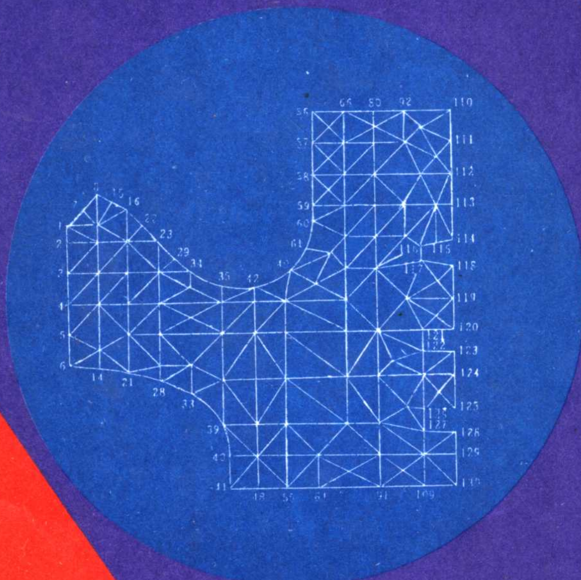
普通高等教育船舶类规划教材

# 有限元及其在动力机械中的应用

吕继汉　编



大连理工大学出版社

普通高等教育船舶类规划教材

# 有限元及其在动力机械中的应用

吕 继 汉 编

大连理工大学出版社

(辽)新登字16号

**图书在版编目(CIP)数据**

有限元及其在动力机械中的应用/吕继汉编.—大连:大连理工大学出版社,1995.12

ISBN 7-5611-1063-4

Ⅰ.有… Ⅱ.吕… Ⅲ.有限元-应用-动力机械 Ⅳ.TK05

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第19282号

## 内容简介

本书从满足教学要求出发,根据由浅入深和理论与实践紧密结合的原则,系统通俗地论述了有限元的基本原理和基本方法;深入具体地介绍了有限元在动力机械中的弹性及弹塑性应力分析、弹性接触问题分析、稳定温度场计算以及弹性体的振动等方面的应用;对有限元程序设计特点进行了专章讨论。并在书末附有供参考用的计算程序。每章后面均附有思考题。

本书除可用作高等工程院校动力机械专业教材外,也可供工程技术人员、高等学校教师、研究生参考。

**有限元及其在动力机械中的应用**

吕继汉 编

*　*　*

大连理工大学出版社出版发行

(大连市凌水河　邮政编码　116024)

大连理工大学印刷厂印刷

*　*　*

开本:787×1092　1/16　印张:17.5　字数:432千字

1995年12月第1版　1995年12月第1次印刷

印数:1—1800册

*　*　*

责任编辑:王君仁　责任校对:寸　土

封面设计:孙宝福

*　*　*

ISBN 7-5611-1063-4 / TK·26　定价:10.00元

# 出 版 说 明

根据国务院国发(1978)23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”,中国船舶工业总公司负责全国高等学校船舶类专业教材编审、出版的组织工作。

为了做好这一工作,中国船舶工业总公司相应地成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”、“水中兵器”五个教材小组,聘请了有关院校的教授、专家60余人参加工作。船舶类专业教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的专家组织,其任务是做好高等学校船舶类专业教材的编审工作,为提高教材质量而努力。

在总结前三轮教材编审、出版工作的基础上,根据国家教委对“八五”规划教材要“抓好重点教材,全面提高质量,适当发展品种,力争系统配套,完善管理体制,加强组织领导”的要求,船舶总公司于1991年又制定了《1991~1995年全国高等学校船舶类专业规划教材选题》。列入规划的选题共107种。

这批教材由各有关院校推荐,同行专家评阅,教材委员会(小组)评议,完稿后又经主审人审阅,教材委员会(小组)复审,然后分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及有关高等学校的出版社出版。

为了不断地提高教材质量,希望使用教材的单位和广大师生提出宝贵意见。

中国船舶工业总公司教材编审室

1992年5月

# 前　言

本教科书是在编者多年来从事高等学校动力机械类专业有限元教学实践的基础上，根据“船舶动力教材委员会”拟订的“教学基本要求”而编写的。全书共分十章，讲授时数约50学时。

由于有限元具有综合性较强的特点，为了学好本门课程，学生事先应具有线性代数、算法语言、理论力学、材料力学以及传热学等方面的基本知识。

在内容编排上，本书首先满足教学需要，从培养学生掌握有限元基本原理、解题方法、程序设计以及使用电子计算机求解工程有关问题的基本技能出发，在阐述有限元基本原理的基础上，着重围绕着在动力机械工程中所涉及的较普遍的计算问题而编排的。本书第一章、第二章介绍有限元的预备知识，为后章节的讲授提供必要的数学和力学的理论依据，对变分原理和弹性理论有关公式做了适当的介绍。第三章是本书的重点章节，以具有代表性的平面应力问题为例，系统地阐述了有限元法基本公式的推导与解题基本步骤，并给出了例题和连杆应力分析计算应用实例。第四章介绍了轴对称应力分析问题，给出了汽轮机轮盘的有限元分析计算应用实例。第五章结合动力机械特点，并利用稳定温度场的有限元求解过程进一步阐明有限元的解题思想，对用有限元法进行稳定温度场计算问题进行了讲解，并给出了平面稳定温度场计算例题和活塞轴对称稳定温度场计算应用实例。第六章考虑到学生的提高和发展，对等参数单元和三维应力分析作了介绍，并给出了曲轴三维应力分析计算应用实例。第七章对在动力机械工程中经常遇到的弹性接触问题及其有限元混合解法作了介绍。第八章把有限元法从弹性领域扩展到塑性领域，讨论了弹塑性应力分析的有限元法。第九章则把有限元法从静态分析引向动态分析，对弹性体的振动问题作了阐述。第十章介绍有限元法程序设计基础及典型程序剖析，并附有三个用FORTRAN语言编写的源程序，作为学生上机计算练习之用。另外，为了让学生在学习中能掌握每章的基本内容，各章后边均附有思考题。

在本书的编写过程中，得到了大连理工大学内燃机研究所张久成教授和工程力学研究所陈万吉教授的大力支持，承蒙大连理工大学郭成璧教授、戈仰宗教授和大连铁道学院吴昌华教授评阅此书，并由郭成璧教授任主审，编者对此深表感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误之处，请读者提出宝贵意见。

编　者

1995 年 12 月

# 目　　录

# 引　言

有限元是60年代初期随着电子计算机的发展而发展起来的一门新的数值计算方法。它运用离散的概念，假想把连续体(指物体或结构)分割成有限个有限大小的多边形(当为平面问题的二维区域时)或多面体(当为空间问题时)，这些多边形或多面体，就称为有限元(或称为有限单元或者有限元素)。多边形或多面体的顶点称为节点，如图0.1所示。各单元之间沿周边本来是整体相连的，现在认为它们彼此只在节点处相连接取节点处的位移(广义位移)作为基本未知量，这样，就把原来是无限多自由度的体系简化成有限多个自由度的体系了。这个过程就称为连续体的有限元离散化。

一个连续体通过有限元离散化后就变成一个离散体(又称单元组合体)，它是真实结构的一个近似力学模型，而整个的数值计算就是在这个离散化的模型上进行的。在每一个单元内运用变分法，即利用与原问题中微分方程相等价的变分原理来进行推导，从而使原问题的微分方程组退化到代数联立方程组，使问题归结为解线性方程组，由此得到数值解答。

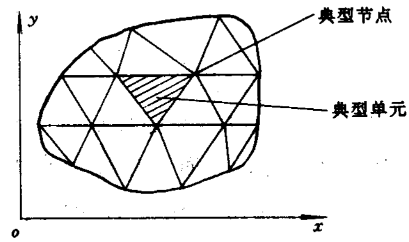


图0.1

有限元法是工程分析中最强有力而又最通用的计算方法，其应用范围很广，并且由于其实践性而具有强大的生命力。利用有限元进行结构分析，实质上也是一种“电子计算机的数值实验”，它不仅使过去无法进行运算的课题获得数值解，而且逐渐在代替某些成本高、时间长的常规实验。

有限元首先应用于航空工程，由于其方法的有效性，迅速被推广应用于造船、机械、动力、建筑和核子等工业部门。并从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学和振动学等领域。

近年来，有限元成功地用在内燃机的研制工作中，为从“经验设计”向“理论设计”迈进，创造了良好的开端。

# 第一章　变分原理及有限元法

有限元法从其推导方法来看，主要有直接法和变分法两类。直接法又称直接刚度法，它的优点是对初学有限元的读者来说比较直观，易于理解和掌握。缺点是在单元特征分析中要引入节点力的概念，要专门研究单元载荷移置及节点平衡条件，并且不易直接推广到流场、温度场、电磁场等非结构问题中去。而变分法是把有限元法归结为泛函求极值的问题。实践告诉我们，描述某些工程问题的微分方程的求解往往比较困难，而从相应泛函变分求近似解常常容易些。另外，用变分法来推导有限元不仅可以避免引入节点力的概念和节点平衡条件，还可使有限元建立在更加坚实的数学基础上，扩大它的应用范围。

对于某些问题，在相应的泛函尚未找到或者根本不存在相应泛函的情况下，就无法用变分法了，此时可以用加权余数法直接从基本微分方程出发，求出近似解。

本书将采用变分法推导有限元。

## §1.1　变分法的基本概念

### 一、泛函的定义

在工程实践中，我们常常遇到 $y = y(x)$ 这种类型的函数，这时因变量 $y$ 的值是由自变量 $x$ 来确定的。但是，有时我们还遇到另一种特殊类型的函数，这时因变量的值却是由一个函数 $(y = y(x))$ 或几个函数 $(y_1(x), y_2(x), \cdots)$ 来确定。例如在连接 $xoy$ 平面上给定 $A$ 和 $B$ 两点间的曲线长度 $L$ 时，由图 1.1 可知，由于长度 $L$ 是由连接 $A,B$ 两点的曲线形状所决定的，曲线形状不同，长度 $L$ 就不同，所以长度 $L$ 是曲线方程 $y = y(x)$ 来确定的。若 $A,B$ 两点的坐标分别为 $(x_0, y_0)$ 和 $(x_1, y_1)$，则由高等数学可知

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x$$

可见，只要给出具体的曲线方程，就可由上式算出曲线长度 $L$，而不同的曲线方程对应着不同的长度 $L$，所以曲线长度 $L$ 是曲线 $y = y(x)$ 的函数。这种其值由一个或几个函数所确定者，我们称为泛函，即曲线长度 $L$ 是曲线 $y = y(x)$ 的泛函，并记作 $L[y(x)]$，即

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

作为理解泛函概念的另一个例子，如图 1.2 所示为一直梁弯曲的情况，由结构力学得知，直梁弯曲时的变形能 $U$ 为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x$$

其中 $y(x)$ 是梁中性轴的挠度曲线，它是 $x$ 的函数。显然，梁上有不同的载荷时，直梁将有不同的挠度曲线 $y(x)$，因此变形能是挠度曲线函数的函数，即变形能 $U$ 是 $y(x)$ 的泛函，记作

$$U[y(x)]=\frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x)]^2\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

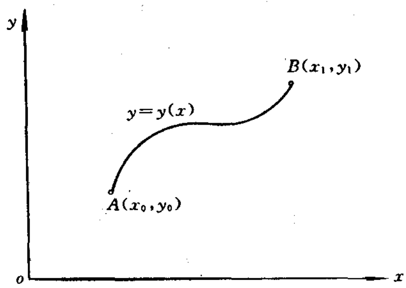



图 1.1　连接二定点的曲线弧长

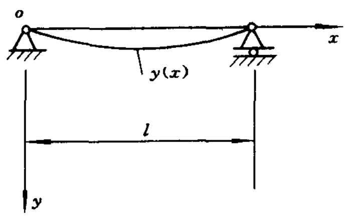



图 1.2　直梁弯曲

再如图 1.3 所示的三维空间 $xyz$ 中，对应区域 $D$ 有一曲面，设该曲面的函数为 $z(x,y)$。通过区域 $D$ 的周界可以有无数多个曲面，其曲面面积 $S$ 的大小取决于曲面形状，即取决于曲面函数 $z(x,y)$。

图中微面积 $\Delta S$ 边长各为 $\Delta L_1$ 及 $\Delta L_2$，则有

$$\Delta S=\Delta L_1\times\Delta L_2=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2}\mathrm{d}x\times\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}y$$

$$\approx\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式中忽略了高阶无穷小。而

$$S=\sum\Delta S=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以曲面面积 $S$ 是函数 $z(x,y)$ 的泛函，记作

$$S[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3}$$

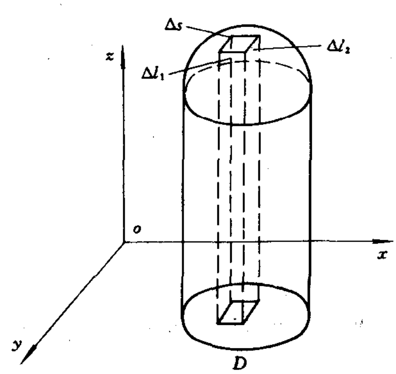



图 1.3　三维曲面

通过以上三个例子，我们可以对泛函作一简要的定义：在某个变化中，有变量 $J$ 及某一类函数 $[y(x)]$，如果对于这类函数 $[y(x)]$ 中的每一个函数，按照某种法则（一般是积分形式）都有变量 $J$ 的某个数值与之相对应，那么我们称变量 $J$ 为这类函数 $[y(x)]$ 的泛函，记作

$$J=J([y(x)] \tag{1.4}$$

对于多元函数 $\phi(x,y,z)$ 的泛函，记作

$$J=J[\phi(x,y,z)] \tag{1.5}$$

我们可以推广到多个变量函数的泛函，例如变量函数 $y(x),z(x)$ 的泛函可记作

$$J=J[y(x),z(x)] \tag{1.6}$$

## 二、变分法

我们知道，函数有极值问题。自然从函数的极值会想到泛函的极值。函数的极值是微分研

究的对象，而泛函的极值则是变分法研究的对象。也就是说，研究函数的极值问题用的是微分学，而研究泛函极值的方法就是变分法，泛函数值问题就是变分命题。这里介绍一个历史上著名的变分命题——最速降线问题。

在 $xoy$ 铅垂平面上有 $A$ 和 $B$ 两点，它们不在同一条水平线上，也不在同一条铅垂线上，如图 1.4 所示。设有一重物在重力作用下从 $A$ 点沿某一曲线自由下滑到 $B$ 点并不计重物与曲面之间的摩擦力。显然，重物从 $A$ 点下滑到 $B$ 点所需的时间，随重物下滑时所沿曲线的形状不同而不同。如果求下滑时间最短的曲线，那么这就是最速降线问题，求出的曲线就是最速降线。下边我们把最速降线用数学形式来表达。

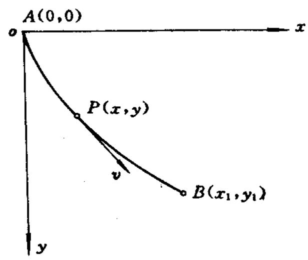



图 1.4 最速降线图

设 $A$ 点与坐标原点重合，$B$ 点的坐标为 $x_1, y_1$。若重物 $P$ 从 $A$ 点下滑到任意一点 $x, y$ 时的速度为 $v$，那么从 $A$ 点到该点失去的位能为 $mgy$，获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$，所以由能量守恒定律可得

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

或

$$v = \sqrt{2gy} \tag{1.7}$$

其中 $m$ 为重物的质量，$g$ 为重力加速度。如以 $S$ 表示从 $A$ 算起的弧长曲线，则

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

弧微分的表达式为：

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

所以

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

其中 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。因此，当重物 $P$ 从 $A$ 点运动到 $B$ 点时所需的时间为

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.11}$$

可见，下滑时间 $T$ 是函数 $y(x)$ 的泛函，并记作 $T[y(x)]$，即

$$T = [y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\mathrm{d}x \tag{1.12}$$

显然，不同的函数 $y(x)$，对应着不同的时间 $T$，而最速降线问题就是求时间 $T$ 最小时的函数 $y(x)$。

这样，最速降线问题可以说成是：欲求一条满足边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$ 的曲线，使泛函 $T[y(x)]$ 取极小值。因此最速降线问题亦是泛函的极值问题，可用变分法来求解。

在上述这个变分命题中，我们可以看出它有以下几个特点：

(1) 自变量只有一个 $x$，待定函数只有一个 $y(x)$，函数的导数只有一阶 $y'(x)$；

(2) 边界是固定的，即自变量 $x$ 端点与函数 $y(x)$ 端点值都是固定不变的，且 $y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$；

(3) 除边界固定外，没有其它任何条件。

由此可见，最速降线变分命题是一个泛函，包括一阶导数，具有一个待定函数，含有一个自变量的，固定边界的无条件变分命题。这是变分法中最简单的变分命题。这种最简单的变分命题可以写成一般形式，即：

在通过 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 两端点条件下，选取 $y(x)$，使泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)] \mathrm{d}x \tag{1.13}$$

为极值。

对于泛函具有多个待定函数，譬如具有两个待定函数 $y(x), z(x)$ 的变分命题，其泛函形式为

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y, y', z, z'] \mathrm{d}x \tag{1.14}$$

而边界条件在(1.13)式基础上，再加 $Z(x_0)=Z_0, Z(x_1)=Z_1$ 即可。

对于泛函含有多个自变量，譬如含有两个自变量 $x, y$ 的变分命题，其泛函形式为

$$J[W(x,y)] = \iint_{\Omega} F[x, y, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.15}$$

而边界条件是所有函数 $W(x,y)$ 在积分区域 $\Omega$ 的边界 $S$ 上的值已经给定。

通过以上变分命题的讨论，我们可以认识到，泛函的极值是泛函的重要特性，而这一特性正是变分所要研究的内容。

## §1.2　变分的特性

变分在泛函研究中所起的作用，正如微分在函数研究中所起的作用一样。为了把变分特性讲清楚，现把大家都熟悉的函数微分与变分作对比进行讨论。

**一、函数的定义与泛函的定义**

对函数来说，如果对于变量 $x$ 的某一变域中的每个 $x$ 值，$y$ 有一值与之对应，即数 $y$ 对应于 $x$ 的关系成立，则我们称因变量 $y$ 是自变量 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$。

对泛函来说，如果对于某一类函数 $y(x)$ 中的每一个函数 $y(x)$，$J$ 有一值与之对应，即 $J$ 对应于 $y(x)$ 的关系式成立，则我们称因变量 $J$ 是函数 $y(x)$ 的泛函，记为 $J=J[y(x)]$。

由此可见，函数是因变量与自变量之间的关系，而泛函是因变量与自变元 —— 函数之间的关系。两种概念必须严格区分，尤其是不能把复合函数与泛函相混。事实上，在复合函数中，因变量是通过中间变量而依赖于自变量的，因变量与自变量之间有一一对应的关系。但在泛函中，因变量直接依赖于自变元 —— 函数，与函数中的自变量没有对应关系，因为给定一个自变量后，就有一个对应的函数值，而这一个具体的函数值却不能给出一个泛函值。

## 二、函数的连续性与泛函的连续性

对函数 $y = f(x)$ 来说，如果对于自变量 $x$ 的微小改变，有函数 $f(x)$ 的微小改变跟它对应，原函数 $f(x)$ 是连续的。

对泛函 $J = J[y(x)]$ 来说，如果对于自变元 —— 函数 $y(x)$ 的微小改变，有泛函 $J[y(x)]$ 的微小改变跟它对应，则泛函 $J[y(x)]$ 是连续的。

可见，泛函的连续与函数的连续是类似的。但是需要明确泛函的自变元 —— 函数 $y(x)$ 微小改变的含义。若有两条同类曲线 $y = y(x)$ 和 $y_1 = y_1(x)$，那么自变元的微小改变是指 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 有定义的一切 $x$ 值 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 之差的模要很小，即曲线 $y = y(x)$ 和另一条曲线 $y_1 = y_1(x)$ 纵坐标之间很接近，如图 1.5 所示。有时不但纵坐标之间要接近，而且在对应点处的切线方向之间也要接近，即要求 $|y(x) - y_1(x)|$ 与 $|y'(x) - y'_1(x)|$ 都要很小，如图 1.6 所示。当 $|y(x) - y_1(x)|$ 很小时，我们称曲线 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 有零阶接近度，当 $|y(x) - y_1(x)|$ 和 $|y'(x) - y'_1(x)|$ 都很小时，我们称曲线 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 有一阶接近度，余此类推。

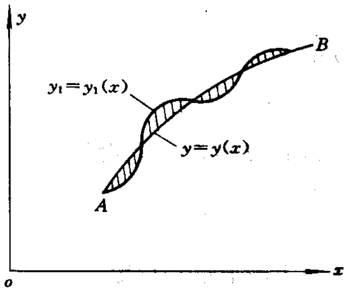



图 1.5 曲线零阶接近度

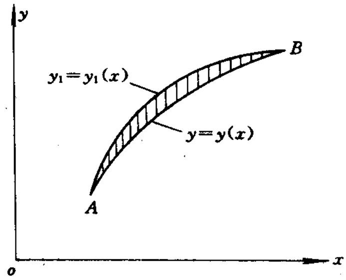



图 1.6 曲线一阶接近度

## 三、函数的微分与泛函的变分

先看函数的增量与泛函自变元的变分

对函数 $y = f(x)$ 来说，自变量 $x$ 取得增量 $\Delta x$，函数有一增量 $\Delta y$，即

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.16}$$

所以函数 的增量 $\Delta y$，是指同一条曲线 $y(x)$ 上在 $x$ 与 $x + \Delta x$ 两点处的函数值之差，而由函数的微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 可知 $\mathrm{d}x = x'\Delta x = \Delta x$，即函数自变量 $x$ 的微分就是它的增量 $\Delta x$。

对泛函 $J = J[y(x)]$ 来说，自变元 —— 函数的增量，是指 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 两个函数之差，并记为 $\delta_y$，即

$$\delta_y = y(x) - y_1(x) \tag{1.17}$$

可见，函数的增量 $\Delta y$ 与泛函自变元 —— 函数的变分 $\delta_y$ 是两个不同的概念，必须严格区分。

再看函数的微分与泛函的变分。

按照拉格朗日定义，函数 $y = f(x)$ 的微分

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0} \tag{1.18}$$

而泛函 $J = J[y(x)]$ 的变分若记它为 $\delta J$，则

$$\delta J[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0} = J'(\alpha)|_{\alpha=0} \tag{1.19}$$

其中 $\alpha$ 是任意小的正数。

变分运算与微分运算在形式上有相似之处，而且可以相互交换，譬如

$$\delta(\int F\mathrm{d}x) = \int(\delta F)\mathrm{d}x$$

$$\delta(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) = \frac{\mathrm{d}(\delta u)}{\mathrm{d}x}$$

**四、函数的极值与泛函的极值**

先看极大值与极小值的定义。

对于函数 $y=f(x)$ 来说，如果函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的值 $f(x_0)$ 比它在 $x_0$ 点的适当小的邻域内各点的值都要大(或都要小)，即 $f(x_0)>f(x)$(或 $f(x_0)<f(x)$)，则 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 的极大值(或极小值)，而函数的极大值或极小值统称为函数的极值。

对泛函 $J=J[y(x)]$ 来说，如泛函 $J[y(x)]$ 相应于某一条曲线 $y_0(x)$ 的值 $J[y_0(x)]$ 比相应于与 $y_0(x)$ 接近的任一条曲线的值都要大(或都要小)，即 $J[y_0(x)]>J[y(x)]$(或 $J[y(x)]>J[y_0(x)]$)，则 $J[y_0(x)]$ 就是泛函 $J[y(x)]$ 的极大值(或极小值)。同样，泛函的极大值与极小值也统称泛函的极值。

再看实现极值的必要条件。

对于可微函数 $y=f(x)$ 来说，实现极值的必要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处达到极值，则在该点处有 $\mathrm{d}y=0$，根据拉格朗日定义有

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.20}$$

对于有变分的泛函 $J=J[y(x)]$ 来说，实现极值的必要条件是 $J[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极值，则在该曲线上有 $\delta J=0$。根据拉格朗日定义有

$$\delta J = \delta J[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.21}$$

需要指出的是，泛函极值有强极值与弱极值之分，因为曲线之间有不同的接近度。对于零阶接近度而言，叫做强极值；对于一阶以上接近度而言，叫做弱极值。

## §1.3　变分法的基本预备定理

在利用泛函实现极值的条件求解问题时，要用到变分法的基本预备定理。这个定理是：

如果函数 $F(X)$ 在区间 $(x_1,x_2)$ 上连续，且对于只满足某些一般性条件的任意选定的函数 $\delta y(x)$ 有

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.22}$$

则在线段 $x_1\leqq x\leqq x_2$ 上

$$F(x)\equiv 0 \tag{1.23}$$

其中 $\delta y(x)$ 的一般性条件是：一阶或若干阶可微，在线段 $(x_1,x_2)$ 的端点处为零($\delta y(x_1)=$

$\delta y(x_2)=0)$，$|\delta y(x)|<\varepsilon$ 或 $|\delta y(x)|$ 及 $|\delta y'(x)|<\varepsilon$ 等。

这一定理可用反证法来说明。假定在区间 $x_1 \leqq x \leqq x_2$ 上一点处 $x=\bar{x}$，$F(\bar{x})\neq 0$，如图 1.7 所示，那么由 $F(x)$ 的连续性可知，$F(x)$ 在点 $\bar{x}$ 的邻域($\bar{x}_1 \leqq \bar{x} \leqq \bar{x}_2$) 内不变号(譬如它都大于零)。既然 $\delta y(x)$ 是任意选定的函数，我们可以这样选取 $\delta y(x)$，它在 $\bar{x}$ 的领域内不变号且大于零，在领域外恒等于零，如图 1.7 所示。这样，如果 $F(x)$ 在点 $x=\bar{x}$ 处不等于零，那么我们可以选取区域 $\bar{x}_1 \leqq \bar{x} \leqq \bar{x}_2$，使 $F(x)$ 在该区域内不变号(因为 $F(x)$ 在区间$[x_1,x_2]$ 上连续)，得

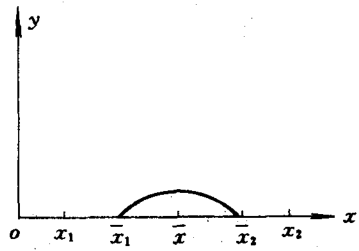



图 1.7

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x=\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x\neq 0 \quad (1.24)$$

这是因为乘积 $F(x)\delta y(x)$ 在区间$[\bar{x}_1,\bar{x}_2]$ 内不变号，而在区间外等于零的缘故。式(1.24)显然与假设式(1.22)相矛盾。由此可见，在 $x=\bar{x}$ 处 $F(x)$ 一定等于零，而 $x=\bar{x}$ 又是在$(x_1,x_2)$ 区间内任意选取的，所以在区间$(x_1,x_2)$ 上 $F(x)\equiv 0$。

对于多变量问题，也有类似的变分预备定理，现不做证明地叙述如下：

如果 $F(x,y)$，在$(x,y)$ 平面内 $\Omega$ 域中连续，设 $\delta z(x,y)$ 在 $\Omega$ 域的边界上为零，$|\delta z|\leqq\varepsilon$，$|\delta z_x|\leqq\varepsilon$，$|\delta z_y|\leqq\varepsilon$，还满足连续性及一阶或若干阶的可微性，对于这样选取的任意函数 $\delta z(x,y)$，若

$$\iint_{\Omega} F(x,y)\delta z(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (1.25)$$

则在域 $\Omega$ 内，有

$$F(x,y)\equiv 0 \qquad (1.26)$$

其中

$$Z_x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \qquad Z_y=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

## §1.4 欧拉方程的导出及其重要意义

本节将介绍在泛函求极值的推导过程中，如何导出欧拉方程(微分方程)。从而揭示出微分方程与其相应泛函之间的求解关系。这是利用变分法推导有限元的数学理论基础。

**一、一维欧拉方程的导出**

首先讨论最简单的泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_2}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x \qquad (1.27)$$

的极值问题。其中容许曲线(即给定泛函以确定值的曲线) $y(x)$ 的边界点是固定的，即

$$y(x_0)=y_0, \qquad y(x_1)=y_1 \qquad (1.28)$$

其中函数 $F(x,y,y')$ 是二阶可导的，$y'=y'(x)=\mathrm{d}y(x)/\mathrm{d}x$。

现在假定 $y=y(x)$ 是使泛函式(1.27)取得极值且满足边界条件(1.28)的一条曲线，称为极值曲线。然后给 $y(x)$ 以变分 $\delta y$，并求出泛函的变分 $\delta J$，使 $\delta J=0$。