初等数学研究

赵慈庚　主编

北京师范大学出版社

初等数学研究

赵慈庚　主编

北京师范大学出版社

责任编辑：潘淑琴

初等数学研究

赵慈庚　主编

*

北京师范大学出版社出版发行

全 国 新 华 书 店 经 销

北京师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：22.5　字数：480 千

1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷

印数：1—5 000

ISBN 7-303-00155-7/G·67

定　价：7.05 元

前　言

"初等数学研究"原是北京师大数学系在本世纪20年代，按师范性需要创立的一门进修课程，开设在三、四年级。目的是使未来教师对初等数学有较高的认识，研究各科的理论体系，和一些重要专题，借以知道中学课本在许多关节为了适应学童的年龄特点，不得不删繁就简，希望师大学生日后登台阐教时，心中有数；遣词用句不要只贪速效，以致有碍正理。这是傅种孙先生在北京师大30多年呼吁经营的一件大事。

60年代以来，我国数学重视实用，专攻之士，则注意尖端，"初等数学研究"这门课便从师范院校的教学计划里消失了。然而中学教学中可能出现的疵瑕，并不能随之消失。防患未然，补苴罅漏的意识，在相当时期内不该放松。因此在1982年邀集几位同好，撰写一些短文，希望弥补这点缺憾。后来又觉得选录旧稿也是可取的途径；所以这里既有未曾问世的新作，也有期刊上发表过的成品。因其编辑用意和当年设置课程的想法一致，就用这课程的名称作了这书的书眉。

数学碰上学而不思的人便是一潭死水。如何思考？是进修数学的关键。然而数学名家也提不出个道道来。倒是他们的研究工作，能给人一点暗示。这种痕迹对于数学爱好者很有帮助。为此本书也选了几篇这类作品。请不要用价值观念

责备这些东西无聊。

目前初等数学的领域，较之40年前已经拓展不少：图论、概率、运筹学等等，应该都被收容。本书于此，似嫌不足。限于人力，有待明哲！

感谢西北师范学院数学系郑宪祖教授对编辑工作的大力支持。感谢北京师大出版社协助出版。

赵慈庚

1987年7月

目　　录

代数部分

几何部分

解析几何与三角部分

函数与数列部分

历史资料部分

代数部分

一道数学竞赛题的推广

上海师大数学系　吴望名

一、问题的提出

1978年安徽省中学生数学竞赛有一道试题是：任给五个整数，证明必能从中选取三个使此三数之和能被 3 整除。

这题的证明并不难。假设给出的五个整数是a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_i被 3 除所得的余数是r_i，$r_i \in \{0, 1, 2\}$，$i=1, 2, 3, \cdots, 5$。如果$r_1, r_2, \cdots, r_5$这五个余数中至少有三个相同，比如说$r_1=r_2=r_3$，则

$$a_1+a_2+a_3 \equiv r_1+r_2+r_3 \equiv 3r_1 \equiv 0, \pmod{3}$$

如果有r_1，r_2，$\cdots$，r_5中没有三个相同的，那么这五个余数中必有三个各不相同。不妨设$r_1=0$，$r_2=1$，$r_3=2$。于是

$$a_1+a_2+a_3 \equiv r_1+r_2+r_3 \equiv 0+1+2 \equiv 0, \pmod{3}$$

这道试题实际给出了这样一个命题：

命题A。任意 5 个整数之中必有 3 个整数，它们的和能被 3 整除。

为了培养学生的创造能力，我在《数学方法导引》这门课上，要求学生来推广这命题；也就是说要以命题A为特例来

发现新的命题。

二、改进与讨论

不少同学提出的命题是

命题1．在任意给定的$5n$个整数中，必能选出$3n$个数，使它们的和能被3整除；这里n是自然数。

因为这里的$n=1$时，这命题便退化为命题A，所以命题1是命题A的推广。命题1也显然依赖于命题A，因为把$5n$个整数分为n组，每组5个，由命题A知道，从每组中能取出3个数，使它们的和是3的倍数，因而总共能从$5n$个数中取出$3n$个来，它们的和当然还是3的倍数。可见命题1仅是命题A的平凡推广，没有多少新意。

为了改进命题1，竺建伟同学提出

命题2．在任意给定的$3n+2$个整数中，必能选出$3n$个数，使它们的和能被3整除，这里n是自然数。

命题2能用数学归纳法证明。$n=1$时命题真。假设$n=k$时命题已真。$n=k+1$时，给定的整数是$3(k+1)+2=3k+5$个。随便指定其中的5个，由命题A知道，这5个数中必能取出3个使它们的和是3的倍数。由归纳假设知道其余$3k+2$个整数里必能取出$3k$个数使它们的和是3的倍数。两次共取$3k+3=3(k+1)$个整数，它们的和显然能被3整除。命题当$n=k+1$时真。

因为$3n+2\leqslant 5n$，所以命题2比命题1要好。命题2能不能再改进呢？下边的命题作了否定的回答。

命题3．至少要任给$3n+2$个整数，才可能从中选出$3n$个来使它们的和能被3整除（n是自然数）。

要证命题3，只须适当地指定$3n+1$个整数，使它们之中的任何$3n$个数的和都不能被3整除。有一个方案是：两个1和$3n-1$个0。这$3n+1$个整数的和是2，无论怎样从中选取$3n$个，它们的和不外是1或2，都不能被3整除，

推广命题的工作并不是一帆风顺的。有一个同学提出了下边这个命题：

命题。从任意给定的$2n-1$个整数中，必能选出n个，使它们的和能被3整除。这里$n\geqslant3$。

他是用数学归纳法证明的。当$n=3$时命题真。假设$n<k$时命题已真，则当$n=k$时$2k-1=[2(k-3)-1]+6$，因为$k-3<k$。由归纳假设知$2(k-3)-1$个整数中能选$k-3$个使它们的和能被3整除，其余6个之中又能选出3个使它们的和能被3整除。因此总共选出了k个数，它们的和能被3整除。

然而这命题并不成立，证明也是错的。

事实上当$n=4$时就未必能从7个整数之中选取4个，使它们的和能被3整除。例如指定7个1，无论怎样取其4个，它们的和都是4，不能被3整除。

证明之所以错误是因为归纳假设“$n<k$时命题真”中，疏忽了$n\geqslant3$的要求。实际应该假设“$3\leqslant n<k$时命题真”。虽然$k-3<k$，但是$k-3$未必$\geqslant3$。只凭$k-3<k$是不能引用归纳假设的。

不难看出$3\nmid n$时，不管给出多少个整数。都未必能选其中的n个，使它们和是3的倍数。例如m个整数都是1，$m\geqslant n$而$3\nmid n$，便不能使其n个的和是3的倍数。这说明在推广命题A时，如果要求所取各数的和“能被3整除”，则所选取

个数只能是 3 的倍数。

三、更上一层楼

推广命题A时，对于所取各数的和可以考虑将“能被 3 整除”改为“能被n整除”。有些同学利用抽屉原则得出如下结论。

命题 4．从任意$(n-1)^2+1$个整数中必能选取n个，使它们的和能被n整除。这里n是奇数。

证明：假设给定的$(n-1)^2+1$个整数是a_1，a_2，…，$a_{(n-1)^2+1}$。$a_i \equiv r_i (\mathrm{mod}.\ n)$，$0 \leqslant r_i \leqslant n-1$，$i=1$，$2$，…，$(n-1)^2+1$。分两种情形讨论：

情形 1．若r_1，r_2，…，$r_{(n-1)^2+1}$中有n个数相同，即存在$i_1, i_2, \cdots, i_n$使$a_{i_1} \equiv a_{i_2} \equiv \cdots \equiv a_{i_n} (\mathrm{mod}.\ n)$，则

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n} \equiv n a_{i_1} \equiv 0 (\mathrm{mod}.\ n)$$

情形 2．假若r_1，r_2，…，$r_{(n-1)^2+1}$中没有n个数相同，则以n为模的每个剩余类（即余数相同的一切整数）中最多有$n-1$个a_i。这时n个不同的剩余类必然都不是空的；不然的话一旦有一类是空的，则其他n-1类中最多共有$(n-1)^2$个a_i，不足给出的$(n-1)^2+1$个整数了。既然每类不空，必存在a_{i_1}，a_{i_2}，…，a_{i_n}，满足

$$a_{i_1} \equiv 0 (\mathrm{mod}.\ n),\ a_{i_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ n),\ \cdots,$$
$$a_{i_n} \equiv n-1 (\mathrm{mod}.\ n)$$

由于n是奇数，所以

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n} \equiv 0+1+\cdots+(n-1) \equiv \frac{n(n-1)}{2}$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod}.\ n)$$

命题证毕。

若将命题4中的条件“n是奇数”改为“n是偶数”，则结论不能成立。例如当$n=2$时$(n-1)^2+1=2$，任给两个整数，其和未必能被2整除。但若改为“n是大于2的偶数”，命题仍真。请读者自己证明。

从$(n-1)^2+1$个给定的数里取n个，好象给得偏多而取的少（这样就容易达到目的）。能不能少给一点？最少给多少？我们得到

命题5。至少要有$2n-1$个数才能从中取出n个，使它们的和能被n整除。

要证这命题只须就$2n-2$个整数举出一个反例即可。指定$n-1$个1和$n-1$个0，这$2n-2$个数中的任何n个的和都不能被n整除。

那么在任给的$2n-1$个整数之中，是否一定有n个的和能被n整除呢？当$n=2$，3，5时，可以用枚举法验证它是正确的。这又促使我们提出一个猜想。

猜想。任给$2n-1$个整数，必能从中选出n个使它们的和能被n整除。

笔者不知如何证明或否定这个猜想，在我把这猜想向学生征求解答之后，杨志平同学得到一个有趣的结论：

命题6。若猜想对于自然数k与l都真，则猜想对于kl亦为真。

证明：从任给的$2kl-1$个整数中指定$2k-1$个，根据上面的猜想，能选得k个整数使其和为k的倍数。这样的k个数不妨称为k元组。取出这k元组之后，对剩下的$k(2l-1)-1$个整数用同样方法再取一个k元组。如此继续选取，可以取

出$2l-1$个k元素，最后剩下$k-1$个整数。假设这$2l-1$个k元组是$s_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik})$，$i=1, 2, \cdots, 2l-1$，满足

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}=kb_i, \quad i=1, 2, \cdots, 2l-1.$$

现在$b_1, b_2, \cdots, b_{2l-1}$是$2l-1$个整数，而猜想对$l$真，于是又可选出$l$个整数$b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{il}$使得

$$\sum_{m=1}^{l} b_{im}=lc. \quad (c\text{是整数})$$

由此

$$\sum_{m=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} a_{imj}=\sum_{m=1}^{l} kb_{im}=klc.$$

这即是说猜想对kl为真。

推论。当k, l, m为非负整数而$n=2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$时，猜想成立。

根据算术基本定理和命题6，若能证明猜想对任意素数p为真，则对任何自然数n皆真。

进一步还可以得到

命题7。如果猜想成立，则在任意给出的$mn+n-1$个整数中必能选出mn个使其和能被n整除。这里m，n都是自然数。

对m施行数学归纳法来证明，在此从略。

四、简单的结束语

这道数学竞赛题的推广工作，学生自然能增强提出问题、分析问题和解决问题的能力，而教师自己也受到一些教

益。虽然问题没有彻底解决，但是已经得到若干有趣的命题。更一般地我们还可以有下边这样的结论：

设有a，b，c三个自然数，$a\geqslant b$。如果下述语句成立：从任意给定的a个整数之中必能选出b个，使这b个数的和能被c整除，则称整数a满足(b, c)性质。满足(b, c)性质的最小整数记作$f(b,c)$。那么

1．若a满足(b, c)性质，则必$c|b$，从而$f(b, c)$只当$c|b$时才有意义。

2．当$n=2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$时，$f(n, n)=2n-1$。$f(an, n)=an+n-1$。（k，l，m为非负整数）。

猜想。对任意自然数m，n有$f(mn, n)=mn+n-1$。

扩张与因袭*

傅种孙

中学数学教师们领着学生走一条康庄大道：“由整数走向分数，由正数走向负数，由有理数走向无理数，由实数走向虚数”。这是在那里扩张数系，同时又希望“整数的性质分数也有，正数的性质负数也有，有理数的性质无理数也有，实数的性质虚数也有”。这是在那里因袭数性。

今天要讨论的，就是当我们领着学生扩张数系、因袭数性时，应当注意的地方。

小学的分数除法，初中的负数减法、乘法，高中的虚

* 1935年北平师大所办中学教员暑期讲习会中第二次讲演记录。

数，都是我们所经过的难关。我们当学生，先生把我们讲糊涂了；我们当教师依然没有把学生讲明白。

其实这里边的困难，不但学生不易了解，就是教员也不很容易彻底了解。“越是起初的东西，若是追究起来，越是困难”，这是涉猎过算理哲学的人都知道的。顶容易的是不前不后，不复杂不简单的地方。所以我们选择一点中间的材料先谈谈，借以引导我们的讲论。

当我们说明了a^1，a^2，a^3，…指什么，并且证明了“指数定则$a^m a^n = a^{m+n}$，…当m，n为正整数时都对”以后，就想把它们用到负数、分数上去。这就是要把m，n扩张到一切有理数，而又想因袭$a^m a^n = a^{m+n}$，…这几个性质。

明眼人一看，就知道出了问题：没有言明$a^{1/3}$与a^{-2}怎么讲，怎好说$a^{1/3}a^{-2}$究竟是不是$a^{-5/3}$呢？说不是，自然是不对，说是，也一样没有意义。凡是一个命题，在辨别是非之前，必须将其中所用名词的意义规定明白。

所以指数定则究竟当m，n为有理数后是不是对，先要问a^m当m为有理数时怎么讲？

a^{-2}，$a^{1/3}$现在还是一些没有过用，没有意义的记号。我们要打算用它们，可以任意给它们一个意义，譬如说，我们可以叫

$$a^{-2} = \sqrt{a}, \qquad a^{1/3} = \frac{1}{a^3}$$

这自然是骇人听闻；但是理论上并没有矛盾。你说那么一来，岂不是不合指数定则吗？确乎不合，但是谁说正整指数的指数定则，负指数分指数必须服从呢？然而这样办究竟是别扭呀！这倒是理由，所以我们要找一个不别扭的定义。

正当的办法是先大概观察一下，要想不别扭，大约要怎么样下定义才好，于是就这样下定义；然后证明这个定义确乎不别扭。譬如“范氏代数”（Fine，college algebra）：

§594。定义$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$，

§595。定义$a^0=1$，

§596。定义$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$，

§597。定理$a^m a^n=a^{m+n}$，

§598。定理$(a^m)^n=a^{mn}$，

§599。定理$(ab)^n=a^n b^n$，

就是这种办法，情从理顺，面面顾到了。

还有一个办法，先不问a^{-2}，$a^{1/3}$怎么讲，一口气就假定旧有的指数定则当m，n为任何有理数时都对；然后去寻求a^{-2}，$a^{1/3}$应有的意义。

不问a^{-2}，$a^{1/3}$怎么讲，如何能说它们适合指数定则呢？我没有敢断定，不过是假定罢了。谁知道点怎么讲？为什么替它立上那些公理呢？这种方法叫约定法（Postulation），亦数学之一道也。用这个办法的很多，譬如“赫奈二氏初等代数”（Hall and Knight，Elementary algebra）：

§236。假定$a^m a^n=a^{m+n}$，

§237。求得$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$，

§238。求得$a^0=1$，

§239。求得$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，

§241。指明他是用这种方法。

二法各有利弊，前者分外麻烦，后者要提防矛盾。此范