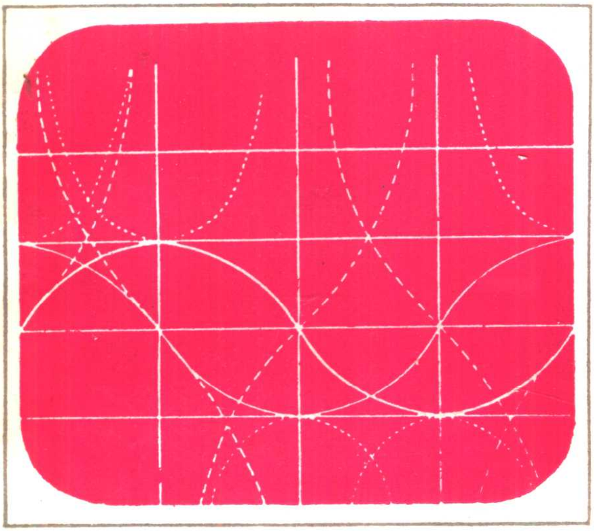

黄宣国

凸函数与琴生不等式

上海教育出版社

凸函数与琴生不等式

黄 宣 国

上 海 教 育 出 版 社

（沪）新登字 107 号

凸函数与琴生不等式

黄　宣　国

上海教育出版社出版发行

（上海永福路 123 号）

各地新华书店经销　江苏太仓印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张 6　字数129,000

1991 年12月第 1 版　1991 年12月第 1 次印刷

印数1—1,300本

ISBN 7-5320-2487-3/G·2424　定价：2.05 元

前　　言

在中学数学竞赛里，不等式是一个重要的内容，怎样来学习这一内容呢？

读者知道二次函数、正弦和余弦函数、正切和余切函数，在可能相差一个符号的前提下，它们都是凸函数（见第一节）．在现实世界中，凹凸现象是层出不穷的，高山凹凸起伏，蜿蜒连绵；大海波澜壮阔，峰谷（即凹凸）迭起；在机械工业中，凸轮的应用非常广泛．用数学的语言来讲，凸函数是数学中一个值得研究的分支，它几乎包括中学数学中大多数重要的函数．

韩愈在《进学解》里说："记事者必提其要，纂言者必钩其玄．"万山磅礴，必有主峰，龙衮九章，但挈一领，不等式题目成百上千，把凸函数和不等式结合起来，从凸函数的基本不等式（琴生不等式）学起，有条不紊和较有系统地领略千姿百态的不等式领域，对提高读者的数学水平是有益的．

在写这本小册子时，我有两个目标，一个是题目尽可能新颖，另一个是解法尽可能简洁、易懂．这本小册子里的部分内容曾对中学数学奥林匹克竞赛国家集训队讲过几次，受到同学们的欢迎．值此情形，我向上海教育出版社推荐此书．我想凡是具有高中水平的读者都能读懂这本小册子．我更希望参加数学竞赛的同学能选择这本小册子作为数学课外活动的材料，从中提高解不等式方面的能力和修养，并祝广大同学能

在数学竞赛中取得优异成绩.

复旦大学数学研究所　**黄宣国**

一九九〇年六月

目　　录

一　琴生不等式的证明

我们都知道下面一些不等式:

(1) 当 $0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\pi$ 时(这表明 $x_1,\ x_2$ 两个实数都大于等于 0, 而小于等于 π),

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$
$$\leqslant\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

因而,

$$-\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\geqslant-\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2). \qquad (1.1)$$

(2) 当 $x_1,\ x_2$ 全是正实数时,

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2), \qquad (1.2)$$

两边取对数,并且两端乘以 -1, 有

$$-\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)=-\lg\sqrt{x_1x_2}$$
$$\geqslant-\lg\frac{1}{2}(x_1+x_2). \qquad (1.3)$$

(3) 当 p 是自然数, $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 时,有

$$\frac{1}{2}(x_1^p+x_2^p)\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^p. \qquad (1.4)$$

(1.4) 的一个简单的证明是对 p 用数学归纳法. 当 $p=1,\ 2$ 时,请读者自己验证(1.4). 假设当 $p=k$ 时,(1.4)成立,那么,

$$\frac{1}{2}(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})=\frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2)$$
$$+\frac{1}{4}(x_1^k-x_2^k)(x_1-x_2)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^k(x_1+x_2)$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^{k+1}. \tag{1.5}$$

所以，不等式(1.4)的确成立.

读者一定会说，这有什么稀奇，还能写出许多类似的不等式呢.

(4) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时(这表明实数 x_1, x_2 都大于等于 $-\frac{\pi}{2}$，而且小于等于 $\frac{\pi}{2}$. 下面类似情况不再说明)，

$$\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)=\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$
$$\leqslant\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2).$$

因而，

$$-\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)\geqslant-\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.6}$$

(5) 当 $0\leqslant x_1,\ x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2},$$

而

$$\cos x_1\cos x_2=\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[1+\cos(x_1+x_2)]$$
$$=\cos^2\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

于是，

$$\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2\geqslant\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}=2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.7}$$

(6) 当 $0<x_1,\ \ x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\operatorname{ctg}x_1+\operatorname{ctg}x_2=\frac{\cos x_1}{\sin x_1}+\frac{\cos x_2}{\sin x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\sin x_1\sin x_2}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin x_1\sin x_2},$$

而

$$\sin x_1\sin x_2=\frac{1}{2}[-\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]$$
$$=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

所以，

$$\operatorname{ctg}x_1+\operatorname{ctg}x_2\geqslant\frac{2\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}=2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.8}$$

(7) x_1, x_2 是任意实数, 利用(1.2), 有

$$10^{x_1}+10^{x_2}\geqslant 2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)},$$

于是,

$$\begin{aligned}(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})&=1+(10^{x_1}+10^{x_2})+10^{x_1+x_2}\\&\geqslant 1+2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+10^{x_1+x_2}\\&=[1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}]^2,\end{aligned}\tag{1.9}$$

对不等式(1.9)两边取对数, 有

$$\frac{1}{2}[\lg(1+10^{x_1})+\lg(1+10^{x_2})]\geqslant \lg(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}).\tag{1.10}$$

(8) h 是一个正常数, x_1, x_2 是实数,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\right]\\&=\frac{1}{4}[2h^2+x_1^2+x_2^2+2\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}]\\&\quad-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)\right]\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}-\frac{1}{2}(h^2+x_1x_2),\end{aligned}$$

利用(1.2)(显然(1.2)对非负实数也成立), 有

$$\begin{aligned}(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)&=h^4+h^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2\\&\geqslant h^4+2x_1x_2h^2+x_1^2x_2^2\\&=(h^2+x_1x_2)^2,\end{aligned}\tag{1.11}$$

那么,

$$\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2\geqslant h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2,$$

两边开方, 有

$$\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})\geqslant\sqrt{h^2+\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2}. \tag{1.12}$$

上面已举了八个不等式的例子．现在，我们静心分析一下，立刻发现一个规律：

在(1)中，令$f(x)=-\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，当$0\leqslant x_1, x_2\leqslant\pi$时，有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right). \tag{1.13}$$

在(2)中，令$f(x)=-\lg x(x>0)$，也有不等式(1.13)，唯一不同之处是以$x_1>0$和$x_2>0$代替$0\leqslant x_1, x_2\leqslant\pi$．在(3)到(8)中，分别令$f(x)=x^p$ ($x>0$, p是自然数)，$f(x)=-\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\operatorname{tg}x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\operatorname{ctg}x\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\lg(1+10^x)$ (x是实数)和$f(x)=\sqrt{h^2+x^2}$(h是一个正常数，x是实数)，同样有不等式(1.13)，只不过x_1、x_2的变化范围有所不同．从(1)到(8)还可以看出，当且仅当$x_1=x_2$时，(1.13)变为等式．这就是我们的发现．

许多函数满足不等式(1.13)，当然自变量x的定义域可能各不相同．在这个基础上加以抽象，就得到本书所要介绍的凸函数不等式．它是丹麦数学家琴生(Jensen，1859年—1925年)在1905年和1906年所建立的，所以又称这些不等式为琴生不等式．我们把满足不等式(1.13)(等号成立当且仅当$x_1=x_2$)的函数$f(x)$称为某个定义域区间内的凸函数．例如，对于(1)，我们就讲$f(x)=-\sin x$是闭区间$[0, \pi]$内的凸函数；对于(2)，我们讲$f(x)=-\lg x$是开区间$(0, \infty)$(这表明$x>0$，∞称无穷大)内的凸函数，等等．

下面我们再举几个凸函数的例子.

(9) $f(x)=-\sqrt{x}$ (x 是正实数).

x_1, x_2 是正实数, 利用不等式(1.2), 有

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{1}{4}(x_1+x_2),$$

于是,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\right]^2&=\frac{1}{4}(x_1+2\sqrt{x_1x_2}+x_2)\\&\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2).\end{aligned}$$

两边开方, 并且两端乘以 -1, 有

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\geqslant-\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)},$$

(等号成立, 当且仅当 $x_1=x_2$)

所以 $f(x)=-\sqrt{x}$ 是 $(0,\ \infty)$ 内的一个凸函数.

(10) $f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

当 $0<x_1,\ x_2\leqslant\frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}-1\right)-\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2\\&=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}+\frac{4}{x_1+x_2}\\&=\frac{1}{x_1x_2(x_1+x_2)^2}(x_1-x_2)^2(1-x_1-x_2)\geqslant 0.\end{aligned}$$

移项后, 两边取对数, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\lg\left(\frac{1}{x_1}-1\right)+\lg\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right]\\&\geqslant\lg\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right),\end{aligned}\tag{1.14}$$

所以，$f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)$是半开半闭区间$\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$内的凸函数((1.14)等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$)。

(11) $f(x)=\left(x+\frac{a}{x}\right)^p$ (p 是自然数，a 是正常数，$x>0$)。

我们对 p 用数学归纳法，证明下述不等式：当 $x_1>0$ 和 $x_2>0$，

$$\frac{1}{2}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^p+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^p\right]$$
$$\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^p. \tag{1.15}$$

当 $p=1$ 时，利用熟知的关系式：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\geqslant\frac{4}{x_1+x_2}, \tag{1.16}$$

有

$$\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}+x_2+\frac{a}{x_2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}. \tag{1.17}$$

假设当 $p=k$ 时，(1.15)成立，考虑 $p=k+1$ 情况，

$$\frac{1}{2}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^{k+1}+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^{k+1}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right] \\
&\quad \cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right] \\
&\geqslant\left[\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right] \\
&\quad \cdot\left[\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^k
\end{aligned}
$$

（利用不等式(1.17)和归纳法假设）

$$
=\left[\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^{k+1}, \tag{1.18}
$$

所以，(1.15)对任意自然数p成立，而且等号成立，当且仅当$x_1=x_2$. 函数$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^p$（$p$是自然数，$a$是正常数）是$(0,\infty)$内的凸函数.

(12) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\ (0<x<1)$，我们来证明它也是一个凸函数. 对于$0<x_1$, $x_2<1$，令$\dfrac{1}{\sqrt{1-x_i}}=t_i\ (i=1,\ 2)$，于是$t_i>1$，且$x_i=1-\dfrac{1}{t_i^2}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)}} \\
&=\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right)-\frac{\sqrt{2}\, t_1 t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

显然，

$$
\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right) \geqslant \sqrt{t_1 t_2}, \quad \sqrt{t_1^2+t_2^2} \geqslant \sqrt{2} \cdot \sqrt{t_1 t_2}.
$$

那么，(1.19)右边非负. 因而，我们有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}},\tag{1.20}$$

等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 是(0, 1)内的一个凸函数.

(13) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ $(0<x<1)$. 我们证明这个 $f(x)$ 在(0, 1)内也是一个凸函数. 取(0, 1)内两个实数 x_1, x_2, 不妨设 $x_1\geqslant x_2$, 显然

$$(x_1-x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}-\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)\geqslant 0,$$

因而，有

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right).$$

利用上述结果，有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}(x_1+x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)$$
$$\geqslant\frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}.\ \text{(利用(1.20))}\tag{1.21}$$

显然，不等式(1.21)取等号时，上述推导过程中一切不等式都应取等号，那么必有 $x_1=x_2$. 当然 $x_1=x_2$ 使(1.21)变成等式.

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ 是(0, 1)区间内的凸函数。

现在，我们向读者介绍一个有用的函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}. \quad \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.22}$$

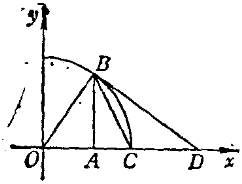

图 1

作一个半径为1的圆(单位圆)，取圆心 O 为坐标原点，取第一象限(见图 1)。令 $\angle COB=x$，并作 BA 垂直于 OC(即 x 轴)。则 $AB=\sin x$. 过点 B 作圆 O 的切线，交 x 轴于 D. 用 S 表示面积，显然

$$S_{\triangle COB}<S_{\text{扇形}COB}<S_{\triangle DOB}, \tag{1.23}$$

因而，有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \tag{1.24}$$

这导出一个简单，然而重要的不等式：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \tag{1.25}$$

从(1.25)，有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{1.26}$$

我们知道，当 x 趋向于0时，$\cos x$ 趋向于1. 所以，从(1.26)知道，当 x 趋向于0时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 必定趋向于1. 用极限语言来表达，就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.27}$$

下面证明，由(1.22)定义的函数 $f(x)$ 是单调递降函数，就是说，当 $0<x<y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $f(y)<f(x)$.

由于 $y-x>0$, 把 $y-x$ 作 n 等分(n 是自然数). 令

$$\Delta x=\frac{1}{n}(y-x). \tag{1.28}$$

我们要证明, 当 n 很大时, 对于 $[x, y)$ 内实数 x^*, 如果 $x^*+\Delta x\leqslant y$, 必有

$$f(x^*+\Delta x)<f(x^*). \tag{1.29}$$

如果(1.29)成立, 令 $x^*=x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \cdots, x+(n-1)\Delta x$, 就有

$$\begin{aligned} &f(x)>f(x+\Delta x)>f(x+2\Delta x)>f(x+3\Delta x)\\ &\quad>\cdots>f(x+(n-1)\Delta x)>f(x+n\Delta x)\\ &=f(y). \end{aligned} \tag{1.30}$$

现在证明(1.29).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta x}[f(x^*+\Delta x)-f(x^*)]\\ &=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\sin(x^*+\Delta x)}{x^*+\Delta x}-\frac{\sin x^*}{x^*}\right]\\ &=\frac{1}{\Delta x x^*(x^*+\Delta x)}[x^*\sin(x^*+\Delta x)\\ &\quad-(x^*+\Delta x)\sin x^*]\\ &=\frac{1}{\Delta x(x^*+\Delta x)}[\sin(x^*+\Delta x)-\sin x^*]\\ &\quad-\frac{\sin x^*}{x^*(x^*+\Delta x)}\\ &=\frac{\cos\left(x^*+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{x^*+\Delta x}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}-\frac{\sin x^*}{x^*(x^*+\Delta x)}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

当 Δx 趋向于 0 时, $x^*+\Delta x$ 趋向于 x^*, $\cos\left(x^*+\frac{1}{2}\Delta x\right)$