中学教学参考丛书

集合与对应

王恩大、冯立明 编

山东人民出版社

中学教学参考丛书

集合与对应

王恩大　冯立明编

山东人民出版社

一九七九年·济南

中学教学参考丛书

集 合 与 对 应

王恩大　冯立明编

•

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷

•

787×1092毫米32开本　4.5印张　92千字
1979年6月第1版　1979年6月第1次印刷
印数：1—30,000

书号　7099·904　定价　0.32元

引 言

集合论是自十九世纪末叶开始发展起来的一门新兴的数学理论。它最初的一些奠基性文献是由Г·康托在一八九二年发表的。

随着生产和科学技术的不断发展，集合论思想的应用越来越广泛。当前，集合论已成为数学各个分支不可缺少的基础和工具。集合概念已成为近代数学中一个重要的基本概念。

根据中学数学教学大纲（试行草案）的要求，在新编数学教材中，讲传统数学的基本内容时，适当渗透了集合、对应等近代数学的基本思想和方法。我们认为，这样处理教材有以下几点好处：

第一，有利于学生更好地理解某些传统数学内容，提高学生的逻辑思维能力。中学数学所研究的领域是数和图形，从集合的观点看即是数的集合和点的集合。因此，传统数学中的许多问题，用集合的观点加以解释，就会更加清楚和易于理解。例如，方程组（或不等式组）的解集合，解释为其中每个方程（或不等式）的解集的交集，学生就比较易于接受。又如，函数概念是中学数学中一个重要的基本概念，但按传统的讲法，学生却长期不理解其实质。从集合论的观点看，函数关系实际上是在两个集合之间建立起来的一个对应关系。其定义域是自变元的取值集合，其值域是因变元的取值集合。再如，用集合的观点对数、式、几何图形进行分类，

有利于学生掌握其从属关系和包含关系（如把正方形解释为矩形集合与菱形集合的交集）。同样，用集合、对应的观点来阐述轨迹与图形、曲线与方程等概念，也比传统方法更易使学生理解。

另外，在学习集合、对应等知识时，常常要使用数学概念来表达集合的对象特征。无论是给出集合中元素的特征，如{自然数}，{有理数}，{正三角形}，{绝对值小于10的整数}……，让学生明确集合中有哪些元素，还是给出具体的元素，如{2，4，6，……}，{10，100，1000，……}……，让学生用数学语言抽象出集合中元素的特征，都要求学生准确地了解数学概念的定义，具有抽象事物特征的能力。这样，在学习、运用集合和对应知识的过程中，就可以巩固对数学概念的理解，提高学生的逻辑思维能力。

第二，可以为学生将来从事生产劳动和继续学习打下基础。随着四个现代化的逐步实现，在中学阶段学习一些电子计算机的常识以及有关的数学知识，如逻辑代数初步知识等是很有必要的，这些知识和许多重要的近代数学，如实变函数、泛函分析、拓扑学等都是建立在集合、对应基础上的。集合、对应已成为近代数学最基本的概念。尽早地让学生接触集合、对应的初步知识，将为今后继续学习打下基础。

这本小册子，根据中学数学教学大纲（试行草案）的要求，对集合、对应的有关概念、性质和运算等基础知识，作了较系统地阐述；用集合、对应的观点，对传统数学中的某些内容结合具体问题作了较详细的解释，并配有一定数量的例题和习题，可供中学数学教师教学参考。

目　　录

引　言

一　集合的基本概念……………………………………………（1）

1. 集合和它的元素 ……………………………………（1）

2. 集合的表示法 ………………………………………（1）

3. 属于和不属于 ………………………………………（5）

4. 包含与相等、子集合……………………………………（6）

5. 空集合与全集合 ……………………………………（8）

习　题 ……………………………………………（10）

二　集合的运算………………………………………………（13）

1. 并　集 ……………………………………………（13）

习　题 ……………………………………………（18）

2. 交　集 ……………………………………………（19）

习　题 ……………………………………………（32）

3. 集合的差 …………………………………………（34）

习　题 ……………………………………………（41）

三　作为点集的几何图形……………………………………（43）

1. 作为点集的几何图形的概念 ………………………（43）

习　题 ……………………………………………（48）

2. 图形的交 …………………………………………（48）

习　题 ……………………………………………（50）

3. 图形的并 …………………………………………（50）

习　题 ……………………………………………(51)
4. 点集与轨迹 ……………………………………(51)
习　题 ……………………………………………(57)
5. 曲线与方程 ……………………………………(57)
四　对应的基本概念……………………………………(62)
1. 对应法则 ………………………………………(62)
2. 集合到集合内的对应……………………………(63)
3. 一一对应与逆对应 ……………………………(67)
4. 对应的机械模拟 ………………………………(72)
5. 代数方程的解 …………………………………(73)
6. 可列集与连续统势 ……………………………(74)
7. 对应的相等 ……………………………………(81)
8. 对应的复合与变换的乘积 ……………………(82)
9. 逆变换和一一变换 ……………………………(89)
10. 平移与旋转……………………………………(91)
习　题 ……………………………………………(98)
五　函数、代数运算………………………………… (101)
1. 函数概念 ……………………………………… (101)
2. 复合函数与反函数 …………………………… (104)
3. 函数概念的演变 ……………………………… (105)
4. 代数运算 ……………………………………… (106)
习　题 …………………………………………… (114)
习题提示与解答……………………………………… (117)

一　集合的基本概念

1. 集合和它的元素

象以前我们所学过的“点”、“线”、“面”、“数”等不加定义的原始概念一样，“集合”这个概念，也是不可以精确定义的数学基本概念之一.对它我们只给予一种描述.

在我们所接触到的事物中，为了某种需要，常常把具有某种共同性质的事物看成一个整体. 例如，某校全体学生组成的整体；所有正三角形组成的整体；所有有理数组成的整体；数轴上所有点的整体等等，我们把这些具有某种性质的事物所组成的整体、总合或汇集，叫做集合（简称集）.

一个集合里的成员或对象，我们把它叫做这个集合的元素. 例如，某学校中的任意一个学生都是该校全体学生所组成的集合的一个元素；任一正三角形都是所有正三角形所组成的集合的一个元素；-1，$+\frac{1}{3}$，-0.5，……都是有理数集合的元素.

2. 集合的表示法

就象在初等代数里用字母表示数和在几何里用字母表示几何图形的元素一样，为了研究的方便，对于一个集合，我

们用大写字母A、B、C、D、……来表示；而用小写字母a、b、c、d、x、y……来表示它的元素。例如，我们可以用字母A表示“所有小于100的素数的集合”；用B表示“直线l上所有点的集合”等等。如果a是小于100的某个素数，我们就说a是A的一个元素；如果x是直线l上的某一点，那么，我们就说x是B的一个元素。

对于一个元素相当少的集合，我们可以全部写出它的元素或它的记号，并用一个大括号{ }括起来，以表示这个集合。例如，由“小于10的所有奇数”所组成的集合A，可表示为

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

又如，由“本班五名数学爱好者”所组成的集合B，可以全部写出他们的名字，并用一个大括号括起来，表示这个集合。但为方便起见，也可以分别给他们编上记号：a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，并表示为

$$B=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}.$$

有时，我们也可以用一段能刻画该集合元素的公共特征的话来表示一个集合。例如，所有小于5的正整数的集合C，可表示为

$$C=\{c \mid c\text{为小于5的正整数}\}.$$

特别地，对于那些暂时只知道其元素性质的集合，这种表示方法更为必要。例如，方程$x^2-5x+4=0$的解集合D，当我们还没有求出它的根时，可表示为

$$D=\{x \mid x^2-5x+4=0\}.$$

对于一些元素较多的集合来说，例如，1——10^5所有整数的集合，用全部写出这些元素或它的记号的方法来表示，

显然是不方便的。而对于含有无穷多个元素的集合要把它的元素全部写出来则是不可能的，因此，我们可以采取如下两种表示方法：

第一，写出它的部分元素或记号，再加删节号来表示。例如，“所有1——2k的偶数的集合R”，可表示为

$$R=\{2, 4, 6, \cdots\cdots, 2k\},$$

或

$$R=\{2n \mid n=1, 2, 3, \cdots\cdots, k\};$$

又如，“所有奇数的集合M”，可表示为

$$M=\{1, 3, 5, \cdots\cdots\},$$

或

$$M=\{2n+1 \mid n=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}.$$

第二，用一段能刻画该集合中元素的公共特征的话来表示。例如，

$A=\{$有理数的全体$\}$；

$B=\{$等边三角形的全体$\}$等等。

从上面的例子可以看出，对于一个集合来说，有的含有有限个元素，有的则含有无限多个元素。含有有限多个元素的集合，叫做有限集；含有无限多个元素的集合，叫做无限集。如果有限集A所含有的元素总个数为l，则可表示为

$$n(A)=l.$$

例如，若$A=\{1, 2, 3\}$，则

$$n(A)=3.$$

在研究集合与集合之间的关系时，我们常借助于一种专门的几何图形来表示集合。为方便和美观起见，常用一种圆形图来表示集合（图1—1）。在下面的学习过程中，我们

将会看到，它是帮助我们理解集合与集合关系的一种非常形象的直观工具。

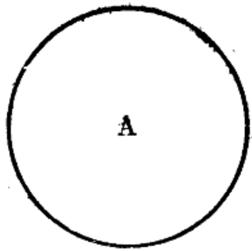

图1—1

关于集合的表示，必须注意以下几点：

（1）对于重复出现的元素，在一个集合中，我们只算一个。例如，

$$A=\{a, b, c\}$$

与

$$B=\{a, a, b, c\}$$

表示同一个集合。

（2）两个集合的元素相同，而只是排列的顺序不同，我们仍看作是同一个集合。例如，

$$C=\{1, 2, 3\}$$

与

$$D=\{3, 2, 1\}$$

表示同一个集合。

（3）要把以某个对象A为其仅有的一个元素的集合，即$M=\{A\}$，与A本身区别开来。例如，

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$和$M=\{A\}$显然是两个不同的集合。$M=\{A\}$是一个仅有一个元素A的集合，而A本身却是一个具有三个元素的集合。

仅含有一个元素的集合，叫做单元素集合。例如，方程

$$x-2=0$$

的解集合，就是一个仅含有元素2的单元素集合。

3. 属于和不属于

任何一个事物，对于某一个集合来说，或是属于该集合，或是不属于该集合。二者必居其一，但不可兼得。

若某事物 a 是集合A的一个元素，则我们说，a属于A，可记作

$$a \in A.$$

若某事物b不是集合A的一个元素，则我们说，b不属于A，可记作

$$b \overline{\in} A \text{ 或 } b \notin A.$$

例如，设$A=\{x \mid x$为任一整数$\}$，则

$$3 \in A,$$

而

$$\frac{1}{2} \overline{\in} A.$$

又如，设$M=\{$平行四边形的全体$\}$，则

菱形$\in M$，

而

梯形$\overline{\in} M$。

我们必须注意，任何一个集合自身决不能作为它的元素，即

$$A \overline{\in} A.$$

4. 包含与相等、子集合

上面谈的是元素与集合的关系，这是一种从属关系。但是，在集合理论中，主要是研究集合与集合之间的关系。

例如有以下两个集合：

$$A=\{x \mid x\text{是高一(二)班男同学}\},$$

$$B=\{x \mid x\text{是高一(二)班全体同学}\}.$$

显然，集合A的元素都属于集合B。

一般地，设A、B是两个集合。若A的所有元素都是B的元素，则说集合B包含集合A，或说集合A被包含于集合B中，可记作

$$A\subseteq B \quad \text{或} \quad B\supseteq A.$$

这时，我们把集合A叫做集合B的子集合。

这里，我们必须分清如下几种情况：

(1) 集合A的元素都属于集合B，但集合B的元素并不都属于集合A。例如，在上例中，高一(二)班除了男同学外，还有女同学。在这种情况时，集合A叫做集合B的真子集，或说集合A被真包含在集合B中，可记作

$$A\subset B \quad \text{或} \quad B\supset A.$$

这种情况可用图1－2直观地表示出来。

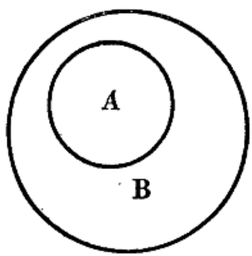

图1－2

(2) 集合A的元素都属于集合B，并且集合B的元素也都属于集合A。如上例中，高一(二)班全部都是男同学，没有

女同学．这时，我们说集合A与集合B相等，可记作

$$A=B.$$

也就是说，$A=B$所表示的是A与B两个集合有完全相同的元素。

因此，在证明两个集合相等时，必须从$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$两个方面加以证明。

在以上两种情况下，不论集合A是集合B的真子集还是集合A与集合B相等，我们都说集合A是集合B的子集合。

（3）因为任何一个集合A的元素，必定是同一集合A的元素，所以有关系$A\subseteq A$．但是，必须注意，$A\subseteq A$是表示集合与集合之间的包含关系，而符号“$\in$”则表示元素与集合之间的从属关系．前面已经谈到，A是不能作为它自身的元素的，即$A\in A$没有意义。

例 1　试讨论集合$A=\{x\mid x$是整数$\}$与集合$B=\{x\mid x$是有理数$\}$的包含关系。

因为任一整数a都是有理数，所以，$a\in A$也必定有$a\in B$。于是

$$A\subseteq B.$$

这就是说，整数集合A是有理数集合B的子集合．但集合B的元素（如$\frac{1}{3}$）不都属于集合A，所以，A是B的真子集，即

$$A\subset B.$$

例 2　集合$A=\{a\mid a$为 2 的整数倍$\}$与

$$B=\{b\mid b\text{为偶数}\}$$

是否相等？

因为任何2的整数倍都是偶数，即$a\in B$，所以，

$A\subseteq B$。

反之，因为任何偶数都是2的整数倍，即$b\in A$，所以

$B\subseteq A$。

于是得　$A=B$。

例 3　集合$A=\{2,3\}$与$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$是否相等?

因为数2，3都是方程$x^2-5x+6=0$的解，所以

$A\subseteq B$;

反之，因为方程$x^2-5x+6=0$的任一解，都是A的元素，所以

$B\subseteq A$。

故

$A=B$。

例 4　集合$A=\{4$的整数倍$\}$与

$B=\{$偶数$\}$

是否相等?

因为虽然任何4的整数倍都是偶数，即

$A\subseteq B$。

但2是偶数，却不是4的整数倍，即A不包含B。所以，

$A\neq B$。

5. 空集合与全集合

为了便于研究集合的运算，我们引入空集合与全集合的概念。

若一个集合不含任何元素，那么这个集合叫做空集合。

例如，如果在一次考试中，一个班里没有人不及格，那么在这次考试中这个班里不及格的人的集合就是一个空集合。

又如，方程

$$x^2+1=0$$

的实数解集合，就是一个空集合。因为没有一个实数x满足方程$x^2+1=0$。

空集合我们用符号“$\varnothing$”表示，有时也用拉丁字母O表示。

显然，空集合是任何集合的子集合，即若A是任一集合，则

$$\varnothing\subseteq A.$$

事实上，如果$\varnothing\subseteq A$不成立，则$\varnothing$中必至少有一个元素不属于A，但这样的元素是不存在的。故必有关系

$$\varnothing\subseteq A$$

成立。

但要注意，空集合与单元素集合$\{0\}$，不能混淆起来。前者指没有元素的集合；后者指有且只有一个元素“0”的集合。例如，集合

$$A=\{x\mid x^2=0\}$$

是仅含有一个元素“0”的集合，但它不是空集合。

为了研究方便，我们把讨论某一问题时有关元素的全体所组成的集合，叫做全集合，用符号“I”来表示。例如，如果我们所讨论的问题只与某一学校的全体学生有关，在这一问题的讨论过程中，我们就可以把这一学校的全体学生所组成的集合作为一个全集合。

如果集合A是我们所讨论的问题中的任一集合，则A与全集合I显然有如下关系：

$$A \subseteq I.$$

特别对于空集合$\varnothing$来说，有如下关系成立：

$$\varnothing \subset I.$$

如果从全集合中取出某个集合A的所有元素，则剩余的元素又组成另一个集合．把剩余元素所组成的集合，叫做集合A的补集合，可记为“A'”．

例如，设I＝{高一（二）班同学}，取出集合A＝{高一（二）班男同学}，则剩余元素——高一（二）班女同学组成一集合B。显然，集合B是集合A的补集合；反之，集合A也是集合B的补集合。即集合A与B是互补的．不难看出，两个互补的集合，没有公共元素，即全集合的任一元素，若不属于A，则必属于A'；反之亦然。

全集合I与集合A、A'的关系，可直观地表示为图1—3。

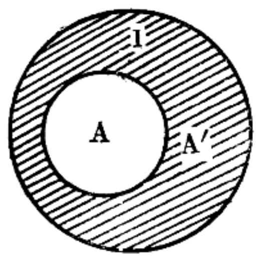

图1—3

不难看出，如下关系

$$\varnothing' = I,\ I' = \varnothing,$$

$$(A')' = A.$$

永远成立。

习　　题

1．写出下列集合的所有元素：

（1）A＝{15的因数}；