $O(0,0)$.

设 $P_3 \notin D$, 并且存在 P_3 的一个邻域 $U(P_3, \delta)$, 使 $U(P_3, \delta) \cap D = \emptyset$, 则称点 P_3 是 D 的一个外点(图 5.2).

如果在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的任何邻域 $U(P_0, \delta)$ 总含有 D 中非 P_0 的点, 则称 P_0 是 D 的一个聚点. 例如 D^* 的内点及边界点(包括原点及圆周)都是 D 的聚点. 由此可见, 点集 D 的聚点可以属于 D , 也可以不属于 D . 若 D 的所有聚点都属于

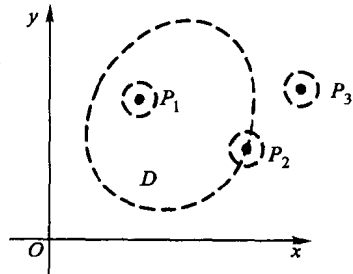


图 5.2

D , 则称 D 为闭集. 例如点集 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 是闭集, 点集 $D^* = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 不是闭集.

设 D 是平面点集, 如果 D 中的每一个点都是 D 的内点, 则称 D 为开集. 例如, 点集 $D^* = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 中每个点都是 D^* 的内点, 因此, D^* 为开集. 也就是说开集是由内点组成的.

三、区域

设 D 是 \mathbf{R}^2 的一个开集. 如果对于 D 内任何两点 P 和 Q , 都可用 D 内的一条折线将 P 和 Q 相连接, 则称 D 是连通的开集. 连通的开集称为区域或开区域(图 5.3), 例如 $\{(x, y) | x + y > 0\}$ 及 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 都是区域.

开区域连同其边界称为闭区域, 例如 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 是闭区域.

对于一个区域 D , 如果 $\exists M > 0$, 使得 D 内任何点到原点的距离都小于 M , 则称这个区域为有界区域, 否则称为无界区域. 如图 5.4(a) 为有界区域, 图 5.4(b) 为无界区域.

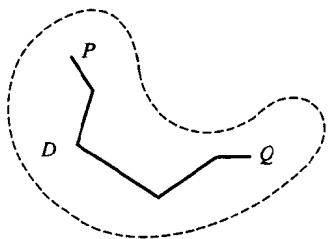


图 5.3

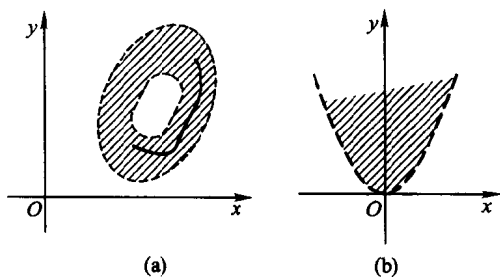


图 5.4

区域常用不等式表示,如图 5.5(a)所示的矩形区域表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

图 5.5(b)所示的圆环区域表示为

$$D = \{(x, y) \mid r^2 < x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (R > r > 0)\}$$

图 5.5(c)所示的三角形区域表示为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

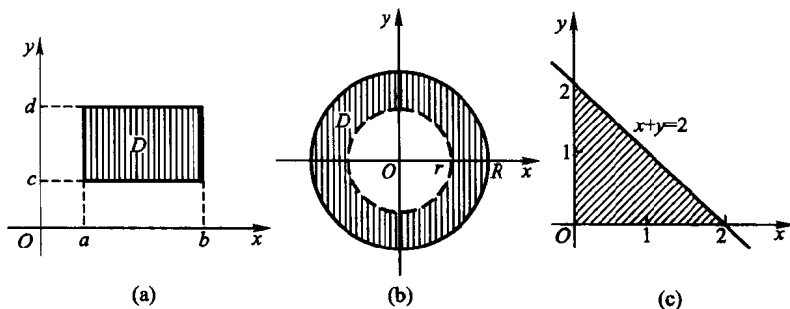


图 5.5

前面我们仅在平面点集上描述了一系列概念.事实上,这些概念可以自然地推广到 n 维空间 \mathbf{R}^n 中去.

设点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, 对任意一个实数 $\delta > 0$, 集合

$$U(P_0, \delta) = \{P \in \mathbf{R}^n \mid \|PP_0\| < \delta\},$$

称为点 P_0 的 δ 邻域.若点 P_0 不包含在邻域内,则称该邻域为点 P_0 的空心邻域,记为 $U(\hat{P}_0, \delta)$.

例如,设点 $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

则

$$U(P_0, \delta)$$

$$= \{P \in \mathbf{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta\}$$

这个邻域在 \mathbf{R}^2 中是一个不包含边界圆周的开圆盘;在 \mathbf{R}^3 中是一个不包含边界球面的开球体;在 \mathbf{R}^n 中是以 P_0 为中心, δ 为半径的 n 维开球体. 以邻域为基础, 我们可以定义 \mathbf{R}^n 中点集的内点、边界点及区域等一系列概念.

四、多元函数的概念

在实际问题中, 往往存在着许多量的变化, 反映到数学上, 就是一个变量依赖于多个变量的情形. 例如圆柱体的体积依赖于圆柱的高 h 和底半径 r , 其关系式是

$$V = \pi r^2 h,$$

当 h, r 的值分别给定时, V 就有一个确定的值与之对应.

又如平行四边形的面积 S 由它的相邻两边的长 x, y 与夹角 θ 所决定, 即 $S = xy \sin \theta$. 当 x, y, θ 的值确定后, S 的值也随之确定. 这些都是多元函数的简单例子.

定义 1 设 D 为 \mathbf{R}^2 的非空子集(即平面点集), \mathbf{R} 为实数集, 若 f 为 D 到 \mathbf{R} 的一个映射, 即对于 D 中的每一点 (x, y) , 通过 f , 在 \mathbf{R} 中存在唯一的实数 z 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的二元函数, 记为

$$f: D \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

或

$$z = f(x, y), (x, y) \in D,$$

其中 x, y 称为自变量, z 称为因变量, D 称为 f 的定义域, 记为 D_f . $Z_f = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$ 称为函数 f 的值域.

二元函数的定义不难推广到 n 元函数, 只要把平面点集 D 改为 n 维空间 \mathbf{R}^n 中的点集就行了, 我们简记 n 元函数为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

由此可见, n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 实际上就是 \mathbf{R}^n 的子集 D 到 \mathbf{R} 的一个映射, 其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subseteq \mathbf{R}^n$. 当 $n=1$ 时, 叫做一元函数; 当 $n=2, 3$ 时, 分别叫做二、三元函数.

二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D_f$ 在直角坐标系下的图像

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

表示空间的一个曲面, 这个曲面在 xOy 坐标平面上的投影就是函数 $f(x, y)$ 的定义域. 例如函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ($R > 0$) 的图像是球面的上半部分(图 5.6), 它在 xOy 面上的投影是圆域 $D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, D_f 就是函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的定义域.

需要指出的是我们也可以引入多值函数的概念. 如 $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 就是多值函数. 今后如无特别说明, 凡说到函数都是指单值函数.

五、等值线

上面已知, $z = f(x, y)$ 的图像在 \mathbf{R}^3 中为一曲面, 若在定义域 D_f 上满足 $f(x, y) = C$ (常数) 的点集:

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = C, (x, y) \in D_f, C \in \mathbf{R}\}$$

是 xOy 平面上的曲线, 则将它称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的等值线. 当 C 取一系列值 C_1, C_2, \dots, C_n 时, 便得多条等值线 L_1, L_2, \dots, L_n , 称为等值线族 (图 5.7). 从等值线上大致可看出函数值变化的情况 (从平面图形观察空间图形), 它表示了在何处 f 的图形具有高度 C .

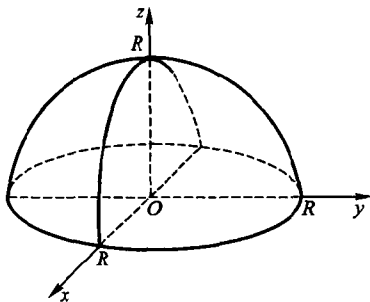


图 5.6

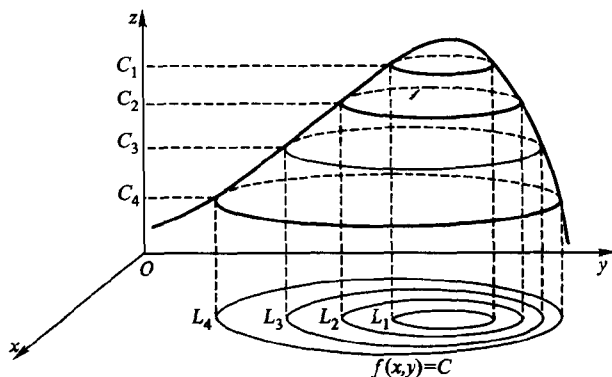


图 5.7

由图 5.7 可以看出等值线 $f(x, y) = C$ 就是 f 的图形在水平面 $z = C$ 上的截痕在 xOy 平面的投影, 当 C 按等间距画出等值线族 $f(x, y) = C$ 时, 在等值线比较接近的地方, 曲面较陡峭; 而在等值线比较分开的地方, 曲面较平坦.

六、多元函数的极限

首先讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 当点 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限. 这里 $P \rightarrow P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0 , 即 P 与 P_0 之间的距离趋于零

$$\|PP_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

如果在 $P \rightarrow P_0$ 的过程中,其对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于某一个确定的常数 A ,则称 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $P \rightarrow P_0$ 时的极限.下面我们用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言给出极限的定义.

定义 2 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D_f , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D_f 的聚点.若存在常数 A ,使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ 时,有}$$

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

为了区别于一元函数的极限,我们将二元函数的极限称为二重极限.

二元函数极限的概念,可以相应地推广到 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (简记为 $u = f(P)$) 上去.

定义 3 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D_f , P_0 为 D_f 的聚点.若存在常数 A ,使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < \|PP_0\| < \delta$ 时,有

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P \rightarrow P_0$ 时的极限(又称为 n 重极限),记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0).$$

需要指出的是:所谓二重极限存在,是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数 $f(x, y)$ 都无限接近于 A .因此,如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式,如沿着某一条直线或曲线趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时,即使函数 $f(x, y)$ 无限接近于某一确定常数,我们都不能由此断定函数 $f(x, y)$ 的极限存在.但是如果当 $P(x, y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数 $f(x, y)$ 趋于不同的常数,那么就可以断定这函数的极限不存在.为说明这一点我们举例如下:

例 1 设二元函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 讨论 f 在点 $(0, 0)$ 的二重极限

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$ 趋于点 $(0, 0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

由此可见,当点 $P(x, y)$ 沿不同的直线 $y = kx$ 趋于点 $(0, 0)$ 时, f 将有不同的极限,所以 f 在点 $(0, 0)$ 的二重极限不存在.

例 2 设函数