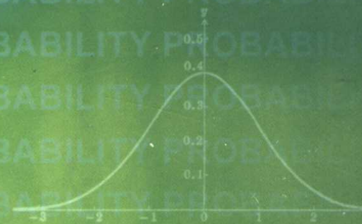
高等院校名师精品课程教材

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



概率统计基础

GAI LǙ TONG JI JI CHU

王拉娣　主编

中国科学技术出版社

高等院校名师精品课程教材

概率统计基础

王拉娣　主编

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

概率统计基础/王拉娣主编. —北京：中国科学技术出版社，2005.8

高等院校名师精品课程教材

ISBN 7-5046-4127-8

Ⅰ.概… Ⅱ.王… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085499 号

责任编辑：郑洪炜
封面设计：陈京宇
责任校对：刘红岩
责任印制：王 沛

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码：100081

电话：010-62103210 传真：010-62183872

http://www.kjpbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京国防印刷厂印刷

*

开本：787 毫米×960 毫米 1/16 印张：14.5 字数：290 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—3300 册 定价：28.00 元

内 容 提 要

本教材主要介绍概率、随机变量与分布函数、随机变量的数字特征、中心极限定理等概率论中的基本内容和方法,还介绍了数理统计的基本概念和统计推断的基础知识和基本方法.

本教材着重基本概念和基本方法的阐述,在概念的引进上,力求有趣,与实际结合,并不失严谨性.

书中每章都配有习题,习题精炼,题型多样,并在书末附有参考答案.

本教材可以作为普通高等学校经济、管理及文科各专业的教材,也可作为继续教育学院本科生的概率统计教材.

前　　言

本书的主编王拉娣教授于2001年主持了山西省教育厅实施的21世纪高等教育改革研究项目——“面向经济全球化,构建经济管理类高等数学课程新体系”的研究,项目组成员对国内经济管理类院校的大学数学课程的教学现状以及所用教材进行了充分调研,并与经济管理专业教学、研究人员进行了多次研讨,制定了大学数学所包括的“微积分”、“线性代数”、“概率统计”三门课程的课程内容、课程体系、编写大纲和编写思路,力求在不破坏数学内容的逻辑性、严密性的前提下,增强上述三门课程教材的实用性、可读性、趣味性,从而提高学生对课程内容的理解和掌握速度,激发学生学习大学数学的兴趣,使他们学有所获、学有所用.

本书以国家教委颁布的经济数学教学大纲为准绳,同时也结合近几年经济类研究生入学考试大纲的要求,书中每章前面都对本章的内容作了简明的提要,点明本章的核心内容;对每个重要概念和结论的引入,都从实例出发,通过对实例的分析和理解,定义出概念和得出总结性结论,这不仅起到画龙点睛的功效,同时克服了直接给出定义引出的枯燥性;本书还结合概率统计发展的历史事实并和实际联系,尽显概率统计的实用性与趣味性,但并未忽略其严谨性和知识性,努力实践把知识融入趣味之中的教学理念.

概率统计是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科,应用广泛,发展迅速,是数学的一个有特色的分支.一方面,它有别开生面的研究课题,有自己独特的概念和方法,内容丰富,结论深刻;另一方面,它与其他数学分支又有紧密的联系,是近代数学的重要组成部分.目前,概率统计的方法已广泛应用于自然科学、技术科学、社会科学和管理科学中.在十几年的教学工作中,我们在不断总结与提高自身水平的同时,在探索如何使概率统计这门课程“学起来容易,用起来也不难”上下了很大功夫.我们认为,理解基本思想,掌握基本方法,勤于思考基本问题是打开概率统计这把锁的三把钥匙.本书编著者均有15年以上的教学经验,它来源于教学,又实践

于教学,经过多次修改,最终成书奉献给读者. 毫不夸张地说,本书是编著者的精心之作.

虽然学习这门课程的读者主要是着眼于其应用,但我们认为:把教材写成方法手册式的东西不一定可取,要用好概率统计方法,除了与问题有关的专业知识外,对概率统计概念的理解,以及对方法的理论根据的认识(它关系到方法的应用条件及局限性)也很重要. 基于这个考虑,本书花了一些篇幅在概率统计概念的引入和阐释上,并在设定的数学程度上,坚持叙述的严谨. 当然,任课教师在讲授时可根据需要作适当的补充和调整.

本书在各章后都附有习题,一类是"基础性"习题,在学习相关内容之后都可以做出,目的是加深对书中基本内容的理解和基本方法的掌握;另一类是"中等难度"的习题,解这些题无需特殊技巧,而要求读者对所学内容有切实的掌握,并在一定程度上能灵活运用. 希望学习这门课程的学生能尽可能多地独立做出这些习题,这对切实掌握一门数学课程至关重要. 为了方便教和学,编写了"参考答案",附于书后.

本书编著由山西省 2004 年度教学名师王拉娣教授牵头,任家禄编写第一章、第二章,王拉娣编写第三章,冯玉马编写第四章、第五章、第六章,王玉玫编写第七章、第八章,最后由任家禄负责校稿. 书中不当以至谬误之处,恐在所难免,请同行专家及读者不吝指教.

编著者

2005 年 7 月 7 日于太原

目　　录

第一章　随机事件与概率

在自然界与社会生活的一切活动中,存在着两种现象,一种是确定性现象,另一种是不确定性现象．概率论与数理统计就是研究这种不确定性现象统计规律的学科．第一章将着重介绍概率论中两个最基本、同时也是最重要的概念——随机事件与概率,并研讨它们的一些性质．

第一节　预备知识

一、两个基本原理

1．加法原理

做完一件事有 r 种方式(途径),第 1 种方式有 n_1 种方法,第 2 种方式有 n_2 种方法,…,第 r 种方式有 n_r 种方法,这些方法各不相同,用其中任何一种方法都可以把这件事做完,则完成这件事共有:

$$n_1+n_2+\cdots+n_r \tag{1.1}$$

种不同的方法,如图 1.1．

这条原理叫加法原理．

例 1.1　从太原到厦门,可坐汽车、火车和飞机,每天它们分别有 2 班次、2 班次、1 班次,从中任选 1 种方法,共有 5 种方法从太原到厦门．

2．乘法原理

完成一件事有 r 个步骤,第 1 步有 n_1 种方法,第 2 步有 n_2 种方法,…,第 r 步有 n_r 种方法,各步骤连续完成,这件事才算完成,则完成该件事共有:

$$n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_r \tag{1.2}$$

种不同的方法,如图 1.2．

例 1.2　从甲地到乙地有 2 条路,从乙地到丙地有 3 条路,从丙地到丁地有 4 条路,则由甲地经乙地、丙地再到丁地共有

$$2\times3\times4=24$$

条路.

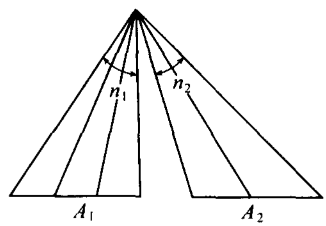


图 1.1

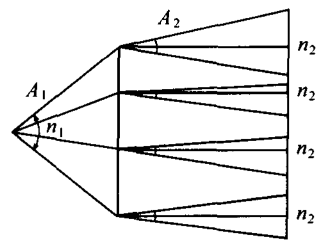


图 1.2

这条原理叫乘法原理.

一件事情有几种方式完成,每种方式中的每个方法都能完成此事,求总数用加法原理. 一件事情分几个步骤连续才能完成,求总数用乘法原理. 这两条原理,是排列与组合的基础.

二、排列

1. n 个相异元素不允许重复的 r 元排列

从 n 个元素里,一次取一个,共取 r 次,按顺序排成一列,叫做从 n 个元素里取出 r 个元素的排列. 这里得出的排列总数叫排列数,记为 P_n^r,其中 $1 \leqslant r \leqslant n$.

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{1.3}$$

从 n 个元素里,一次取一个,共取 n 次,按顺序排成一列,叫做从 n 个元素里取出 n 个元素的全排列. 记为 P_n.

$$P_n = n! \tag{1.4}$$

规定: $P_n^0 = 1$.

则有:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.5}$$

例 1.3 某铁路全线共有 15 个车站,问全线共需客车票多少种.

解:共需从 15 个元素里取出 2 个元素的排列数,排列中甲乙、乙甲两种,理解为由甲站到乙站与由乙站到甲站两种票,所以共有

$$P_{15}^2 = 15 \times 14 = 210$$

种客票.

2．n 个相异元素允许重复的排列

n 个相异元素允许重复的 r 元排列($r\leqslant n$)

从 n 个元素中,一次取一个元素,共取 r 次,允许重复取,其排列数公式为:

$$n^r \tag{1.6}$$

3．n 个相异元素不允许重复的环形排列

(1) n 个相异元素的环形全排列($n>1$).

把 n 个相异元素围成个圆形(或封闭形)的排列,叫环形排列,以前讲的排列叫线性排列.

为了说明环形排列的公式,在此仅用一个具体的例子说明如下:

5 把椅子,其编号为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,它们摆在一个圆桌周围,另有 5 个人,其编号为 1,2,3,4,5,其排列数为 5!=120,像其中的这 5 个排列:

12345,23451,34512,45123,51234.

让这 5 个排列的人依次坐到五把椅子Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ上,如图 1.3.

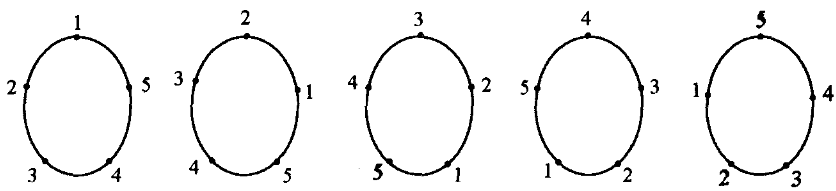


图 1.3

在环形排列中,这 5 种环形排列,虽然每人坐的椅子不同,但彼此间的相对位置相同,即左右邻居相同. 视为同一种排列. 因此 5 人排成一个环形,有 4!=24 种排法.

总之,n 个相异元素的环形全排列,其排列数公式为:

$$(n-1)! \tag{1.7}$$

例 1.4　8 人围圆桌而坐,有 7!=5040 种排列法.

(2)不论顺逆方向时,n 个相异元素的环形全排列($n>1$)公式:

$$\frac{(n-1)!}{2} \tag{1.8}$$

例 1.5　颜色不同的 7 个玻璃球,可以串成 $\frac{6!}{2}=360$ 种不同的项链.

(3) n 个相异元素的 r 元环形全排列($n\geqslant r>1$)公式:

$$\frac{P_n^r}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!} \tag{1.9}$$

(4)不论顺逆方向时,n 个相异元数的 r 元环形排列($n\geqslant r>1$)公式:

$$\frac{P_n^r}{2r}=\frac{n!}{2r(n-r)!} \tag{1.10}$$

三、组合

1. 相异元数不允许重复的组合

从 n 个元素里,每次取出 r 个,不管它们之间的顺序,合为一组,叫做每次从几个元素中取出 r 个元素的组合. 这样得出的总数,叫做组合数,记为 C_n^r或$\binom{n}{r}$, 其中 $1\leqslant r\leqslant n$. n 个相异元数不允许重复的组合数公式:

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.11}$$

规定: $C_n^0=1, C_n^r=0, r>n$.

例 1.6 平面上有 10 个点,其中没有 3 个点共线,每 3 个点可以确定一个三角形. 这些点可以确定

$$C_{10}^3=120$$

个三角形.

2. 组合的三个性质:

性质 1 $C_n^r=C_n^{n-r}$. (1.12)

性质 2 $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$. (1.13)

性质 3 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$. (1.14)

例 1.7 全班 50 人,两两握手一次,共握手多少次?两两互赠相片一张,需多少张照片?

解:(1)握手是组合问题,所以共需

$$C_{50}^2=1225$$

次握手.

(2)互赠相片是排列问题,所以共需

$$P_{50}^2=2450$$

张相片.

第二节 随机试验与样本空间

一、随机试验

自然界和社会生活及人类的一切活动中,存在着各种各样的现象,真是千姿百态,气象万千. 而人是万物之灵,自然之首,自然会从中寻找出其规律.

当我们多次观察自然现象和社会现象之后,会发现许多结果在一定的条件下必然会发生. 例如,在没有外力作用的条件下,作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动;又如,在海边生活时,水加热到100℃时必然会沸腾等. 这种在一定条件下,必然会发生的事情,称为必然事件. 反之,那种在一定条件下,必然不会发生的事情,就称为不可能事件. 例如,在不受外力作用的条件下,作等速直线运动的物体改变其等速直线运动状态是不可能的.

从所举例子中看出,必然事件和不可能事件,虽然形式相反,但是两者的实质是相同的. 必然事件的反面就是不可能事件,而不可能事件的反面就是必然事件. 所有这种现象,我们由其特征称为确定性现象,它广泛地存在于自然现象和社会生活中. 确定性现象是我们在前面所学的一些数学学科(数学分析、高等代数等)的研究对象.

但是在自然现象和社会生活中还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,例如,用同一仪器多次测量同一物体的重量,所得结果总是略有差异,这是由于诸如测量仪器受大气影响,观察者生理上或心理上的变化等偶然因素引起的. 同样地,同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹,弹落点也不尽相同,这是因为炮弹制造时种种偶然因素对炮弹质量有影响,以及炮筒位置的误差,天气条件的微小变化等都影响弹落点. 再如,从某生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡的寿命也有差异等.

上述事例明确地告诉我们,对同一现象,尽管条件(可以控制的)基本不变,但多次试验结果却不同,也就是说结果事先无法确定. 这种现象我们称为不确定现象,又叫随机现象. 随机现象是概率论和数理统计的研究对象.

我们又把对随机现象的观察叫**随机试验**,简称**试验**,随机试验一般用 E 来表示. 严格地讲,满足下列"三性"条件的随机现象叫做**随机试验**:

(1)可以在基本条件不变时多次重复——**可重复性**;

(2)在结果出现之前明确有哪些可能的结果——**可观察性**;

(3)在结果出现之前不能确定哪一个结果一定出现——**随机性**.

例 1.8 甲、乙、丙、丁四人打升级,观察他们的组合;若打红桃尖,观察他们的组合.

例 1.9 观察某天进入某一商场的人数;观察某天某一商场的销售额.

例 1.10 观察某电子管厂生产的电子管的寿命.

例 1.11 观察奥迪汽车每辆每公里的耗油量.

二、样本空间

对任意一个随机试验,我们关心的是它的一些结果. 把它的一切可能结果放到一个"集合"内,并定义一定的运算,将是一件有意义的事情. 就像代数中的"向量空间". 总之,为了研究随机试验,我们必须知道这个试验可能出现的结果. 我们把这些结果称为样本点,一般用 ω 表示. 而把一个随机试验的样本点的全体称为样本空间,用 Ω 表示. 对于具体的一个随机试验 E,一定有一个样本空间来表述它的一切可能的结果,确定其适当的样本空间 Ω,也是表述随机试验的第一步.

下面就是一些常见的例子.

例 1.12 在研究英文字母时,选择样本空间 $\Omega=\{$空格, $A,B,\cdots,Z\}$ 是恰当的. 这个样本空间仅有 27 个样本点,是比较简单的样本空间.

例 1.13 观察一小时中落在地球上某一区域的粒子数,可能的结果一定是非负整数,而且很难指定一个数作为它的上界,这样,可以把样本空间取为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$. 这个样本空间含有无穷多个样本点,但这些样本点可以依照某种次序排列出来,以后我们将称它的点数为**可列个**,也叫**可数个**.

例 1.14 讨论某地区的气温时,我们自然把样本空间取为 $\Omega=(-\infty,\infty)$,或 $\Omega=[a,b]$. 这个样本空间包含有无穷多个样本点,它们充满一个区间,不是一个可列点集.

例 1.15 考察地震震源时,可以把样本点取为 (x,y,z),其中 x 表示震源的经度,y 表示纬度,z 表示深度. 这时,样本空间是三维空间中某一区域.

从以上例子可以看出,问题不同,样本空间可以相当简单,也可以相当复杂.

在今后讨论中,经常把样本空间认为是预先给定的. 当然对于一个实际问题或一个随机现象,如何用一个恰当的样本空间来描述它也很值得研究. 但是在概率论的研究中,一般都假定样本空间是给定的. 这是必要的抽象,这种抽象使我们能更好地把握住随机现象的本质,而且得到的结果能广泛地应用. 事实上,一个样本空间可以概括各种实际内容很不相同的问题:例如,只包含两个样本点的样本空间既能作为掷硬币出现正、反面的模型,也能用于产品检验中出现"好品"及"废品",又能用于气