中学数学课本辅导丛书

高中代数第二册学习指导

么国华　郭大文　编

辽宁教育出版社
1985年·沈阳

出 版 说 明

提高学生的自学能力，是时代对人材培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本丛书的主编，并同钱永耀同志一起审阅了全部书稿。

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，逐章逐节逐个问题地进行剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每章后面都配有巩固基本知识的思考与练习，还有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

本章知识结构为：

函数与反函数 ⇨ 三角函数与反三角函数 ⇨ 反三角函数的概念，图象，性质

⇩

已知三角函数值 ⇨ 最简三角方程与简单三角方程

（一）内 容 简 介

本章由反三角函数和简单三角方程两部分组成。反三角函数是在学习了函数与反函数的基础上介绍的。反三角函数主要讲了反正弦、反余弦、反正切、反余切函数概念、图象和它们的性质。在反三角函数的基础上介绍了简单三角方程。

（二）学 习 指 导

1．反三角函数

（1）本单元以反正弦函数为重点，强调三角函数在整个定义域上没有反函数。

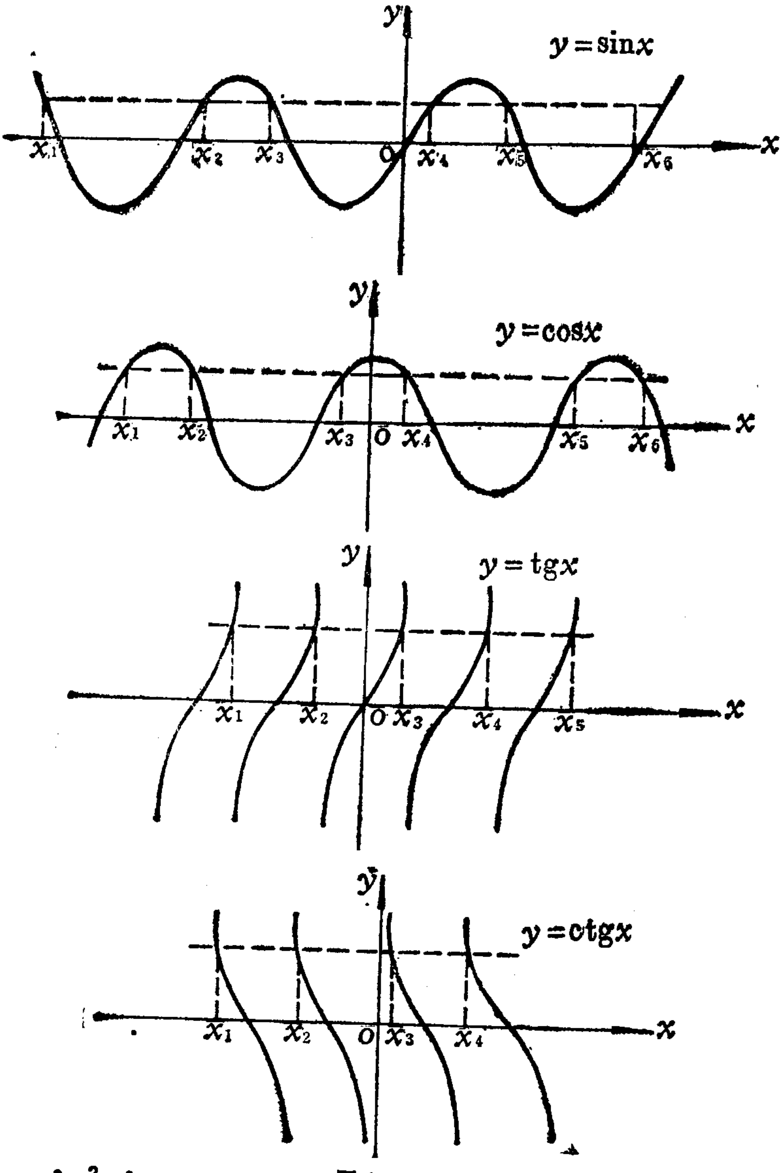
y
y = sinx
x
x1
x2
x3
O
x4
x5
x6
y
y = cosx
x
x1
x2
x3
O
x4
x5
x6
y
y = tgx
x
x1
x2
O
x3
x4
x5
y
y = ctgx
x
x1
x2
O
x3
x4

图 1—1

从图1－1可以看出：对于定义域中的每个元素，比如$x=x_0$（它表示角的度数），在值域中只有唯一的象$y=y_0$（它表示三角函数值），但是反过来对于值域中的每一个元素，比如$y=y_1$，在定义域中有无穷多个原象……x_1，x_2，x_3，x_4……这种现象的原因就是因为三角函数不是单调的而是周期函数，自变量x在变化过程中，每增（减）一定的值，对应的函数值便重复一次，因此，当给定一个函数值时，自变量x就有无穷多个值和它对应，这种情况我们在学习已知三角函数值求角时已经熟悉了，它说明各三角函数都不是从定义域到值域的一一映射。

（2）要想建立三角函数的反函数，必须在定义域上适当选取一个子集，使得各三角函数成为从这个子集到值域的一一映射，当然对不同的三角函数选取不同的子集。

这个子集一般是根据以下几点来选取的：

①在这个子集上，三角函数是单调的；

②在这个子集上，三角函数能取得值域中的一切值；

③在这个子集上，包括一切锐角。

只要满足了前二条就能达到"一一映射"的目的，而第三条只是为了研究问题的方便。

函数$y=\sin x$的定义域是R，$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$是它的一个子集，值域是$[-1,\ 1]$，在这个子集上的图象．如图1—2所示。

从图1－2可以看出：$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的、连续的，函数$y$可以取得$[-1,\ 1]$上的一切值，这就保证了对于$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的每一个$x$的值，在$[-1,1]$上都有唯一的值和它对应，而且不同的$x$值对应不同的$y$值；反过来，对于$[-1,1]$上每一个$y$值，在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上只有唯

一的 x 值和它对应，这就说明 $y=\sin x$ 是从 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上到 $[-1, 1]$ 上的一一映射，因而具备了建立反函数的条件。

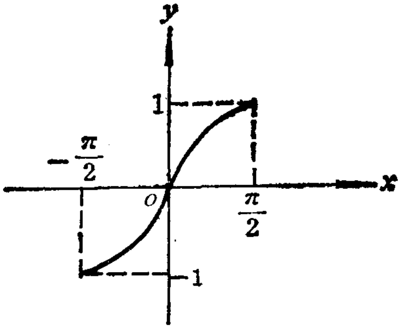

图 1—2

与此类似，根据上面所提出的三点要求，我们在 $y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$ 的定义域上分别选定子集 $[0,\pi]$，$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$(0, \pi)$，使得 $y=\cos x$ 是从 $[0, \pi]$ 上到 $[-1,1]$ 上的一一映射，如图 1－3．$y=\operatorname{tg}x$ 是从 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内到 R 上的一

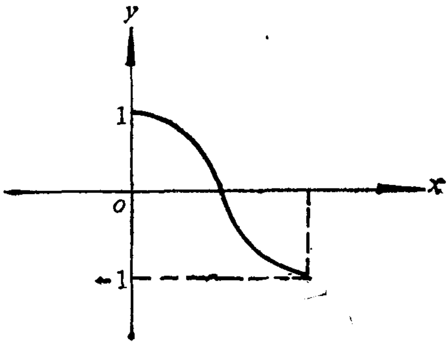

图 1—3

一映射．如图 1－4．$y=\operatorname{ctg}x$ 是从 $(0, \pi)$ 内到 R 上的一一映射．如图 1－5．从而具备了建立各自的反函数的条件。

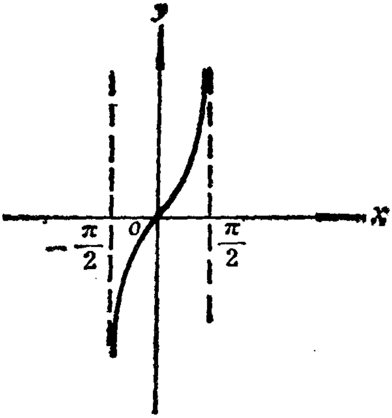

图 1—4

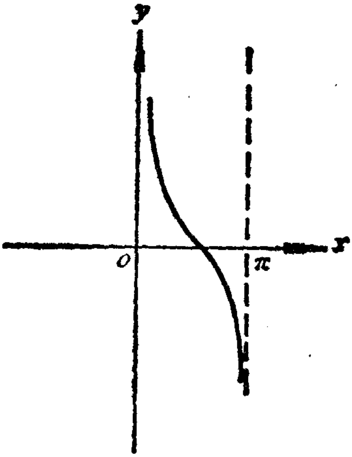

图 1—5

（3）反三角函数的建立及它们的符号 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ 的意义.

根据逆映射和反函数的定义，按下列表中步骤来建立反正弦函数：

	对应关系	定义域	值域
一一映射	$x \to y = \sin x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [-1, 1]$
逆映射 $f^{-1}(y)$	$y \to x = \arcsin y$	$y \in [-1, 1]$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
习惯形式 $f^{-1}(x)$	$x \to y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

上表中的逆映射 $f^{-1}(y)$ 所确定的函数式 $x = \arcsin y$，就是 $y = \sin x$ 的反函数，y 是自变量，x 是 y 的函数. 由于

$y=\sin x$是超越函数，我们不能象代数函数（如 $y=kx+b$）那样将 x 从中解出来，表示为一个以 y 为自变量的函数关系式，因此，只能用一个符号来表示这个反函数，这个符号就是 $x=\arcsin y$，在这个符号内，y 表示 $[-1, 1]$ 中任意一个数值，而 $\arcsin y$ 表示$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$中与 y 对应的那个角，这个角的正弦等于 y，即$\sin(\arcsin y)=y$。那么为什么又说 $y=\sin x$ 的反函数是 $y=\arcsin x$ 呢？这是因为根据习惯，人们总是用x表示自变量，用 y 表示函数，所以就把 $x=\arcsin y$ 表示为$y=\arcsin x$，在这个符号中，$x\in[-1, 1]$表示正弦函数的值，而 $\arcsin x$ 表示$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$中的一个角，这个角的正弦等于 x，即 $\sin(\arcsin x)=x$。

与此类似，可以建立关于反余弦、反正切、反余切函数。

（4）各反三角函数的图象：

课本中第4页图1－3，第10页图1－5，第14页图1－6、图1－7，是根据高中代数第一册里如下定理："函数$y=f(x)$的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$对称"而得到的。

（5）反三角函数的性质：

反三角函数的性质，主要是由图象观察得出的。只研究了两点性质，即单调性和奇偶性。

关于反余弦函数，是非奇非偶函数的证明，即证明 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，及课本第16页求证 $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$，都属于证明角的等式，这类题的证明不采用"左＝右"法，而是先求出等式一端的角的某个三角函数值，然后

再利用这个值求角．这时需要考虑这个角可能的取值范围．

2．最简三角方程的求解公式

（1）反三角函数与三角方程的关系

当$|a|\leqslant 1$时，$\arcsin a$ 表示在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内的正弦等于$a$的一个角，即$\sin(\arcsin a)=a$，这就说明$x=\arcsin a$是方程$\sin x=a$的一个解（只是一个解，而不是全部）．说的详细一些，①当$0\leqslant a\leqslant 1$时，方程$\sin x=a$的解是终边落在x轴上方，且正弦等于a的无穷多个角，而$x=\arcsin a$是一个角，这个角在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$内．②当$-1<a<0$时，方程$\sin x=a$的解是终边落在$x$轴下方，正弦值等于$a$的无穷多个角，$\arcsin a\in\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$．

当$|a|\leqslant 1$时，$\arccos a$表示在$[0, \pi]$内余弦等于a的一个角，即$\cos(\arccos a)=a$，这就说明$x=\arccos a$是方程$\cos x=a$的一个解．

当a为任意实数时，$\operatorname{arctg} a$表示在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内，正切等于$a$的一个角，即$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a$，这说明$x=\operatorname{arctg} a$是方程$\operatorname{tg} x=a$的一个解．

当a是任意实数时，$\operatorname{arcctg} a$表示在$(0, \pi)$内余切等于a的一个角，即$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$，这就说明$x=\operatorname{arcctg} a$是方程$\operatorname{ctg} x=a$的一个解．

（2）怎样用含有反三角函数的式子来表示三角方程的通解？

我们曾经学过已知三角函数值求角，实际上就是解（最简单的）三角方程．在这里，我们将用其解题思路来推导三

角方程的通解。

例 1　已知 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 α。

解：$\because \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，$\therefore$ α 是在三、四象限的角。

当 α 在第四象限时，有一个解是 $-\frac{\pi}{4}$，与它终边相同的一切角是 $\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$；当 α 在第三象限时，有一个解是 $\pi+\frac{\pi}{4}$，与它终边相同的一切角是 $\alpha_2=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}(K\in Z)$. 所以，适合 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的一切角是 $\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{4}$，$\alpha_2=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$。以上的解用反正弦来表示就是

$$\alpha_1=2k\pi+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\alpha_2=2k\pi+\pi-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(k\in Z).$$

下面推导 $\sin x=a(|a|\leqslant 1)$ 的通解。

设 $a>0$，那么 x 是第一、二象限的角（其中当 $a=1$ 时，x 的终边落在 y 轴的正半轴上）。

当 x 在第一象限时，有一个解是 $\arcsin a$，与它终边相同的一切角是 $x_1=2k\pi+\arcsin a(k\in Z)$。

当 x 在第二象限时，有一个解是 $\pi-\arcsin a$，与它终边相同的一切角是 $x_2=2k\pi+\pi-\arcsin a(k\in Z)$。如图 1－6。

设 $a<0$，那么 x 是第三、四象限的角（其中当 $a=-1$ 时，x 的终边落在 y 轴的负半轴上）。

当 x 在第四象限时，有一个解是 $\arcsin a$，这是因为，如果 a 是一个负数时，$\arcsin a$ 表示 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 内的一个角，它的

正弦等于 a，比如 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$，与它终边相同的一切角是 $x_1=2k\pi+\arcsin a(k\in Z)$。

当 x 在第三象限时，有一个解是 $\pi-\arcsin a$，这是因为，当 a 是负数时，$\arcsin a$ 本身是在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 内的一个角，故 $\pi-\arcsin a$ 在第三象限，而 $\pi-\arcsin a$ 的正弦等于 a．应该注意：当 a 是负数时，$\pi+\arcsin a$ 不在第三象限，而在第二象限．与它终边相同的一切角是 $x_2=2k\pi+\pi-\arcsin a(k\in Z)$。如图 1－6。

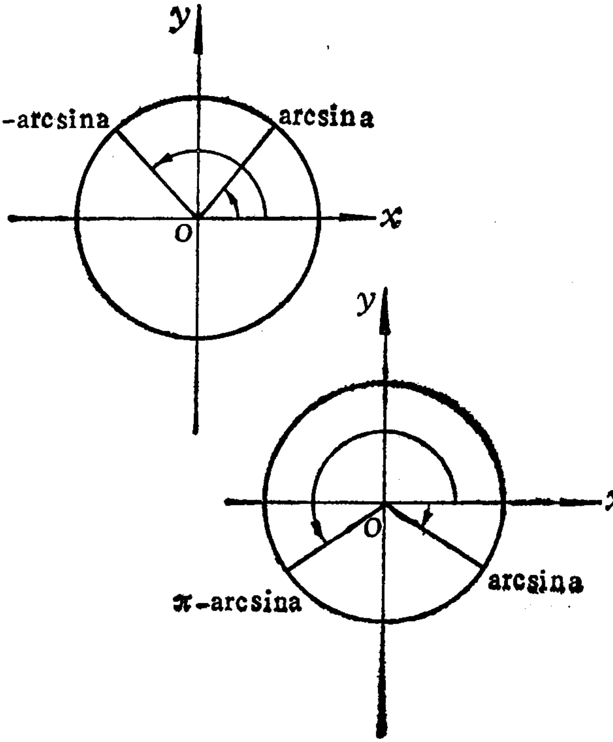

图 1—6

设$a=0$，那么x的终边落在x轴上．当落在x轴的正半轴上时，$x=2k\pi+\arcsin 0$；落在x轴的负半轴上时，$x=2k\pi+\pi-\arcsin 0\,(k\in Z)$。

综上所述，$a>0$，$a<0$，$a=0$，方程$\sin x=a\,(|a|\leqslant 1)$的解都可以表示为 $x_1=2k\pi+\arcsin a$， $x_2=2k\pi+\pi-\arcsin a$ $(K\in Z)$。这就是方程 $\sin x=a$ 的通解，为简便起见，把上面二个式子合并成一个式子，即

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin a\,(k\in Z)。$$

这个式子的意义是：当k为偶数时，它代表上面的x_1，当k为奇数时，它代表上面的x_2（应该注意到当$a=\pm 1$时，x_1与x_2是相同的，也就是说，x_1与x_2所表示的角的终边相同。所以$\sin x=\pm 1$的解就是$x=2k\pi+\arcsin x$ $(k\in z)$，当然也可写成$x=k\pi+(-1)^k\arcsin(\pm 1)$）.

例2 已知 $\cos a=-\dfrac{1}{2}$，求a。

解：$\because \cos a=-\dfrac{1}{2}<0$，$\therefore a$是第二、三象限的角，当$a$在第二象限时，有一个解是$\dfrac{2\pi}{3}$，与它终边相同的一切角是$a_1=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\,(k\in Z)$。

当a在第三象限时，有一解是$-\dfrac{2\pi}{3}$，与它终边相同的一切角是 $a_2=2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}\,(k\in Z)$。所以，适合 $\cos a=-\dfrac{1}{2}$ 的一切角是：

$$a=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\,(k\in Z)。$$

把这个式子用反余弦来表示，就是

$$a=2k\pi\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)(k\in Z)。$$

下面我们推导 $\cos x=a$，$|a|\leqslant 1$的通解。

设 $a>0$，那么 x 是第一、四象限的角（当 $a=1$ 时，x 的终边落在 x 轴的正半轴上）。

当 x 在第一象限时，有一个解是 $\arccos a$，与它终边相同的一切角是 $x_1=2k\pi+\arccos a(k\in Z)$。

当 x 在第四象限时，有一个解是 $-\arccos a$，这是因为 $a>0$时，$\arccos a$ 表示 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$内的一个角，$\therefore -\arccos a$ 是第四象限的角且 $\cos(-\arccos a)=a$，当然，当 $a=1$ 时，$-\arccos 1=0°$，终边在 x 轴上。与它终边相同的一切角是 $x_1=2k\pi+\arccos a(k\in Z)$。

当 x 在第三象限时，有一个解是 $-\arccos a$，与它终边相同的一切角是 $x_2=2k\pi-\arccos a(k\in Z)$。

设 $a=0$，那么 x 的终边落在 y 轴上。

当落在 y 轴的正半轴上时，$x=2k\pi+\arccos 0$；

当落在 y 轴的负半轴上时，$x=2k\pi-\arccos 0$。

综上所述，无论$a>0$，$a<0$或 $a=0$，方程 $\cos x=a$ 的解都是

$$x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z).$$

应该注意到当 $a=\pm 1$时，x_1 与 x_2 的终边相同，所以，$\cos x=\pm 1$的解就是$x=2k\pi+\arccos(\pm 1)(k\in Z)$。

例 3　已知 $\mathrm{tg}\alpha=-\sqrt{3}$，求 α。

解：$\because$ $\mathrm{tg}\alpha=-\sqrt{3}<0$，$\therefore \alpha$ 在第二、四象限。

当 α 在第四象限时，解是$-\frac{\pi}{3}$，与它终边相同的一切角是 $\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{3}$。

当 α 在第二象限时，有一个解是$-\frac{\pi}{3}+\pi$（实际上因为

$tg\alpha$ 的周期是 π，所以 $-\frac{\pi}{3}+\pi$ 一定是 $tg\alpha=-\sqrt{3}$ 的一个解）。与它终边相同的一切角是 $\alpha_2=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}$。

∴ 适合 $tg\alpha=-\sqrt{3}$ 的一切角是

$$\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{3},\ \alpha_2=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z).$$

以上两解可合并写成一个式子，即

$$\alpha=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z).$$

我们可以这样来理解这个结果：由于 $-\frac{\pi}{3}$ 是 $tg\alpha=-\sqrt{3}$ 的一个解，而 $tg\alpha$ 的周期是 $k\pi(k\neq 0)$，所以，一般解就是 $\alpha=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$。

用反正切表示就是 $\alpha=k\pi+arctg(-\sqrt{3})(k\in Z)$。

下面我们来推导 $tgx=a(a\in R)$ 的通解。

设 $a>0$，那么 x 在第一，三象限。

在第一象限里，$arctga$ 是此方程的一个解，而 tgx 的周期为 $k\pi(k\neq 0)$，所以，适合 $tgx=a$ 的一切解为

$$x=k\pi+arctga(k\in Z).$$

设 $a<0$，那么 x 在第二、四象限，在第四象限里，$arctga$ 是方程的一个解，这是因为：当 $a<0$ 时，$arctga$ 表示 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内正切等于 a 的一个角。而 tgx 的周期为 $k\pi(k\neq 0)$，所以，适合 $tgx=a$ 的一切解为 $x=k\pi+arctga(k\in Z)$。

设 $a=0$，那么 x 的终边落在 x 轴上。因为 $arctg0=0$，所以，$tgx=0$ 的解也可以表示为

$$x=k\pi+arctg0(k\in Z).$$

综上所述，方程 $tgx=a(a\in R)$ 的通解为

$$x=k\pi+arctga(k\in Z).$$

与上面方法类似地可以证明 $\mathrm{ctg}x=a(a\in R)$ 的通解为 $x=k\pi+\mathrm{arcctg}a(k\in Z)$。

（三）解题指导

1. 关于反三角函数的题型

（1）求反三角函数的值：

课本中，第4页的例1和第7页的例4，第11页中的例1和第15页的例1均属于求反三角函数值。

〔注意〕①求反三角函数值时，必须注意反三角函数的值域，求得的值必须在规定的范围内。

②求形如 $\arcsin(\sin\alpha)$ 的值时，一般说来并不等于 α，只有当其中的 α 在 $\arcsin x$ 的值域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内时，$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ 才成立，否则，这个等式不成立。同学们自己考虑一下，下列等式何时成立？

$$\arccos(\cos\alpha)=\alpha;$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha)=\alpha;$$

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\alpha)=\alpha.$$

（2）反三角函数的三角运算：

课本中第5页例3，第11页例2均属于反三角函数的三角运算。

〔注意〕①进行反三角函数的三角运算要注意：用反三角函数所表示的角有一定的范围。因此，在使用同角函数关系的平方关系及半角公式时要正确选定正负号。

②要正确使用和、差、倍、半等公式，不要犯类似下列的错误：