

高中强化训练与 应试技巧丛书

数 学 分册

唐盛昌
吕宝兴

胡炯涛 编著



中国环境科学出版社

· 高中强化训练与应试技巧丛书 ·

编委会成员

过传忠 张茂昌

陈国强 陈炳福

唐盛昌 顾朝晶

(以姓氏笔划为序)

序 言

振兴中华，科技领先。提高科技水平，教育为本。在二十世纪的最后十年和二十一世纪中，世界各国国力的强弱，教育和科技水平的高低将是一个重要乃至决定的因素。这已为我们国人所共识了。

在教育事业中，普通教育阶段是一个极为重要的阶段。既要提高全民族的政治修养和道德文化素质，又要兼顾我国社会主义建设的人才，可以分为两个方面。一方面是多方面多层次的有较高素质和坚实基础的各种普通工作人员，另一方面是多学科的高层次的专门人才。两者不可偏废。后者虽然要在高等学校中专门培养，但在普通中学阶段，也应该及早地作准备性发现和培养。

有鉴于此，中国环境科学出版社邀集了一批有丰富知识和教学经验的各科中学教师，根据长期的教学经验和心得，编辑了一套《高中强化训练与应试技巧丛书》。分为语文、英语、数学、物理、化学等五册。供普通高中学生之用。这是一套寓指导性、启发性和实用性于一体的有特色的学习辅导丛书。对高中学生来说，有很强的针对性，能满足高中学生有效地提高学习质量和能力的要求，使同学们，

开阔视野，既具有坚实的各科基础，又具有敏锐的思维能力和求知的欲望。它对同学们高中阶段的学习与复习、参加高中会考与高考予以直接的指导和帮助。这些同学，在进入高等学校之后，再经名师指点，就能成为我国社会科学和自然科学各科科技事业的专门人才，为我国在国际舞台的学术竞争中，有更大实力，早日发扬异采。我中华民族的振兴，这套丛书将有一定的微力。是为序。

赵宪初

编者的话

本书是为指导高中毕业生系统复习数学而编写的参考书。

全书根据初等数学中代数、三角、立体几何、解析几何四门学科，分别就疑难概念选析、常用解题方法选讲及综合题选讲三个专题帮助同学抓住每门学科中的重要知识点和熟练掌握解题技巧。通过最后的范卷分析，力求使同学将中学阶段学习的数学知识融会贯通、灵活应用，达到全面掌握初等数学知识的目的。

本书由上海中学唐盛昌、吕宝兴老师和上海师大附中胡炯涛老师编写。如有不当之处，谨请读者批评指正。

编者

目 录

第一章 数学高考试题评析	1
第一节 数学高考试卷的结构和题型	1
第二节 高考试题的特点	2
第二章 代数	7
第一节 疑难概念选析	7
一、函数及其性质	7
二、不等式	14
三、数列	17
四、复数	24
五、排列、组合和二项式定理	33
第二节 代数常用解题方法选讲	38
一、含参方程与不等式的讨论	38
二、函数值的有关计算	41
三、函数作图象	46
四、不等式的证明	51
五、数列的和与极限	60
六、递推数列	74
七、复数的代数运算	87
八、复数的三角形式与几何意义	100
九、数学归纳法	108
十、如何做证明题	129
第三节 代数综合题选解	136
第三章 三角	158
第一节 疑难概念选析	158
一、函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	158
二、三角函数的充要条件	160
三、三角函数和反三角函数的单调性	162
四、半角公式中的符号	164

五、反三角函数的图象	167
六、判断反三角函数的奇偶性	169
七、把握 $\sin(\arcsin x)$ 和 $\arcsin(\sin x)$	171
八、判定三角方程的解集相等	174
九、三角方程的增失根问题	176
第二节 常用解题方法选讲	178
一、求三角函数值的常用方法	178
二、化简与证明三角式的常用方法	185
三、条件等式的证明	191
四、三角函数的最值	197
五、简单三角方程的主要解法	204
第三节 三角综合题选解	212
一、三角与代数的综合题	212
二、三角与立几的综合题	226
三、三角与解几的综合题	230
第四章 立几	235
第一节 疑难概念选析	235
一、怎样理解异面直线及其公垂线	235
二、平行与垂直的唯一性与传递性	236
三、平行与垂直的简单判定	238
四、直线与其在平面内射影的各种位置关系	239
五、过圆锥顶点的最大截面	241
六、锥体与台体的平行截面	242
第二节 常用解题方法选讲	243
一、处理平行垂直问题的常用方法	243
二、处理距离问题的几种方法	250
三、求直线与平面所成角的常用方法	256
四、求二面角的常用方法	260
五、求异面直线的几种方法	269
六、几何图形的折迭	274
七、立几中极值问题的解法	281

八、求多面体和旋转体面积和体积的几种方法	288
第三节 立几综合题选解	296
第五章 解析几何	306
第一节 疑难概念选析	306
一、直线的斜率与截距	306
二、两直线的夹角	309
三、距离	312
四、过两曲线交点的曲线系方程	316
五、圆锥曲线的定义	318
六、圆锥曲线方程	322
七、直线的参数方程	325
八、参数方程和含参量普通方程	328
第二节 常用解题方法选讲	332
一、直线与曲线相交问题的一般解法	332
二、焦点弦问题的解法	336
三、中点弦问题的解法	341
四、对称问题的解法	346
五、证明题的解法	353
六、轨迹问题的解法	360
七、极值问题的解法	377
第三节 解几综合题选解	384
第六章 范卷分析	412

第一章 数学高考试题评析

第一节 数学高考试卷的结构和题型

目前数学高考试题一般有选择题、填空题和解答题三类主要题型，全卷答题时间为120分钟，满分分数为120分，题量常控制在26题左右。其中选择、填空和简答等基础题约为20题，所占分值比例一般在50%上下。如89、90全国卷这类题的分值正好都是50%，解答题通常安排6题，难度逐渐增大，这类题考查的知识和能力往往与高校的进一步学习有较紧密的联系。

目前数学高考试题中的选择题，都是“四选一”的辨正选择题，解答时不需说明理由，只要把正确结论的代号填入题后的圆括号即可。这类选择题的解法很多，大致可以有如下几类：1. 直接从已知条件出发求出答案，再与各选项比较作出选择；2. 运用各种方法，通过排除错误选项来找出肯定的答案；3. 将上述两种方法综合应用，找出正确结论。

高考数学试卷中的选择题，一般只考查基础知识和基本技能。除了少数题目属中等难度外，大部分都比较容易，但由于它的计分方法是或者全分、或者零分，因此解题时要特别强调正确性，尽量避免不必要的失分；另一方面也要注意解题速度，争取用尽可能少的时间把它答完，为此，在答题时要充分利用各选项的暗示作用，适当进行有根据的猜测。

填空题也只要求直接写出结果，同样采用对则全分、错则零分的计分方法。它与选择题的不同之处，在于没有给出可供选择的选项，因此答题时只能从已知条件出发去直接获得结论，这里同样要强调答题的正确与迅速。

解答题包括计算题、证明题、讨论题、作图题与应用题等,是大家较为熟悉的题型。解答时需要逐步书写解题过程,解答题的难度一般是中高档的,中档题与课本复习参考题中较难的题难度相当,最后1—2题的难度还要高些。解这类题时要注意三点:一是注意表述的严密性,如推导或计算过程中使用的是否是等价变换,有没有遗漏某些特殊情况等等。如果采用某些非常规方法解,那就更要写清楚解法的依据。表达时既要避免表达过份详细;也要防止跳跃性过强。二是要尽可能地反映所掌握的知识和技能。由于解答题是按步给分的,故有时虽然没有得到最后结果,但只要解题步骤和中间结果有一部分是正确的,仍可得到相应的分数,因此答题时应在卷面上把自己对解答该题的思路和处理方法尽可能地反映出来。三是要合理分配时间,高考试卷对考生的解题是有一定速度要求的,每道题的分值与解该题所需的时间不一定是成比例的。例如最后一道压卷题一般难度较大,所占分值在10—12分,不超过总分的 $\frac{1}{10}$,但要答对该题,需要花去的时间通常要大于全卷答题时间的 $\frac{1}{10}$ 。因此解题时要避免在某一道题上花时过多,以致没有足够时间去解答其它会解试题的情况。

第二节 高考试题的特点

一、全面考查基础知识

数学是有严密逻辑体系的知识系统,历届高考试卷都十分强调对基础知识的考查。一般情况下,代数、三角、立几、平面解几等几乎所有基本概念都会被考查到。在一道题中往往要涉及到许多知识点,如89卷第(5)题:“已知 $\{a_n\}$ 是等比数列,如果 $a_1 + a_2 + a_3 = 18$, $a_2 + a_3 + a_4 = -9$, 且

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 的值”, 就考查了等比数列的

通项公式、无穷递缩等比数列所有项和的概念、多项式变换法则、极限概念和计算等许多内容。

高考数学试题注意体现以课文为本的命题思想, 如89卷第(19)题: “证明 $\operatorname{tg} \frac{3}{2} x - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos 2x}$ ” 就源于

高中代数第一册P216第19(3)题: “化简 $\operatorname{tg} 67^\circ 30' - \operatorname{tg} 22^\circ 30'$ 。” 考察89年试卷, 可以发现全卷24道题中, 有18道题源于课本, 这样在考查基本概念时, 就把重点真正放到了对有关基础知识的掌握上, 而不是过分追求技巧和难度。

数学高考试题, 还注意在不超过中学数学教学大纲要求的前提下, 考查今后继续学习时所必需的某些基础知识。如函数概念在学习高等数学时是要经常用到的, 它就被一再考查到。如90卷的(5)、(6)、(15)、(19)题等, 在考查这些内容时, 侧重点往往放在运用这些双基去分析和解决问题上, 如90卷(15)题考查反三角函数概念时, 还要求会正确运用平移变换与对称变换。

为适应高考在这方面的要求, 学习基础知识时, 应该强调在正确、全面、严格上下功夫。如能正确审题、弄清题意, 正确使用数学语言和符号, 正确进行等价和非等价变换等; 能够全面研究一个问题的所有情况, 做到不重不漏; 能够考虑到种种可能出现的特殊情形等; 能够做到答题过程规范, 表达清晰严格等等。

二、重视考查基本数学方法

中学数学涉及到的数学方法, 大致可分为三类: 一般逻辑方法, 如分析、综合、归纳、类比、反证法等; 中学数学中的一般方法, 如代入法、图象法、比较法、分类法、数形

结合方法、数学归纳法等；中学数学中的特殊方法，如配方法、待定系数法、换元法、消元法等。在高考试卷中，十分重视对上述各种基本数学方法的考查。

例如数形结合的方法，体现了抽象的数学语言与直观图形的结合，抽象思想和形象思维的结合，是一个基本的数学思维方法，高考试题就注意从函数图形和立体图形多个方面对此进行考查。如89卷(21)题“自点A(-3, 3)发出的光线L射到x轴上，被x轴反射，其反射光线所在直线与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相切，求光线L所在直线方程”。可先根据题意作图，然后根据光线反射性质作出已知圆关于x轴的对称图形，依靠图形的直观形象作用，得到这一问题的具体解答。90卷第22题“已知 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha +$

$\cos \beta = \frac{1}{3}$ ，求 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ 的值”。可通过建立单位圆，得出

A(cos α, sin α) B(cos β, sin β)的中点坐标($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$),

由此直观地求出 $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ 的值，再得到结论。

例如待定系数法，是初等数学和高等数学中经常应用的方法，高考中也常需用到。如89卷(23)题“是否存在常数，a、b、c使得等式 $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{12}$

$(an^2 + bn + c)$ 对于一切自然数都成立”。解题时要先用待定系数法求出a、b、c，然后才能用数学归纳法加以处理。90卷(25)题“设椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$ ，求这个椭圆方程，并求椭圆上到点P的距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标”。也要根据条件，先求出a、b，才能得到最后结果。

又如分类的方法，它往往涉及对所含参数字母的讨论，由于它可以考查学生思维的严密性与条理性，也常被作为难点来考查学生。如89卷(22)题，“已知 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，试求方程 $\log_a(x - ak) = \log_a 2(x^2 - a^2)$ 有解的 k 的取值范围。”解题时，就需对 k 进行讨论，最后得到 $k \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ；又如90卷(24)题，“设 $a \geq 0$ ，在复数集 C 中解方程 $z^2 + 2|z| = a$ ”。解题时也需对各种情况进行讨论，才能最后得到当 $a = 0$ 时， $z = \pm 2i$ ， $0 < a \leq 1$ 时， $z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i$ ， $a > 1$ 应纯虚数解的情况。

总之，只有在学习时，重视对基本数学方法的掌握、理解和应用，才能适应高考时对基本数学方法的考查要求。学习时应把重点放在数学中通性和通法的掌握上，不应过份追求那些适用范围小，用途不广的特殊技巧。

三、突出考查数学能力

根据大纲，高考试卷通常注意考查学生逻辑推理的合理性、空间想象力的准确性和完整性，计算的准确性和熟练程度，思维的深刻性、灵活性和敏捷性、书写表达的清晰性和条理性，特别要考查考生在陌生的情景中，分析问题特点，灵活应用已有知识解决问题的能力。

为了突出考查灵活应用双基的能力，试卷的容量都较大，要求考生根据掌握的知识、技能，对新的问题情景迅速作出判断，以解题速度的快慢来区分考生水平的高低。如这几年来全国卷，平均要求4—5分钟答一道小题，这就对考生思维的敏捷性和灵活性、运算的合理性、熟练性和正确性，提出了更高的要求。

高考试卷命题时，特别在编制解答题时，尽可能选用新编的题目，这类题目在一般复习资料中并不多见，但是只要考生真正掌握了基本知识和基本方法，具有较强的数学能力，

仍是能够加以解决的。如90卷的(26)题“设 $f(x) = \lg \frac{1 + 2^x + \cdots + (n-1)^x + n^x a}{n}$ ，其中 a 是实数， n 是任意给

定的自然数，且 $n \geq 2$ ，(i) 如果 $f(x)$ 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时有意义，求 a 的范围；(ii) 如果 $a \in (0, 1)$ ，证明 $2f(x) < f(2x)$ 当 $x \neq 0$ 时成立。”试题立意新颖，要求能综合运用对数函数、指数函数、数学归纳法、不等式等知识，对思维的深刻性、运算的灵活性等方面有较高的能力要求，这样做就把考查的重点真正落实到数学能力上来了。

再来分析一下对综合能力的要求，仔细观察这几年试卷可知，知识的综合程度有所提高，涉及到多科知识的试题与单科知识中涉及到多个章节的试题要占到试卷的一半以上，此外在推理中往往还要求学生能够灵活地运用多种方法。根据这一特点，复习时应注意各学科的基本知识和基本方法的纵横串连，重视探索能力的培养和发展以提高综合应用双基的能力。

历届高考情况表明，数学高考对数学学习提出的要求是高的，但也是考虑学生实际的。只要我们学习时能够在扎实、全面、灵活、熟练方面狠下功夫，注意提高自己的基本数学能力，那么取得好成绩是有希望的。

第二章 代数

第一节 疑难概念选析

一、函数及其性质

1. 子集与空集

若 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$. 空集不是空集的真子集, 空集是任何非空集合的真子集.

不要把数 0 或集合 $\{0\}$ 与空集 ϕ 混淆, 不要把空集错写成 $\{\text{空集}\}$ 或 $\{\phi\}$.

例(1) 下列说法中正确的是

(A) 任何一个子集 A 必有两个子集.

(B) 任何一个集合 A 必有一个真子集.

(C) A 为任一集合, 它与 B 的交集是空集, 则 A 、 B 中至少有一个是空集.

(D). 若集合 A 与 B 的交集是全集, 则 A 、 B 都是全集.

【分析】

(A) 若 A 是 ϕ , 命题就不成立.

(B) 若 A 是 ϕ , 就没有真子集.

(C) 若 A 非空, B 非空, 它们的交集可以是空集.

(D) 若 A 、 B 中有一个非全集, 则 $A \cap B$ 不可能是全集,

所以命题 (D) 正确.

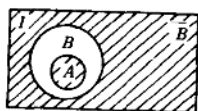


图 2-1-1

例(2). 若 A 、 B 为非空集合, 且 $A \subset B$, I 为全集, 问 $A \cap \overline{B}$ 是什么集合?

【分析】 可用图示之

显见 $A \cap \overline{B} = \phi$.

2. 函数的定义

一个函数是由定义域与对应规律“ f ”所确定的。若两个函数的定义域不同，则尽管它们有共同的对应规律“ f ”，也是两个不同的函数。

例(3) 以下各组中，表示相同函数的是

(A) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 与 $\varphi(x) = x - 1$.

(B) $f(x) = x$ 与 $\phi(x) = \sqrt{x^2}$.

(C) $f(x) = x$ 与 $\phi(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

(D) $f(x) = \log_a x^2$ 与 $\phi(x) = 2 \log_a x$.

【分析】(A)、(B)、(D)三组虽能化相同解析式，但由于定义域不同，都属不同的函数，(C)组是相同函数。

例(4) 若 $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求 $f(x)$ 。

【分析】只需把 $f(\sqrt{x} + 1)$ 表达式两边的变量加以统一。 $x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1$ ， $\therefore f(x) = x^2 - 1$ 。

由此可知，变量不是确定函数的要素。

例(5) 若 $f(x) = \pi$ ，求 $f(x^2)$ 。

【分析】这是常函数。 $f(x^2) = \pi$ 。

例(6) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$ ，试求函数 $y = f(a + x) + f(a - x)$ ($0 < a < 1$) 的定义域。

【分析】定义域是指“ f ”对应下括号内自变量的取值范围。 $\therefore \begin{cases} 0 < a + x < 1 \\ 0 < a - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < 1 - a \cdots \cdots ① \\ -1 + a < x < a \cdots \cdots ② \end{cases}$

①、②是两个“区间套”，求定义域就是求两者的公共部分。易知，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，①与②相同，随着 a 的增加，①向左移，②向右移，直至无交集。

据此，以 $a = \frac{1}{2}$ 为分界点，划分区间求交集得定义域：

$$\begin{cases} a = 1 \text{ 时, } x = 0 \\ \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ 时, } x \in [a - 1, 1 - a] \\ 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时, } x \in [-a, a] \end{cases}$$

3. 反函数

函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的值域、定义域。这也是求函数定义域、值域的一种方法。

反函数的求法是：

(1) 由 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$;

(2) 把 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$ 。

函数 $y = f(x)$ 和反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称。

单调函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也是单调函数，两者在定义域内的增减性一致。

例(7) 求 $y = \sqrt{x-1}$ 的反函数

【分析】平方求得表达式 $y^2 = x - 1$ ，注意到函数 $y = \sqrt{x-1}$ 中 $x \geq 1$ ， $y \geq 0$ ，因此所求反函数为 $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$)。

求反函数时必须注意其定义域的确定。

例(8) 求函数 $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ 的值域

【分析】函数的定义域 $x \geq 0$ ，且 $x \neq 1$ ，改写解析式为 $\sqrt{x} = \frac{y-1}{y+1} \geq 0$ ， $\therefore y \geq 1$ 或 $y < -1$ ，即为所求值域。

4. 函数的性质

奇函数与偶函数的图形都是对称图形。

关于复合函数的增减性有如下结论：设 $y = f(u)$ ， $u = g(x)$ 都是单调函数，则 $y = f[g(x)]$ 在其定义域内