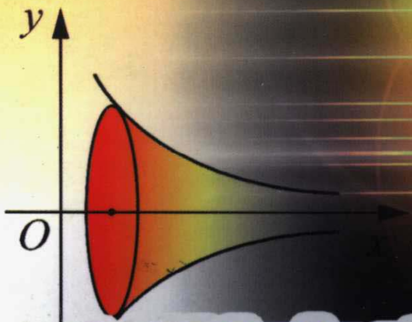


# 大学文科高等数学

DAXUEWENKEGAODENGSHUXUE

段文英 编著

东北林業大學 出版社

# 大学文科高等数学

段文英　编著

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学文科高等数学/段文英编著．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2004.5

ISBN 7-81076-613-9

Ⅰ．大...　Ⅱ．段...　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O 13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 068228 号

责任编辑：冯　琪

封面设计：彭　宇

NEFUP

大学文科高等数学

Daxue Wenke Gaodeng Shuxue

段文英　编著

东北林业大学出版社出版发行

（哈尔滨市和兴路 26 号）

东北林业大学印刷厂印装

开本850×1168　1/32　印张9　字数224千字

2004年5月第1版　2004年5月第1次印刷

印数 1—1 000 册

ISBN 7-81076-613-9

O·70　定价：15.50元

# 前　言

数学科学与其他自然科学、社会科学一道共同承载着人类知识的丰富宝库。在古老的年代，数学曾被誉为“科学王后”，那缘于它的神奇和为自然科学的奠基，而在现代文化中数学却“不声不响地扩大它所征服的领域”，特征之一就是数学以越来越快的速度渗透到社会科学中，正如著名学者卡普兰所说：“由于最近20年的进步，社会科学的许多重要领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段……在社会科学中不断扩大数学语言的运用是具有重要意义的”。可以说数学对于社会工作者来讲无论现在还是将来都为必不可少的锐利武器。文科大学生学习一点高等数学会提高数学文化品位，陶冶数学审美情趣，培植抽象思维素养，奠定科学研究基础，为不久的将来步入社会提供更广阔的发展空间。这将是非常有价值的一段人生历程。

我校自99级始开文科高等数学课，笔者是首批主讲教师之一，同年底主持校级《文科大学生高等数学教育与数学素质培养的研究和实践》教改课题，历时3年结题并获校教学优秀成果奖。在这个探索、研究、实验过程中深感需要一本更合适的教材。这本教材既要体现文科特色具备一定的文化品位，又要涵盖大学基础数学的主体内容，供不同专业不同学时的教学计划去选择；既保持数学体系的内在逻辑关系，又通俗易懂便于学生接受。但当我努力去实现上述意图，将往日所思所想呈形于书稿时，是何等的忐忑不安，总觉未写出心中那本书。华罗庚先生曾说：“一个人文章写多了，就难免出错”，我不敢妄说自己写过几多文章，但限于能力，偏、错、漏在所难免，之所以敢斗胆面世，是出于一名教师对教育事业

的挚爱，对文科高等数学教学成功模式的不懈追求，同时期望得到同行、专家的赐教和指正，以便修订。

在拙作付梓之际，我衷心感谢霍建宇教授审阅全稿，提出诸多颇有见地的意见，并以他浑厚的文字功底和精细的工作态度为本书润色；感谢富有经验的王喜田副教授，帮助我策划了《运筹学初步》和《概率论简介》两部分；感谢与我共同承担文科高等数学教学的同事，他们给了我许多支持；感谢年轻有为颇具才识的冯琪副编审，对本书进行了全面的加工和校订；感谢东北林业大学理学院、教务处、出版社有关领导的大力扶持，使得本书得以顺利出版。

段文英

2003 年秋于东北林业大学

# 目　　录

# 1 一元微积分

在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了.

——恩格斯(F. Engels)

微积分学以函数为研究对象，以函数的导数与积分为主要研究内容，以极限为研究工具.它是近现代理论数学和应用数学的重要基础之一.

## 1.1 函数

作为变化着的量的一般性质及它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念，而数学对象的这种根本扩展就决定了向数学的新阶段——变量的数学过渡.

——亚里山大洛夫(P. Aleksandrov)

### 1.1.1 实数与点集

**实数**由有理数与无理数两大类组成.有理数包括零、正负整数和正负分数.有理数都可用分数形式$\frac{q}{p}$($p$,$q$为整数，$q \neq 0$)表示，也可用有限小数或无限循环小数表示.无限不循环小数是无理数.

全体实数构成的集合称为实数集,记做 $R$.

常见的数集还有:

$N$—— 一切自然数的集合;

$Z$—— 一切整数的集合;

$Q$—— 一切有理数的集合;

$I$—— 一切无理数的集合.

**点集**:实数轴上某些点构成的集合称为点集.

**区间**:介于实数轴上某两点之间的一切点所构成的集合称为区间,这两个点称为**区间端点**.两端点之间的距离称为区间长度.如果两个端点都是实数,称此区间为**有限的**,否则称为**无限的**.

设 $a,b\in R$ 且 $a<b$,则有有限区间:

**开区间**:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

**闭区间**:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

**半开(闭)区间**:$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

**无限区间**:

$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$

$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a)$

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in R\}=R$

在下面的讨论中,我们常用字母 $I$ 表示一个泛指的区间.

下面我们介绍一个特殊的开区间 —— **邻域**的概念.

设 $a\in R,\delta\in R$ 且 $\delta>0$,称集合

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

为 $a$ 的 $\delta$ **领域**,记做 $N_\delta(a)$.

称集合

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

为 $a$ 的 $\delta$ 去心邻域,记做 $N_\delta(\bar{a})$.

并称 $a$ 为邻域中心,$\delta$ 为邻域半径.

当不必指明邻域半径时,记号中可省略 $\delta$.

例 $N_{0.1}(2) = \{x \mid 1.9 < x < 2.1\}$

### 1.1.2 函数的概念

在我们生存的时空中,所见之物无不在运动变化着,由此而形成的这种变化着的现象往往可通过几个互相联系并遵循一定规律的变量所描述、所刻画,这就是函数.

**例1** 设某工厂每日最多能生产 100 件产品,固定成本为 10 000 元,每生产一件,成本增加 50 元,则该厂每日的总成本 $C$ 与总产量 $q$ 有如下关系

$$C = 50q + 10\,000$$

当 $q$ 在生产能力容许的范围[0,100]内取定某一数值时,总成本也随之有一个确定的数值与之对应.例如 $q = 10$ 时,$C = 50 \times 10 + 10\,000 = 10\,500$(元).

**例2** 银行储蓄,1年定期整存整取,年利率为2.25%,存款金额与一年所得利息列表如下:

| 存款金额 $k$/元 | 100 | 500 | 1 000 | 2 000 | 5 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 一年利息 $r$/元 | 2.25 | 11.25 | 22.5 | 45 | 112.5 | 225 |

存款金额 $k$ 和 1 年所得利息 $r$ 都是变量.由该表可知,已知表中列出的 $k$,就有惟一确定的 $r$ 与之对应,$r$ 随 $k$ 取不同的值而取不同的值.$r$ 与 $k$ 之间的数量关系由上表确定.

**例3** 在气象观测站,温度自动仪所记录的某地某天 24 小时气温变化曲线如图 1-1 所示.横轴为时间 $t$ 轴,纵轴为气温 $T$ 轴.对任何时刻 $t_0 \in [0,24]$,可按图上的曲线确定出一个对应的温度

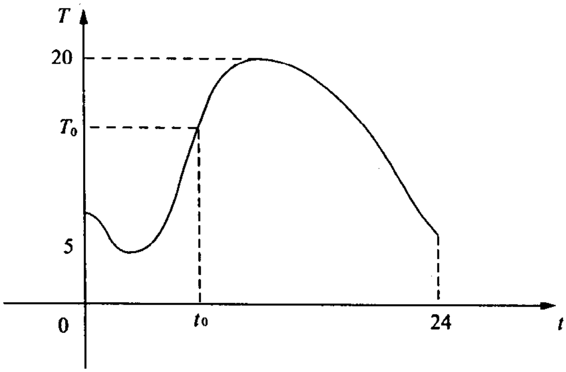


图 1-1

$T$.因此时间和气温这两个变量的对应关系由这条曲线确定.

上述三例,来自不同的领域,分别由公式、表格、图形反映了两个变量之间的某种依赖关系,即是函数关系.

**定义 1** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量,$X$ 是给定的非空数集.若 $\forall x \in X$,根据某一确定的法则 $f$,变量 $y$ 总有一个或多个确定的数值与之对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记做

$$y = f(x), \quad x \in X$$

其中,$x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量.对确定的 $x_0 \in X$,称与之对应的 $y_0$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的函数值,记做 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0} = y_0$;称数集 $X$ 为该函数的定义域;称 $X$ 中所有点对应的函数值全体为该函数的值域,记做

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

据此定义上述例 1、例 2、例 3 都表示一种函数关系.由此也看出决定一个函数的要素为自变量、因变量、对应关系,与函数中的变量用什么符号表示没有关系,与这个函数关系用什么形式表示也没有关系.常见的函数表示法有三种,即**列表法**、**图象法**、**公式**

**(解析)法**.

在定义 1 中,若一个自变量对应惟一一个函数值,称这样的函数为**单值函数**.若一个自变量对应多个函数值,则称为**多值函数**.一般地我们仅讨论单值函数.

下面我们再举几个关于函数的例子.

**例 4**　求$\sqrt{\dfrac{5-x^2}{x-1}}$的定义域.

**解**　分两种情况

情况 1　$\left.\begin{aligned} 5-x^2 \geqslant 0 \\ x-1>0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leqslant \sqrt{5} \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow 1<x \leqslant \sqrt{5}$

情况 2　$\left.\begin{aligned} 5-x^2 \leqslant 0 \\ x-1<0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant 5 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{5}$

因此,函数的定义域为$(-\infty,-\sqrt{5}) \cup (1,\sqrt{5}]$.

**例 5**　已知函数 $y=f(x)=x^3$.求 $f(-1)$,$f(1)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$.

**解**

$$f(-1)=(-1)^3=-1;$$
$$f(1)=1^3=1;$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{1}{x^3};$$
$$f(x+1)=(x+1)^3.$$

**例 6**　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

符号函数的图像如图 1-2 所示.

符号函数的定义域为实数集 $R$,但当 $x>0$ 时,函数 $y=1$;当 $x=0$ 时,函数 $y=0$;当 $x<0$ 时,函数 $y=-1$.这种由两个或两

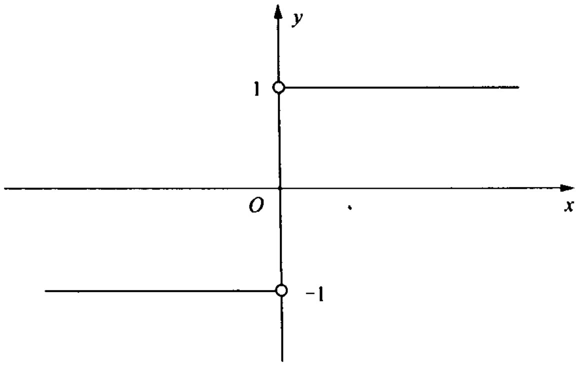


图 1-2

个以上解析式表示的函数称为**分段函数**.

用符号函数可以表示绝对值函数,即

$$y = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$$

**例 7** 取整函数

$$y = [x] \xlongequal{\text{def}} n(x = n + r, n \in Z, 0 \leqslant r < 1, x \in R)$$

可见,记号$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数. 例如$[2.1] = 2$, $[0.3] = 0$, $[-0.6] = [-1 + 0.4] = -1$, $[-3.5] = -4$,一般有

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

取整函数图像如图 1-3 所示.

取整函数又叫高斯(Gauss)函数,它是高斯在研究圆内整点问题时引进的一个函数. 它还有一个有趣的应用,即根据闰年设置的规律,推算出公元某一年的某一天是星期几.

一星期为什么定为七天?这大概出自月相变化的缘故,天空中再没有别的天象变化得如此明显,每隔七天便一改旧貌!另外,“七”这个数,恰与古代人已经知道的日、月、金、木、水、火、土七星的数目巧合. 因此,在古代神话中就用一颗星作为一日的保护神,

"星期"的名称也因之而起.

历史上的某一天究竟是星期几?这是一个有趣的计算问题.要了解这一点,先得从闰年的设置讲起.由于一个回归年不是恰好 365 日,而是 365 日 5 小时 48 分 46秒,或365.2422 日.为了防止这多出的 0.2422 日积累起来,造成新年逐渐往后推移,因此每隔 4 年便设置一个闰年,这一年的 2 月从普通的 28 天改为 29 天.这样,闰年便有 366 天.不过,这样补也不刚好,每百年差不多又多补了一天,因此又规定:遇到年数为"百年"的不设闰,扣回一天.这就是常说的"百年 24 闰".但是,百年扣一天还是不刚好,又需要每四百年再补回来一天.因此又规定:公元年数为 400 倍数者设闰.这么补来扣去,终于补得差不多刚好!例如,1976、1988 这些年数被 4 整除的年份为闰年;而 1900、2100 这些年则不设闰;2000 年的年数恰能被 400 整除,又要设闰,如此等等.

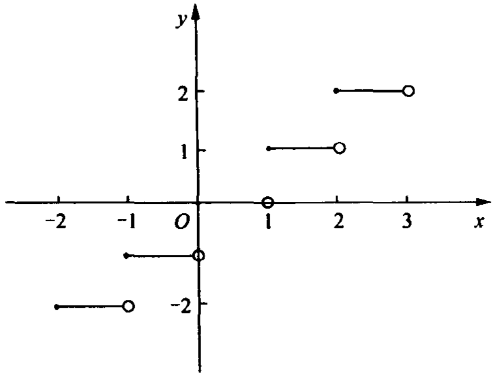

图 1-3

闰年的设置,无疑增加了我们对星期几推算的难度.

幸运的是数学家已为我们找到这样的公式:

$$n = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + y$$

这里变量 $x$ 是公元的年数;变量 $y$ 是从这一年的元旦算到这一天为止(包含这一天)的天数.

按上式求出 $n$ 后,除以 7,如果恰能除尽,则这一天为星期日;否则,余数为几,则为星期几.

例如公元321年3月7日,容易算出 $x-1=320$,而 $y=66$. 代入公式得

$$\begin{aligned} n &= 320+\left[\frac{320}{4}\right]-\left[\frac{320}{100}\right]+\left[\frac{320}{400}\right]+66 \\ &= 320+80-3+0+66 \\ &= 463 \equiv 1(\mathrm{mod}7) \end{aligned}$$

最后一个式子的符号表示463除以7余1.也就是说,这一天是星期一.这一结果完全符合历史事实:正是公元321年3月7日那一天,古罗马皇帝君士坦丁正式宣布采用"星期制".他规定每一星期有七天,第一天为星期日,而后星期一、星期二直至星期六,然后再回到星期日.如此永远循环下去!君士坦丁大帝还规定,宣布的那天为星期一.

### 1.1.3 函数的性质

(1) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $X$ 为一个对称数集,即 $x\in X$ 时,有 $-x\in X$.若函数满足

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in X,$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若函数满足

$$f(-x)=f(x),\forall x\in X,$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如,函数 $y=x^3$,$y=\sin x$ 都是奇函数;$y=x^2$,$y=|x|$ 和 $y=\cos x$ 都是偶函数,而 $y=x^3+x^2$ 是一个非奇非偶函数.不难看出,奇函数的图形是关于原点对称的,偶函数的图形是关于 $y$ 轴对称的.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义.$\forall x_1,x_2\in I$,若 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是**递增(递减)**的;又若 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是**不减(不增)**的.

递增函数和递减函数统称为**单调函数**.同样我们可以定义在无限区间上的单调函数.

例如,函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是递减的,而在 $(0, +\infty)$ 内是递增的.常数函数 $y = C(-\infty < x < +\infty)$ 既是一个不增函数又是一个不减函数.

(3) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 $X$ 上有定义,若 $\exists M_0 > 0$,使对 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M_0$,则称 $f(x)$ 在 $X$ 上是**有界的**;否则称 $f(x)$ 在 $X$ 上是**无界的**.

例如,$y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为 $|\sin x| \leqslant 1$;而 $y = 1/x$ 在 $(0,1]$ 上是无界的,但在 $[1, +\infty)$ 上是有界的.有界函数的界不是惟一的.例如对于 $y = \sin x$,不仅 1 是它的界,而且任何一个大于 1 的数都是它的界.不难看出,有界函数的图形总是位于平行于 $x$ 轴的直线 $y = -M_0$ 与 $y = M_0$ 之间.

(4) 周期性

设函数 $y = f(x), x \in \boldsymbol{R}$.若 $\exists T_0 > 0$,使对 $\forall x \in \boldsymbol{R}$ 有 $f(x + T_0) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是**周期函数**,$T_0$ 为其周期.

由定义可知,$kT_0 (k \in N)$ 都是它的周期,可见一个周期函数有无穷多个周期.若在无穷多个周期中,存在最小的正数 $T$,则称 $T$ 为 $f(x)$ 的最小周期,简称周期.

例如,$y = \sin x$, $y = \sin 2x$ 和 $y = \sin \pi x$ 等都是周期函数,它们的周期分别是 $2\pi$, $\pi$ 和 2;而 $y = \sin x^2$ 和 $y = \sin 2x + \sin \pi x$ 就不是周期函数了.对于常数函数 $y = C$ 来说,任何正实数都是它的周