数理统计习题教程

（上册）

李泽慧　李效虎　编著

兰州大学出版社

国家自然科学基金(19871035)
甘肃自然科学基金(B4)
资助项目

数理统计习题教程

(上　册)

李泽慧　李效虎　编著

兰州大学出版社

内容提要

本书为《数理统计——基本概念及专题》的配套习题解答。主要内容包括概率论中的一些课题、统计模型、估计方法、估计的比较——最优化理论、从估计到置信区间和假设检验、最优化检验与置信区间——似然比检验及有关方法，线性模型——回归和方差分析，离散数据分析，非参数模型，决策理论。

本书可供大专院校有关专业作为数理统计课程的配套教材和参考书。

数理统计习题教程(修订版)

(上册)

李泽慧　李效虎　编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路308号　电话:8617156　邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心照排

兰州人民印刷厂印刷

开本: 850×1168　1/32　印张:17.25

2001年5月第2版　2001年5月第1次印刷

字数:429千字　印数:2001～5000册

ISBN7-311-00946-4/O·119 本册定价:23.00元

全套定价:46.00元

序

几年以前，李泽慧教授等曾将当代美国统计学家的著作《Mathematical Statistics》译成中文出版，近日他们又不辞辛劳，把该书的习题全部解出整理出版，嘱我写几句权当一个引子。

习题是数学著作，尤其是带有教科书性质的著作的重要组成部分，有的著作，其习题非常精彩，知名度很高，为人所津津乐道，如前苏联数论大师维诺格拉多夫的《数论基础》，五十年代由裘光明译成中文，华罗庚教授在中译本序中指出读这本书若不注意其习题，等于入宝山而空返；许宝騄教授曾指出莱曼的《Testing statistical Hypothesis》一书习题选得很好，很有特色；C.R 劳的《Linear Statistical Inference》一书在我国流传甚广，此书习题之精采，是我国统计界所广为称道的；又如大家熟悉的教本——那汤松《实变函数论》，其习题之难，人所共知，但凡是在这些习题上认真下过功夫的，都感到收益极大，受用终身。

认真学习数学的人的一条基本经验是：要切实掌握一门数学，达到能灵活运用的程度以至有所创新，要做的事情很多，其中之一就是要做大量的、有一定难度的习题，在教科书正文中我们学到了很多概念、定理、公式，它们的意义何在，优点和局限性何在，如何使用，与其他内容的关系如何，都需要通过做习题去巩固、探索和加深理解。教科书正文由于篇幅和课时所限，往往只能作一种粗线条式的讲述，许多相关的知识、反例、补充、正文中未尽之处、以至较近的发展等，可以通过精心设计的习题来加以组织和反映。另外，做习题在相当程度上是做研究工作的一种"预演"，有些较难的习题，本身就是一项研究工作，或其组成部分，或其中的一个技术性难点，有了大量的克服这种难点的经验，将来进入独立研究工作的"实战"时，就较易于做到随机应变，调动所学的知识，以达到问题的解决，如果在做习题上不肯下功夫，有畏难情绪，那怎么能指望将来做研究工作遇到困难时，能有攻关的勇气和能力呢。

对《题解》一类的书，个人一贯的观点是：善用之则有益；若对它产生依赖心理，以之替代自己的思考，则不惟无益，甚至有害。所谓善用之，我以为就是把它当作一个顾问，但非到不得已时不问，也不要一"问"到底。具体说，一个题，如果思考了很久，还是一点门径也没有，可以看看解答的开头，到略有点启发，再自己想下去；或者一个题自己作出来了，再翻看《题解》，二者比较一下，方法有无不同，得失优拙何在。如果是这样，则《题解》成了启发你思考的一个朋友，自然有益。

回到 Bickel 这本书的习题，我个人认为还是编得很好的。其一个特点是量大，教员在课堂上给学生点题，要考虑到学生课外负担，为数不能太多，但只靠这一点习题是远远不够的，愿意下功夫的学生，这大量的习题提供了用武之地；其次在难度选择上，相当大的一部分是练习性的，以巩固正文内容为主要目的，这类习题也不可少，真正有较大难度的只占少部分，作为一门基础课，我认为

这样的安排比较恰当，学生有了这样的基础和经验，将来在专业课中可以做一些难度更大的题，以提高能力，《题解》的作者在编制解答时，不少地方作了一些发挥，注入了自己多年的教学和科研经验，这对于初学者是有很大的借鉴作用的。

以上所说只是个人一些所见，不一定正确，供读者参考，只有一点是确信不移的：为学好数学，一定要多做习题。

陈希孺

1994 年 1 月 27 日

前　言

近年来，我们一直把当代著名统计学家 *Peter J. Bickel* 等的著作《*Mathematical statistics—— Basic ideas and selected topics*》作为统计专业高年级的统计课教材，也要求低年级应用数学专业研究生必须熟悉这本教材。在这种水平上本书具有深度和广度的满意结合。更为特别的是其习题量大而且内容丰富，既有强化概念的练习题，又有补充本书内容的习题，所有这些习题一方面用于衡量读者对内容的掌握程度，另一方面是大量思想和结果的体现，是正文不可缺少的一部分。在教学过程中，必须完成其中的大部分习题，才有可能较为深刻地理解其内容，无疑，完成这些习题也能从中增长功力。

1991 年我们曾将这本著作译成中文出版，1994 年和 1998 年又把教学过程中积累的全部习题的解答整理出版、献给读者，以供参考。（题号与原文一致，个别纯属数字计算的习题被略去）。全部习题分作两部分出

版，第一部分为1～6章，包含概率论的一些内容，参数估计和假设检验，第二部分为7～10章，主要内容有线性模型，非参数方法和决策理论。

在题解的出版过程中，我们得到了许多师长及朋友们的支持和帮助，特别是陈希孺教授为本书写了精彩的序言，借此机会，我们表示衷心的感谢。另外，焦桂梅老师曾整理过第一章部分习题的初稿，硕士生覃光莲、袁志新和张兴国曾阅读过初稿，硕士生王冠军、许谚、邢怀岗、张德平和黄宝胜参加了部分讨论和计算工作，袁志新和覃光莲还参与了本书的后期校正工作，并提出了宝贵的意见，特表谢意。

现在，我们又将本书进行了修订。对原书中一些疏漏进行了修改和完善，以便使他以更完美的形式服务于读者。

由于作者的水平有限，书中错误在所难免，恳切希望专家及读者提出宝贵的批评意见。

李泽慧　2001年2月16日

目　　录

第一章　概率论中的一些课题

1.1　由随机变量或向量施行条件化

1.1.A.　离散情况

如果 X 和 Y 是不同维数的离散型随机向量，我们要研究 Y 已经取得了特定值 y 时，X 的条件概率的结构。

定义给定 $Y=y$ 时，X 的条件频率函数 $p(\cdot|y)$ 为

(1.1.1)　$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y})=P[\mathbf{X}=\mathbf{x}|\mathbf{Y}=\mathbf{y}]=\frac{p(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathbf{p}_Y(\mathbf{y})},\qquad p_Y(y)>0$$

这里 p 和 P_Y 是$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$和 $\mathbf{Y}$ 的频率函数。$p(\cdot|y)$称为给定 $\mathbf{Y}=y$ 时，$\mathbf{X}$ 的条件分布。

在两种特殊情况下，计算给定 $\mathbf{Y}=y$ 时 $\mathbf{X}$ 的条件分布是容易的。

(Ⅰ)如果 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是独立的，即 $p(x|y)=p_X(x)$，这时条件分布和边际分布重合。

(Ⅱ)如果 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{Y}$ 的一个函数 $h(\mathbf{Y})$，则 $\mathbf{X}$ 的条件分布是退化的，以概率 1 有 $\mathbf{X}=h(\mathbf{Y})$。

以 $q(y|x)$记 $\mathbf{X}=x$ 时 Y 的条件频率函数，则

(1.1.3)　$$p(x,y)=p(x|y)p_Y(y)$$

(1.1.4)　$$p(x|y)=\frac{q(y|x)p_X(x)}{\sum_z q(y|z)p_X(z)}\quad\text{（贝叶斯规则）}$$

为保证与原书记号一致，本书将 $\ln x$ 记为 $\log x$.

1.1.B. 离散型随机变量的条件数学期望

假设 X 是一个随机变量，并且 $E(|X|)<\infty$。定义给定 $\mathbf{Y}=y$ 时 X 的条件期望，记为 $E(X|\mathbf{Y}=y)$，由下式给出，

(1.1.7)　$E(X|\mathbf{Y}=y)=\sum_x xp(x|y)$

设 $g(y)=E(X|\mathbf{Y}=y)$，随机变量 $g(\mathbf{Y})$ 就可记为 $E(x|\mathbf{Y})$，称作给定 $\mathbf{Y}$ 时 X 的条件期望。

给定 $\mathbf{Y}=y$ 时，对于任何使 $E(|X_1|)$，$E(|X_2|)$ 有限的 X_1、X_2，下式恒成立，

(1.1.12)　$E(\alpha X_1+\beta X_2|\mathbf{Y}=y)=\alpha E(X_1|\mathbf{Y}=y)+\beta E(X_2|\mathbf{Y}=y)$

因为恒等式对所有 y 成立，我们有

(1.1.13)　$E(\alpha X_1+\beta X_2|\mathbf{Y})=\alpha E(X_1|\mathbf{Y})+\beta E(X_2|\mathbf{Y})$

条件期望具有普通期望具有的所有性质。

在两种特殊情况下，能立即计算条件期望。如果 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是独立的，且 $E(|X|)<\infty$，则

(1.1.14)　$E(X|\mathbf{Y})=E(X)$

另外，由(Ⅱ)得

(1.1.15)　$E(h(\mathbf{Y})|\mathbf{Y})=h(\mathbf{Y})$

引伸一下，可有称之为条件期望的替换定理的关系式。即对所有的 y，$p_{\mathbf{Y}}(y)>0$ 且 $q(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 有有限期望，成立

(1.1.16)　$E(q(\mathbf{X},\mathbf{Y})|\mathbf{Y}=y)=E(q(\mathbf{X},y)|\mathbf{Y}=y)$

如果 $q(\mathbf{X},\mathbf{Y})=r(\mathbf{X})h(\mathbf{Y})$，这里 h 是有界的且 $r(\mathbf{X})$ 有有限期望，则有

(1.1.18)　$E(r(\mathbf{X})h(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}=y)=E(r(\mathbf{X})h(y)|\mathbf{Y}=y)$

$=h(y)E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y}=y)$

由此有，

(1.1.19)　$E(r(\mathbf{X})h(\mathbf{Y})|\mathbf{Y})=h(\mathbf{Y})E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y})$

另外的直接结果是条件期望的期望是无条件期望。即只要 X

有有限期望，则

(1.1.20) $E(E(X|\mathbf{Y}))=E(X)$

称之为双期望定理。

下面定理是积的期望公式：

定理 1.1.1. 如果 $h(\mathbf{Y})$是有界的，且 $E(|r(\mathbf{X})|)<\infty$，则

(1.1.23) $E(r(\mathbf{X})h(\mathbf{Y}))=E(h(\mathbf{Y})E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y}))$

1.1.*C*. 连续型随机变量

假设$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是一连续随机向量，具有密度函数 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，定义给定 $\mathbf{Y}=\boldsymbol{y}$ 时 $\mathbf{X}$ 的条件密度函数如下，

(1.1.25) $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\dfrac{p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{p_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})}$， 如果 $p_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})>0$

(1.1.4)成为

(1.1.26) $$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\frac{p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{t})q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n}$$

这里 q 是 $\mathbf{X}=\boldsymbol{x}$ 时 $\mathbf{Y}$ 的条件密度。这个公式也称为贝叶斯规则。

如果 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 独立，象离散情况一样，条件分布与边际分布相等。

如果 $E(|X|)<\infty$，类似于离散情况，给定 $\mathbf{Y}=\boldsymbol{y}$ 时 X 的条件期望为具有密度 $p(x|\boldsymbol{y})$的一个随机变量的期望值。更一般地，如果 $E(|r(\mathbf{X})|)<\infty$，给定 $\mathbf{Y}=\boldsymbol{y}$ 时，$r(\mathbf{X})$的条件期望的定义由下式给出，

(1.1.30) $E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y}=\boldsymbol{y})=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}r(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

如果 $g(\boldsymbol{y})=E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y}=\boldsymbol{y})$，记 $g(\mathbf{Y})=E(r(\mathbf{X})|\mathbf{Y})$，则 $E(r(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y})$满足(1.1.23)和(1.1.21)。

1.1.*D*. 关于一般情况的注释

显然，$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$离散和$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$连续没有穷尽全部随机变量。

1.2 随机向量的变换的分布理论

定理 1.2.1 设 $\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_k)$是一个定义在 R^k 上的开子集 B 上的变换，假设：

（Ⅰ）$\boldsymbol{h}$ 在 B 内有连续一阶偏导数.

（Ⅱ）$\boldsymbol{h}$ 在 B 上是一一对应的.

（Ⅲ）$\boldsymbol{h}$ 在 B 上的雅可比行列式 $|J_h(t)|$ 不为零.

设 $\boldsymbol{f}$ 是一个在 $\boldsymbol{h}$ 的值域 $\boldsymbol{h}(B)=\{(h_1(\boldsymbol{t})\cdots,h_k(\boldsymbol{t})):\boldsymbol{t}\in B\}$上的实值函数（有限且可测），且满足

$$\int \boldsymbol{h}(B)|f(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty$$

则对 $\boldsymbol{h}(B)$ 的每一个（可测）子集 K 有，

(1.2.1) $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}(\boldsymbol{x})=\int_{h^{-1}(K)} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}))|\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{t})|\mathrm{d}\boldsymbol{t}.$

定理 1.2.2. 设 $\mathbf{X}$ 是连续的，并且假设 $\mathbf{S}$ 是 R^k 上的一个开子集，满足 $P(\mathbf{X}\in\mathbf{S})=1$。如果 $\boldsymbol{g}=(g_1,\cdots,g_k)$ 是 $\mathbf{S}$ 到 R^k 的一个变换，$\boldsymbol{g}$ 和 $\mathbf{S}$ 满足定理 1.2.1 的条件。则 $\mathbf{Y}=\boldsymbol{g}(\mathbf{X})$ 的密度由下式给出，

(1.2.3) $p_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})=p_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y}))|J_g{}^{-1}(\boldsymbol{y})|$， 对于 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{g}(\mathbf{S})$.

称 $\boldsymbol{g}$ 为一个 R^k 上的仿射变换，如果存在一个 $k\times k$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和一个向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\mathbf{A}+\boldsymbol{c}$. 如果 $\boldsymbol{c}=0$，称 g 是一个线性变换。函数 g 是一对一的当且仅当 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，此时有

(1.2.5) $g^{-1}(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})\mathbf{A}^{-1}$

$\boldsymbol{y}\in R^k$，这里的 $\mathbf{A}^{-1}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆。

推论 1.2.1. 假设 X 是连续的并且 S 满足 $P(\mathbf{X}\in\mathbf{S})=1$。如果 g 是一个一对一的仿射变换，则 $\mathbf{Y}=g(\mathbf{X})$有密度函数

(1.2.6) $p_y(\boldsymbol{y})=|\det\mathbf{A}|^{-1}p_{\mathbf{X}}((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})\mathbf{A}^{-1})$

对于 $y \in g(\mathbf{S})$，这里 $\det\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}$ 的行列式。

由定理，得到两个重要分布族的一个基本性质。

第一个分布族是伽玛分布族，密度函数为

$$g_{p,\lambda}(x)=\frac{\lambda^p x^{p-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}, \tag{1.2.8}$$

对 $x>0$. 记其分布为 $\Gamma(p,\lambda)$。这里的参数 p,λ 都取正值。

特别地，$p=1$ 时是指数分布族 $\mathscr{E}(\lambda)$。这里的 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\Gamma(p,\lambda)$ 的尺度参数。

设 k 是正整数，若 $p=\frac{k}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，则 $g_{p,\lambda}$ 是**自由度**为 k 的**卡方密度**，用 χ_k^2 表示。

另一个分布族是贝塔分布族，它由正参数 r 和 s 标明，其密度函数为

$$b_{r,s}(x)=\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)}, \qquad 0<x<1. \tag{1.2.11}$$

记其分布为 $\beta(r,s)$。

定理 1.2.3. 如果 X_1 和 X_2 是分别服从分布 $\Gamma(p,\lambda)$ 和 $\Gamma(q,\lambda)$ 的独立随机变量，则 $Y_1=X_1+X_2$ 与 $Y_2=\frac{X_1}{X_1+X_2}$ 是相互独立的并且分别服从分布 $\Gamma(p+q,\lambda)$ 和 $\beta(p,q)$。

推论 1.2.2. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量，X_i 服从 $\Gamma(p_i,\lambda)$ 分布，$i=1,\cdots,n$，则 $\sum_{i=1}^n X_i$ 服从分布 $\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i,\lambda)$。

1.3 关于正态总子样的分布理论

1.3.A. χ^2，F 和 t 分布

假设 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$，其中 X_i 组成来自 $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ 总体的样

本。

定理 1.3.1. 随机变量 $V=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$ 服从 χ_n^2 分布，即 V 有密度

$$p_V(v)=\frac{v^{\frac{1}{2}(n-2)}e^{-\frac{1}{2}v}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)},\qquad v>0 \tag{1.3.1}$$

设 V 和 W 是相互独立的，分别具有分布 χ_k^2 和 χ_m^2，且设 $S=(V/k)/(W/m)$，则 S 的分布称为具有自由度 k 和 m 的 F 分布，记为 $\mathscr{F}_{k,m}$。

设 $Q=Z/\sqrt{V/k}$，这里 Z 与 V 是独立的且分别具有分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 和 χ_k^2。则 Q 的分布称为具有自由度 k 的 t 分布，记为 $\mathscr{T}_k$。

推论 1.3.1. 随机变量 $(m/k)\sum_{i=1}^{k}X_i^2/\sum_{i=k+1}^{k+m}X_i^2$ 服从 $\mathscr{F}_{k,m}$ 分布. 随机变量 $X_1/\sqrt{(1/k)\sum_{i=2}^{k+1}X_i^2}$ 服从 $\mathscr{T}_k$ 分布。

$\mathscr{F}_{k,m}$ 分布的密度为

$$p_S(s)=\frac{(k/m)^{\frac{1}{2}k}s^{\frac{1}{2}(k-2)}(1+(k/m)s)^{-\frac{1}{2}(k+m)}}{B(\frac{1}{2}k,\frac{1}{2}m)} \tag{1.3.7}$$

对 $s>0$。

T_k 分布的密度为

$$p_Q(q)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(k+1))(1+(q^2/k))^{-\frac{1}{2}(k+1)}}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(\frac{1}{2}k)} \tag{1.3.10}$$

对 $-\infty<q<\infty$。

χ^2，$\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 的累积分布函数分别给在表Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ中。

1.3.B. 正交变换

设 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是一个服从同一分布 $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ 的独立随