国家工科数学课程教学基地系列教材

微积分

下册

电子科技大学应用数学学院

傅英定　谢云荪　主编

高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地系列教材

微 积 分

下 册

电子科技大学应用数学学院

傅英定 谢云荪 主编

高等教育出版社

内容简介

本书是我校“九五”规划特色教材及“十五”规划精品教材之一，也是我校“国家工科数学课程教学基地”系列教材之一。本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》和科技人才对数学素质的要求，本着面向21世纪深化课程体系与教学内容改革的精神，吸收国内外相关教材的长处编写的。其主要特点是：注重课程体系结构与教学内容的整体优化；重视基础，突出数学思想与方法，着力于数学素质与能力的培养；充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力；注重教学适用性。

本书分上、下两册。上册包括极限理论、一元微积分与常微分方程；下册包括多元函数微积分与无穷级数。每节后配有习题及思考题，每章后配有复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、论证简明、叙述清晰、例题典型、便于教学。可作为高等工科院校的教材或参考书，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/傅英定，谢云荪主编.—北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7-04-011947-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.①傅…②谢…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第037488号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年8月第1版
印　　张	20.25	印　　次	2003年8月第1次印刷
字　　数	380 000	定　　价	21.40元

策划编辑　李艳馥
责任编辑　李　陶
封面设计　于　涛
责任绘图　尹文军
版式设计　陆瑞红
责任校对　康晓燕
责任印制　宋克学

目　　录

第五章　多元函数微分学

前面我们研究了一元函数微积分及其应用.在自然科学与工程技术问题中，常常涉及多方面的因素，反映到数学上，就是多元函数的问题.从本章开始我们研究多元函数微积分及其应用.它是在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的极限、连续，并重点研究偏导数、全微分及它们的一些简单应用.多元函数是一元函数的推广，我们将重点研究二元函数.三元和三元以上的函数完全可以类推.

§5.1　多元函数

一、邻域

由于讨论多元函数的需要，我们首先将一元函数中的邻域和区间的概念加以推广.

设点 $P_0(x_0,y_0)$、$P(x,y)\in\mathbf{R}^2$，δ 是某一正数，集合

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^2 \mid \| PP_0 \| <\delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点 P_0 的 δ **邻域**.若点 P_0 不包含在该邻域内，则称该邻域为点 P_0 的**空心邻域**，记为 $U(\hat{P}_0,\delta)$.如图 5.1(a)是包含点 P_0 的邻域 $U(P_0,\delta)$，图 5.1(b)是不包含点 P_0 的空心邻域 $U(\hat{P}_0,\delta)$.

在几何上 $U(P_0,\delta)$就是在 xOy 平面上，以 P_0 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点的全体.因此，$\mathbf{R}^2$ 中的邻域 $U(P_0,\delta)$是在一元函数中开区间概念的一个自然推广.

二、开集与闭集

设 D 为平面点集.$P_1\in D$，若存在点 P_1 的某个邻域 $U(P_1,\delta)\subset D$，则称点 P_1 为 D 的**内点**(图 5.2).例如点集

$$D^*=\{(x,y) \mid 0<x^2+y^2<1\}$$

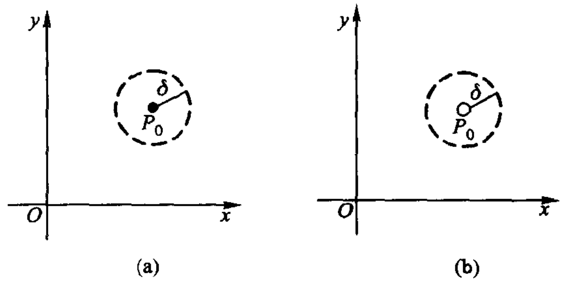


图　5.1

中每个点都是 D^* 的内点.

如果点 P_2 的任一邻域既有属于 D 的点,又有不属于 D 的点(不论 P_2 是否属于 D),则称 P_2 为 D 的**边界点**(图 5.2). D 的边界点的集合称为 D 的**边界**. 例如上例中, D^* 的边界包括圆周 $x^2+y^2=1$ 与原点 $O(0,0)$.

设 $P_3 \notin D$,并且存在 P_3 的一个邻域 $U(P_3,\delta)$,使 $U(P_3,\delta)\cap D=\varnothing$,则称点 P_3 是 D 的一个**外点**(图 5.2).

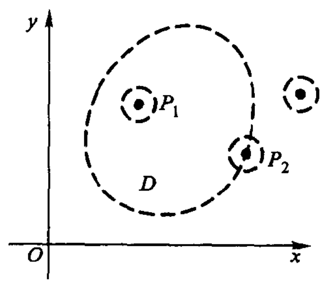


图　5.2

如果在点 $P_0(x_0,y_0)$的任何邻域 $U(P_0,\delta)$ 总含有 D 中非 P_0 的点,则称 P_0 是 D 的一个**聚点**. 例如 D^* 的内点及边界点(包括原点及圆周)都是 D 的聚点. 由此可见,点集 D 的聚点可以属于 D,也可以不属于 D. 若 D 的所有聚点都属于 D,则称 D 为**闭集**. 例如点集 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭集,点集 $D^*=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 不是闭集.

设 D 是平面点集,如果 D 中的每一个点都是 D 的内点,则称 D 为**开集**. 例如,点集 $D^*=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 中每个点都是 D^* 的内点,因此, D^* 为开集. 也就是说开集是由内点组成的.

三、区域

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集. 如果对于 D 内任何两点 P 和 Q,都可用 D 内的一条折线将 P 和 Q 相连接,则称 D 是**连通的开集**. 连通的开集称为**区域**或**开区域**(图 5.3),例如 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 及 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 都是区域.

开区域连同其边界称为**闭区域**,例如 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭区域.

对于一个区域 D,如果 $\exists M>0$,使得 D 内任何点到原点的距离都小于 M,则称这个区域为**有界区域**,否则称为**无界区域**. 如图 5.4(a)为有界区域,图 5.4(b)为无界区域.

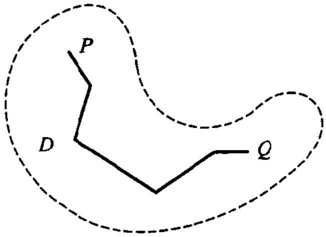
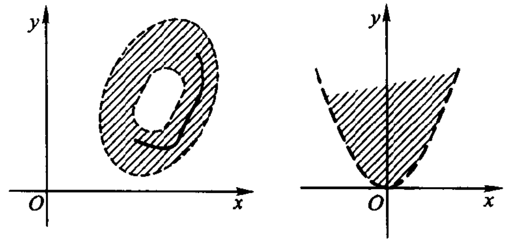


图 5.3



(a) (b)

图 5.4

区域常用不等式表示,如图 5.5(a)所示的矩形区域表示为

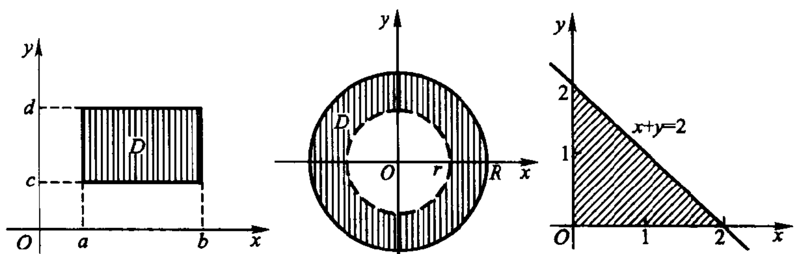
$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

图 5.5(b)所示的圆环区域表示为

$$D=\{(x,y)\mid r^2<x^2+y^2\leqslant R\quad(R>r>0)\}$$

图 5.5(c)所示的三角形区域表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2-x\}$$



(a) (b) (c)

图 5.5

前面我们仅在平面点集上描述了一系列概念.事实上,这些概念可以自然地推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中去.

设点 $P_0\in\mathbf{R}^n$,对任意一个实数 $\delta>0$,集合

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n\mid\|PP_0\|<\delta\},$$

称为点 P_0 的 δ **邻域**.若点 P_0 不包含在邻域内,则称该邻域为点 P_0 的**空心邻域**,记为 $U(\hat{P}_0,\delta)$.

例如,设点 $P_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$、$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,则

$$U(P_0,\delta)$$

$$=\{P\in \mathbf{R}^n \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta\}$$

这个邻域在 $\mathbf{R}^2$ 中是一个不包含边界圆周的开圆盘;在 $\mathbf{R}^3$ 中是一个不包含边界球面的开球体;在 $\mathbf{R}^n$ 中是以 P_0 为中心, δ 为半径的 n 维开球体. 以邻域为基础,我们可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中点集的内点、边界点及区域等一系列概念.

四、多元函数的概念

在实际问题中,往往存在着许多量的变化,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形. 例如圆柱体的体积依赖于圆柱的高 h 和底半径 r,其关系式是

$$V=\pi r^2 h,$$

当 h、r 的值分别给定时, V 就有一个确定的值与之对应.

又如平行四边形的面积 S 由它的相邻两边的长 x、y 与夹角 θ 所决定,即 $S=xy\sin\theta$. 当 x、y、θ 的值确定后, S 的值也随之确定. 这些都是多元函数的简单例子.

定义 1　设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的非空子集(即平面点集), $\mathbf{R}$ 为实数集,若 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即对于 D 中的每一点 (x,y),通过 f,在 $\mathbf{R}$ 中存在惟一的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的二元函数,记为

$$f: D\subseteq \mathbf{R}^2\to \mathbf{R}$$

或

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

其中 x、y 称为自变量, z 称为因变量, D 称为 f 的定义域,记为 D_f. $Z_f=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为函数 f 的值域.

二元函数的定义不难推广到 n 元函数,只要把平面点集 D 改为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集就行了,我们简记 n 元函数为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

由此可见, n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 实际上就是 $\mathbf{R}^n$ 的子集 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\subseteq\mathbf{R}^n$. 当 $n=1$ 时,叫做一元函数;当 $n=2$、3 时,分别叫做二、三元函数.

二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D_f$ 在直角坐标系下的图像

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$$

表示空间的一个曲面,这个曲面在 xOy 坐标平面上的投影就是函数 $f(x,y)$ 的定义域. 例如函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$ 的图像是球面的上半部分(图 5.6),它在 xOy 面上的投影是圆域 $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$, D_f 就是函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的定义域.

需要指出的是我们也可以引入多值函数的概念.如 $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 就是多值函数.今后如无特别说明,凡说到函数都是指单值函数.

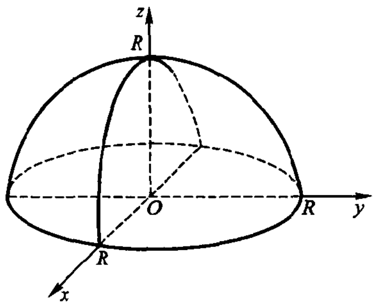


图　5.6

五、等值线

上面已知,$z=f(x,y)$ 的图像在 $\mathbf{R}^3$ 中为一曲面,若在定义域 D_f 上满足 $f(x,y)=C$(常数)的点集:

$$\{(x,y)\mid f(x,y)=C,(x,y)\in D_f,C\in\mathbf{R}\}$$

是 xOy 平面上的曲线,则将它称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的等值线.当 C 取一系列值 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 时,便得多条等值线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$,称为**等值线族**(图 5.7).从等值线上大致可看出函数值变化的情况(从平面图形观察空间图形),它表示了在何处 f 的图形具有高度 C.

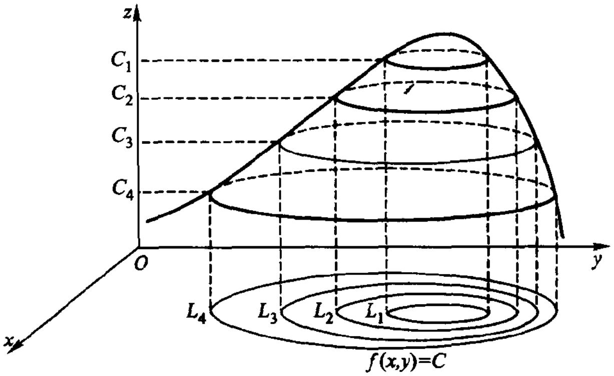


图　5.7

由图 5.7 可以看出等值线 $f(x,y)=C$ 就是 f 的图形在水平面 $z=C$ 上的截痕在 xOy 平面的投影,当 C 按等间距画出等值线族 $f(x,y)=C$ 时,在等值线比较接近的地方,曲面较陡峭;而在等值线比较分开的地方,曲面较平坦.

六、多元函数的极限

首先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0,即 P 与 P_0 之间的距离趋于零

$$\|PP_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

如果在 $P \to P_0$ 的过程中,其对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于某一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限.下面我们用"$\varepsilon-\delta$"语言给出极限的定义.

定义 2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D_f,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D_f 的聚点.若存在常数 A,使得 $\forall\, \varepsilon>0$,$\exists\, \delta>0$,当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{ 时,有}$$

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

为了区别于一元函数的极限,我们将二元函数的极限称为**二重极限**.

二元函数极限的概念,可以相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(简记为 $u=f(P)$)上去.

定义 3 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D_f,P_0 为 D_f 的聚点.若存在常数 A,使得 $\forall\, \varepsilon>0$,$\exists\, \delta>0$,当 $0<\|PP_0\|<\delta$ 时,有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限(又称为 n 重极限),记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

需要指出的是:所谓二重极限存在,是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 都无限接近于 A.因此,如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式,如沿着某一条直线或曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,即使函数 $f(x,y)$ 无限接近于某一确定常数,我们都不能由此断定函数 $f(x,y)$ 的极限存在.但是如果当 $P(x,y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 趋于不同的常数,那么就可以断定这函数的极限不存在.为说明这一点我们举例如下:

例 1 设二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,讨论 f 在点 $(0,0)$ 的二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

由此可见,当点 $P(x,y)$ 沿不同的直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,f 将有不同的极限,所以 f 在点 $(0,0)$ 的二重极限不存在.

例 2 设函数