

学 数 学 辅 导 系 列 丛 书

高等数学辅导

(第3版) 下册

盛祥耀 葛严麟 胡金德 张元德 编



清华大学出版社

大 学 数 学 辅 导 系 列 丛 书

高等数学辅导

(第3版) 下册

盛祥耀 葛严麟 胡金德 张元德 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书基本上是根据全国工科院校高等数学教学基本要求编写的,也是编者多年来在清华大学从事高等数学的教学和辅导工作的结晶。

全书分上、下两册,下册包括多元函数及其微分法、重积分、曲线积分和曲面积分、级数、常微分方程共5章内容。每章的各节以“内容提要”开始,概括本节的主要知识内容;然后是“例题分析”,通过分析、讲解、提问、小结等方式对各种题型的例题进行解剖、辅导;每章的末尾,安排“习题与答案”,供读者练习、检查。

本书可作为工科大学生、自学高等数学者学习时的辅导教材,也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导. 下册 / 盛祥耀等编. —3版. —北京:清华大学出版社,2004
(大学数学辅导系列丛书)

ISBN 7-302-06918-2

I. 高… II. 盛… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059051 号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

责任编辑:刘 颖

版式设计:肖 米

印刷者:北京市清华园胶印厂

装订者:三河市新茂装订有限公司

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:140×203 印张:16.375 字数:410千字

版 次:2004年2月第3版 2006年4月第2次印刷

书 号:ISBN 7-302-06918-2/O·311

印 数:8001~11000

定 价:22.00元

第 1 版 序

目前社会上有不少青年在自学或通过电视学习工科类的高等数学,他们希望得到老师的辅导,编写本书的目的就是想要在这方面提供一些我们力所能及的帮助.同时也考虑到了在校学习的工科类大学生的情况,希望对他们也能提供一些辅导.

本书是通过例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的.例题的选择基本上符合全国工科院校高等数学课程教学的基本要求,因此,不管读者使用什么样的工科类教材,都能使用此书.

本书共分十二章:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等.全书共收集了 500 道左右的例题,850 道左右的习题.例题中有基本概念讨论题;有似是而非的提问题;有初学者易在计算中出现的错误或不易理解的澄清题;有介绍基本方法、思路的计算或证明题;有一题多解的开扩思路题;也有较灵活的综合题.不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析,在讲解完后有些还提出新问题,帮助读者进一步掌握和理解.这些例题的绝大部分都在编者所在的单位清华大学教学上使用过,其中不少例题还是我们多年来经常使用的.

读者在使用本书时,我们建议先看一下每一节的内容提要及例题分析的题目,自己想一想,动手算一算,然后再去看例题分析,这样帮助会大些.为了使读者有指导地做习题,在每章的最后附有习题(有 * 号题可暂时略去不看或不做),这些题会做了,教学基本要求所规定的内容就达到了.

编写本书时,我们参考了下列教材:清华大学高等数学教研组

——第 1 版 序——

编写的《高等数学(基础部分)》和习题集(未出版),同济大学数学教研组编的《高等数学习题集》,别尔曼著,景毅等译的《数学解析习题汇编》,吉米多维奇著,李英冻译的《数学分析习题集》,在此特向有关人员表示感谢.

编者力图使本书能反映清华大学高等数学教研组近 40 年来辅导工作中的经验.但由于我们水平较低,反映肯定是不充分的.如果有机会我们还要不断完善.

本书的缺点和错误,恳请读者指正.

编 者

第 2 版 序

大约在十年前,我们编写了这本《高等数学辅导》,它的主要对象原想是社会上自学或通过电视学习工科类高等数学的青年.但事实上,不少学校的本科生(包括重点大学的),从事工科院校数学教学的教师,甚至报考硕士研究生的读者也都在使用这本书,受到不同层次读者的欢迎,使我们非常高兴.

自第 1 版发行后,我们不断收到读者的来信,表示关心和支持,对此我们表示深切的感谢.根据读者的使用情况,我们对第 2 版作了以下的修改:适当调整了一些例题和习题,但保持全书原有的特色;增加了自我检查题,帮助读者自测自己的程度和水平;为了不使篇幅增加,删去了原来例题栏目,仍保留了例题分析等.

我们相信《高等数学辅导》第 2 版将会更加受到不同层次读者的欢迎,也希望读者继续给我们支持和关心.

编 者

1992 年 10 月于清华园

第 3 版 序

第 3 版保留了第 2 版的主要内容和章节安排. 在第 3 版中的主要变化体现在如下 3 个方面:

(1) 内容的安排更加条理化、系统化, 并以条目的形式列出, 以利于读者归纳总结.

(2) 根据当前高等院校教育中课堂教学时间减少的实际情况, 加强了解题过程中的分析成分, 以利于启发读者的数学思维能力, 提高读者分析问题和解决问题的能力.

(3) 增加了一些综合题, 以提高读者综合运用所学知识的能力. 这些题目与当前考研试题的要求相当. 这为有志于攻读硕士研究生的读者在学习本门课程时创造了了解考研试题水平的条件.

希望《高等数学辅导》第 3 版继续得到广大读者的关心、支持, 并恳请读者批评指正.

编 者

2003 年 2 月于清华园

目 录

第 8 章 多元函数及其微分法	1
8.1 函数、极限、连续、偏导数	1
8.1.1 内容提要	1
1 函数的定义	1
2 二元函数的极限定义	1
3 二元函数的连续定义	2
4 二元连续函数的性质	2
5 偏导数的定义(以二元函数为例)	2
6 高阶偏导数	2
8.1.2 例题分析	3
1 函数概念中的一些问题、函数的 符号运算	3
2 函数的定义域	6
3 有关二元函数极限中的一些问题	9
4 有关偏导数中的一些问题	13
5 求偏导数	17
8.2 全微分及其在近似计算中的应用	19
8.2.1 内容提要	19
1 全增量的定义	19
2 全微分的定义	20
3 可微的定义、近似计算公式	20
4 方向导数的定义	21
5 方向导数的计算公式	21
8.2.2 例题分析	21

1	偏导数与全微分的关系	21
2	求全微分	24
3	全微分在近似计算中的应用	24
4	方向导数	28
8.3	多元函数的微分法	30
8.3.1	内容提要	30
1	复合函数的微分法	30
2	隐函数的微分法	31
8.3.2	例题分析	32
1	由具体函数所构成的复合函数的 微分法	32
2	由抽象函数所构成的复合函数的 微分法	34
3	既有具体函数又有抽象函数所 构成的复合函数的微分法	36
4	抽象函数的二阶偏导数	39
5	隐函数的微分法	41
8.4	曲面的切平面、空间曲线的切线	48
8.4.1	内容提要	48
1	曲面的切平面	48
2	空间曲线的切线	48
8.4.2	例题分析	49
1	空间曲线的切线与法平面方程	49
2	曲面的切平面与法线	52
8.5	极值	56
8.5.1	内容提要	56
1	极值定义	56
2	函数 f 极值点的必要条件	57

3	极值点的充分条件·····	57
4	条件极值·····	57
8.5.2	例题分析·····	58
1	有关极值概念中的一些问题·····	58
2	极值与最值·····	59
3	具有一个约束条件的条件极值问题·····	63
4	具有两个约束条件的条件极值问题·····	65
8.6	综合题、杂题·····	66
8.7	习题与答案·····	72
8.7.1	习题·····	72
8.7.2	答案·····	79
第9章	重积分·····	83
9.1	二重积分·····	83
9.1.1	内容提要·····	83
1	二重积分定义·····	83
2	二重积分性质·····	83
3	二重积分的计算方法——累次 积分法·····	84
4	二重积分的几何意义·····	86
9.1.2	例题分析·····	87
1	直角坐标中化二重积分为 累次积分·····	87
2	极坐标中化二重积分为累次积分·····	93
3	二重积分的计算·····	96
4	积分区域的对称性及被积函数 的奇偶性的利用·····	103
5	被积函数中绝对值的处理·····	107
6	二重积分的几何应用·····	108

目 录

7	二重积分中等式或不等式的证明	111
8	综合题	116
9.2	三重积分	120
9.2.1	内容提要	120
1	定义	120
2	计算方法	121
3	几何意义	122
9.2.2	例题分析	122
1	在直角坐标下的定限及计算	122
2	在直角坐标系中交换积分次序	123
3	在柱面坐标、球面坐标中的计算	127
4	积分区域对称性及被积函数 奇偶性的利用	130
5	几何应用	133
6	证明题、综合题	135
9.3	重积分的物理应用	141
9.3.1	内容提要	141
1	质量	141
2	静力矩和质心	142
3	转动惯量	143
4	引力	143
9.3.2	例题分析	144
1	静力矩和质心	144
2	转动惯量	148
3	引力	151
9.4	习题与答案	156
9.4.1	习题	156
9.4.2	答案	162

第 10 章 曲线积分和曲面积分	166
10.1 曲线积分	166
10.1.1 内容提要	166
1 对弧长的曲线积分(第一型 曲线积分)	166
2 对坐标的曲线积分(第二型 曲线积分)	168
3 两类曲线积分之间的关系	170
10.1.2 例题分析	170
1 对弧长的曲线积分	170
2 对坐标的曲线积分	176
10.2 格林公式、积分与路径无关的充要条件	182
10.2.1 内容提要	182
1 格林公式	182
2 曲线积分与路径无关 的等价条件	182
10.2.2 例题分析	183
1 L 是简单封闭曲线的情况	183
2 L 不是封闭曲线的情况	184
3 积分与路径无关	187
4 复连域的情况	190
5 综合题	195
10.3 曲面积分	200
10.3.1 内容提要	200
1 对曲面面积的曲面积分(第一型 曲面积分)	200
2 对坐标的曲面积分(第二型 曲面积分)	201

— 目 录 —

3 两类曲面积分的关系·····	203
10.3.2 例题分析·····	203
1 对面积的曲面积分·····	203
2 对坐标的曲面积分·····	214
10.4 高斯公式、斯托克斯公式及它们的应用·····	219
10.4.1 内容提要·····	219
1 高斯公式·····	219
2 斯托克斯公式·····	219
3 空间曲线积分与路径无关 的条件·····	220
10.4.2 例题分析·····	221
1 高斯公式及其应用·····	221
2 斯托克斯公式及其应用·····	226
10.5 场论初步·····	232
10.5.1 内容提要·····	232
1 梯度·····	232
2 通量和散度·····	232
3 环流量和旋度·····	232
4 有势场和势函数·····	233
10.5.2 例题分析·····	233
1 方向导数和梯度·····	233
2 通量与散度·····	236
3 环流量与旋度·····	238
10.6 习题与答案·····	240
10.6.1 习题·····	240
10.6.2 答案·····	247
第 11 章 级数·····	250
11.1 数项级数的基本概念·····	250

11.1.1	内容提要	250
1	无穷级数概念	250
2	部分和概念, 收敛、发散概念	250
3	级数收敛的必要条件	250
4	级数的基本性质	251
11.1.2	例题分析	251
1	利用级数的收敛性定义判断级 数的收敛性	251
2	利用级数的性质判断级数 的收敛性	254
11.2	同号级数收敛性的判别法	258
11.2.1	内容提要	258
1	定义	258
2	定理	258
3	正项级数收敛性的判别法	258
11.2.2	例题分析	259
1	利用比较法及其极限形式判断 级数收敛性	259
2	利用达朗贝尔判别法、柯西判别 法及柯西积分判别法判敛	262
3	证明题、杂题	267
11.3	交错级数与任意项级数	273
11.3.1	内容提要	273
1	定义	273
2	绝对收敛与条件收敛	273
3	莱布尼兹判别法	273
11.3.2	例题分析	273
1	交错级数收敛、条件收敛	

	与绝对收敛·····	273
	2 综合题、杂题 ·····	283
11.4	函数项级数的一般概念 ·····	291
11.4.1	内容提要 ·····	291
	1 定义·····	291
	2 一致收敛概念·····	292
	3 和函数的解析性质·····	292
11.4.2	例题分析 ·····	293
	1 求函数项级数的收敛域·····	293
	2 判别函数项级数的一致收敛性·····	297
11.5	幂级数的收敛半径、收敛域及和函数·····	301
11.5.1	内容提要 ·····	301
	1 定义·····	301
	2 阿贝尔定理·····	301
	3 收敛区间·····	301
	4 幂级数的运算性质·····	302
11.5.2	例题分析 ·····	302
	1 求幂级数的收敛域·····	302
	2 求幂级数的和函数·····	306
11.6	函数的幂级数展开式、幂级数的应用·····	314
11.6.1	内容提要 ·····	314
	1 定义·····	314
	2 性质·····	314
	3 几个重要函数的麦克劳林级数·····	314
11.6.2	例题分析 ·····	315
	1 将函数展开成幂级数·····	315
	2 幂级数在近似计算中的应用·····	322
	3 综合题、杂题 ·····	324

11.7	傅里叶级数	329
11.7.1	内容提要	329
1	定义	329
2	收敛定理——狄利克雷充分 条件	330
11.7.2	例题分析	331
1	将 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展成 傅里叶级数	331
2	将 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展成正弦 级数与余弦级数	335
3	将 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展成傅里叶 级数	340
11.8	习题与答案	344
11.8.1	习题	344
11.8.2	答案	352
第 12 章	常微分方程	359
12.1	基本概念	359
12.1.1	内容提要	359
1	常微分方程和偏微分方程	359
2	解和隐式解	359
3	通解(通积分)和特解	359
4	积分曲线和积分曲线族	360
12.1.2	例题分析	360
12.2	一阶微分方程及初等解法	368
12.2.1	内容提要	368
1	存在性及惟一性定理	368
2	可以用初等解法求解的 一阶微分方程	368

12.2.2	例题分析	372
1	类型(1)~(5)的一阶方程求解.....	372
2	做适当变换求解一阶方程.....	382
3	一阶线性微分方程的解 的定性理论.....	385
4	一阶微分方程的物理、几何 应用.....	392
5	综合题、杂题	397
12.3	高阶微分方程	399
12.3.1	内容提要	399
1	存在性和惟一性定理.....	399
2	3种最简单的高阶方程类型	400
3	二阶线性方程的存在性和 惟一性定理.....	400
4	二阶线性齐次方程的通解结构.....	401
5	二阶线性非齐次方程的通解 结构.....	401
6	n 阶线性方程的一般理论	401
12.3.2	例题分析	402
1	利用降阶法求解高阶微分方程.....	402
2	高阶方程的物理应用.....	405
3	如何求解二阶线性变系数 微分方程.....	407
4	二阶线性微分方程解 的定性理论.....	411
5	有关函数组的朗斯基行列式.....	414
6	综合题、杂题	417
12.4	常系数线性方程(组)	423