



“华罗庚金杯” 少年数学 邀请赛

中国数学会普及工作委员会 编



湖南教育出版社

“华罗庚金杯”
少年数学邀请赛

中国数学会普及工作委员会编

测绘出版社

内容简介

本书由中国数学会普及工作委员会组织编写。主要内容为“华罗庚金杯”少年数学邀请赛的初赛、复赛、决赛的全部试题，并请“金杯赛”主试委员马希文教授、裘宗沪副研究员、李文汉副教授等介绍了命题意图，对每道试题做了详细的解答，以及饶有趣味的说明与探讨。

本书可供中、小学数学教师教学时参考，对数学爱好者和在校中、小学生学好数学，开阔思路和提高解题能力也有所帮助。

“华罗庚金杯”少年数学邀请赛
中国数学会普及工作委员会编

*

测绘出版社出版、发行

二二〇七工厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092 1/32 · 印张 4 · 字数 74 千字

1987年2月第一版 · 1987年2月第一次印刷

印数 000,001—150,000册 · 定价 0.80 元

统一书号:13039 · 新 614

目 录

我们的答卷(代序)	(1)
-----------------	-------

第一部份

初赛试题	(7)
------------	-------

初赛试题的解答、说明与探讨	(10)
---------------------	--------

第二部份

复赛试题	(37)
------------	--------

复赛试题的解答、说明与探讨	(41)
---------------------	--------

第三部份

决赛试题(第一试)	(61)
-----------------	--------

决赛试题(第二试)	(65)
-----------------	--------

决赛试题(第一试)的解答、说明与探讨	(67)
--------------------------	--------

决赛试题(第二试)的解答、说明与探讨	(86)
--------------------------	--------

决赛口试试题	(107)
--------------	---------

口试试题的解答、说明与探讨	(109)
---------------------	---------

第四部份

北京市考生复赛答题正确率统计	(119)
----------------------	---------

决赛一、二试成绩统计	(120)
------------------	---------

我们的答卷（代序）

我们五个人受“华罗庚金杯”少年数学邀请赛组织委员会的委托，为首届“金杯”赛出了试题。出些题目让别人做，自己等着阅卷，看来似乎是轻松愉快的，其实不是这样。从一开始接受任务，我们就感到：能不能出好题，也是对我们的一次考试。现在竞赛已经结束了，参加竞赛的同学已经从紧张的心情中解脱出来，轮到我们来答卷了，我们的心情也是紧张的。我们知道，人们正在议论这样一个问题：这些题目出得好不好？

题目好坏的标准是什么呢？华罗庚在《数论基础》一书中译本的序言里，曾谈到认真做一些好题的重要性。他劝告读者不要“入宝山而空返”。在他看来，好的题目不能只是使人得到练习，而且要能引起一些讨论，说明一些问题，给人一些启发和思考。

为了使人们能用这种标准来衡量这次竞赛试题的好坏，我们在这份答卷里就要说明这些试题的用意，请老师、同学们给我们评分。

我们在出题的时候，十分明确的一点，就是不要求学生学习过多课外知识，我们希望给那些勤于思考、善于思考的同学取得好成绩有较多的机会。

初赛和复赛的成绩是十分喜人的。我们发现，有些同学的水平超过了我们的估计。为了给这些同学有足够的余地来表现自己的能力，在决赛中，我们准备了数量较多的、有一定难度

的题目。结果，一下子把水平拉开了，成绩最好的几个同学明显地超过了别人。应该说，在复赛中取得优异成绩的同学的知识水平，与他们同年龄的人比较，大多数是非常好的。他们在决赛中的差别主要反映在能力方面。

近来，大家常常议论“高分低能”的问题。这是我们教育工作中的一个明显的缺点。这个问题表现为考试成绩不能正确反映学生的能力，直接的原因在于考题的好坏。但是我们不能责备出题的教师，因为我们教育制度的某些方面限制了他们才能的发挥。例如，动不动就是“超纲”，这就很大程度上限制了教师们教学的主动性了。

什么是教学大纲？我们认为就是教学的最低要求。当然，教育工作完不成大纲的要求是应该受批评的。但是，如果以为有了大纲，就可以把它当做绝对标准，并发展成一套八股来限制教师因材施教，抑制同学的求知欲，那就错了。教学大纲只能作为规定学生应学习的知识的清单，不能作为规定智力开发的清单，特别是不能作为智力发展的限制。人的智力是多方面、多类型的，无法规定一个模式。把学校培养学生看成是加工产品那样，只要有严格的工艺要求就能生产出合格的产品，那是十分荒谬的。然而这种思想正在不同程度上影响着我们的普通教育工作：统一大纲还要统编教材，还要有标准的教案，甚至说哪一句话，还要按典范的教师那样做。这不是八股吗？迫使教师们搞八股，同时也就要求学生搞八股。做一道题，没有写“解：”，要扣分，单位没加括号也要扣分，“ 5×3 ”写成“ 3×5 ”不行，演草写的位置不对也不行。格式上的八股只是可恶而已，思想方法上的八股则是灾难性的，它会阻碍青少年智力的发展。

在训练的一定阶段，应该在格式上有一定的要求，出题目当然也可以要求用分数做，用小数做等等。这是为了使学生对

某些技能有足够的练习机会。但是,从这种练习中得到的主要是技能,而不是智力。所以到了一定阶段之后,就应放手让学生去思考、去探索、去发挥、去试、去闯。格式的要求应以不妨碍这个目标为好。这次成绩较好的同学,有些平时成绩并不很好。因此有的教师会以为这些同学要求自己不严格,这恐怕是有些片面的。考试应该要能考出学生的能力来。一个学生做题在某些方面不合要求,扣一点分提醒学生注意并无不可,但如果都是大笔一挥,来一个大叉子,使学生不敢越雷池一步,很可能就把“能力”二字葬送了。一个学生的竞赛成绩和平时成绩差别较大,这是值得我们深思的。

当然,平时考试是考核性的,升学考试(至少在要区分考入重点中学还是非重点中学的形势下)是选拔性的。性质不同,考题也应有区别。目前用这种考核代替选拔,当然就难免选拔不当了。

教学上的八股还带来了一个严重的恶果,就是小学与中学数学课的不衔接。小学数学的主要内容是教整数、小数、分数的四则运算及其简单的应用,整个说来是比较呆板的,可以按照一定的步骤来做。到了中学,学习代数、几何,解题就要求灵活性、技巧性,注意培养洞察力。这个过渡应该在小学高年级就有所准备。但是小学教育受到升学指挥棒的拨弄,无法向这个方向努力。结果有些小学中的“优生”,上了中学便一落千丈。这不能不归咎于教学上的八股。

现在有些中学已经开始利用学科竞赛来选拔小学生了,也许这会被当成“不正之风”。但是,我们却很赞赏这些学校的校长和教师的改革精神,认为他们是教育改革、考试改革的探索者,我们愿意热情地支持他们。

总之,我们希望用一份能反映学生能力的考题向普通教育

中“高分低能”这一现象作一次冲击，引起大家的讨论，这是我们命题的意图之一。

我们命题的另一个意图是想说明：数学讲的是数量关系。

5×3 是不是等于 3×5 ？3的5倍和5的3倍是不是一回事？这本来是极为明白的事。小学教科书上不是也要讲乘法交换律吗？可是有的教材和教师都不适当地强调两者的区别。他们说这里有单位的问题。其实单位问题根本不是数学问题。“每个小组5个人，3个小组是几个人？”对这个题目知道用乘法，就是懂得了乘法的意义。要写单位也得写成

$$5 \text{ 人/小组} \times 3 \text{ 小组} = 15 \text{ 人}$$

才算对。否则，“一些同学站成长方形阵列，横行每行5人，直行每行3人，共有多少同学？”单位又应怎样写呢？是 $5 \text{ 人} \times 3$ ，是 $3 \text{ 人} \times 5$ ，还是 $5 \text{ 人} \times 3 \text{ 人}$ ？单位的适当写法在一定阶段上有助于检查错误，但到了一定阶段之后就会影响人们的思考。这次竞赛中，决赛第二试的第四题解答中就要用到人数与枣数的比较。这似乎单位不同，不能比较，其实“人数”是人的“数目”，已经没有单位了，“枣数”也如此，有什么不能比较呢？我们在中学生的作业中发现有些同学在解应用题时往往不肯直截了当地写出 $3n$ ，却要写成 $n \times 3$ ，恐怕也是这种“单位说”的恶果吧！

为了说明数学讨论的是数量关系，我们还故意把一些学生较为熟悉的应用题改头换面，试试他们能不能了解不同应用题之间的关系。例如把“年龄问题”改为两辆速度相同的汽车来叙述（初赛第8题），把“鸡兔问题”改成“松鼠采松子”（初赛第6题）等等。希望同学们从中看出不同的应用题，可能有同样的数量关系，因此解法也一样。这也可以为今后学代数做点准备。其实小学数学的应用题，往往只是数量关系的形象化，并非真正的应用。把这一点看透了，就对数学的本质有了进一

步的体会。因此，我们建议教师们训练一下学生，把一个应用题改造成完全不同的应用题的能力，还可以试验组织学生之间互相出题、解题的数学“对抗赛”。

命题意图之三是希望学生养成做题之后仔细玩味一番的习惯。从一个题引伸开来可以想许多问题。这样做对学好数学作用极大。为了这个目的，我们出了一些“系列题”。比如用四个长方形和一个小正方形拼成一个大正方形的题，在初赛、复赛中都有这个图形。如果仔细玩味过了，决赛第一试第5题和第二试第9题做起来就容易得多了。此外，围绕余数问题也出了“系列题”。这些都是为了引起学生对这种学习方法的注意，并非要大家今后把它列到课外数学小组的大纲中去。下次“金杯赛”如果还有“系列题”，那将会是极不同的系列了。可以说这种学习方法比这个题目本身更加重要。

命题意图还有一个方面便是纪念华罗庚同志。他在世时十分重视数学的应用和普及。他为青少年写了很多普及读物。他把优选法、统筹法加以改造在国内推广，做出了很大的贡献。在他直接领导下的数学工作者先后解决了许多实际应用问题。有些工作华老还专门写了普及文章或书籍向广大读者做过介绍。我们选用了一些书刊中的例题，加以适当的简化，编成了一些竞赛题。其中有优选法中的“摺纸法”（决赛第一试第4题），用简单分数代替精确值（决赛口试题），有统筹法（初赛第4题），有“打麦场问题”（复赛第4题），“装卸工问题”（决赛第二试第6题），背包问题（初赛第18题）。这些题目都不难，但却别开生面。向人们展现出现代应用数学某一方面的特点，同时也是为了对华老的纪念。

以上说的是命题的大原则。至于个别试题的特殊意图和有关的问题，则分散在题解中加以说明，这里就不一一列举了。

最后，我们还想对听到的一种议论谈一些看法。有人说：“你们有些试题是要用代数来做的，中学生太占便宜。”事实上，这次参赛的初一同学，才念了二个月中学课程，学的代数知识极其有限，这次“金杯赛”实质上是小学生数学竞赛。为了使小学的同学也能答得较好，绝大部分试题涉及的知识内容都是目前小学六年级学生在课堂上学过的，所有试题都是可以用算术方法求出答案。当然，有些试题用代数去解较方便，但是它们也一定有一种较简捷的算术解法。用代数解应用题，从方法上具有普遍性，但是用算术解应用题，却更能兼顾问题的特殊性，更需要思考，更能发挥聪明才智。我们希望小学生能很好地用算术解应用题，为将来学习代数打好基础。我们也发现，有些参赛同学，刚学了一点代数，就随便使用代数符号解题，结果反而把问题复杂化了。我们认为，多数初一学生比小学生考得好一些，主要是初一学生多学了一年，对问题的理解和思考更强一些，而不能简单的归结为代数与算术的较量。因此，上面的议论未必是恰当的。

谨以这些说明献给读者，作为我们的答卷。

马希文 袁宗沪 李文汉
杨德庄 张景中

第一部份

初赛试题

1. 1966, 1976, 1986, 1996, 2006 这五个数的总和是多少?

2. 每边长是 10 厘米的正方形纸片，正中间挖了一个正方形的洞，成为一个宽 1 厘米的方框。把五个这样的方框放在桌面上，成为一个这样的图案(右图)。

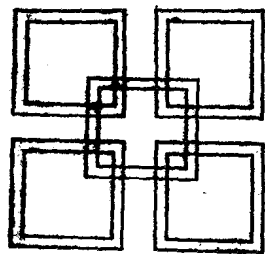
问桌面上被这些方框盖住的部份面积是多少平方厘米?

3. 105 的约数共有几个?

4. 妈妈让小明给客人烧水沏茶。洗开水壶要用 1 分钟，烧开水要用 15 分钟，洗茶壶

要用 1 分钟，洗茶杯要用 1 分钟，拿茶叶要用 2 分钟。小明估算了一下，完成这些工作要花 20 分钟。为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了?

5. 右面的算式里，四个小纸片各盖住了一个数字。被盖住的四个数字的总和是多少?



$$\begin{array}{r} \square \square \\ + \square \square \\ \hline 149 \end{array}$$

6. 松鼠妈妈采松子。晴天每天可以采 20 个,雨天每天只能采 12 个。它一连几天采了 112 个松子,平均每天采 14 个。问这几天当中有几天有雨?

7. 边长 1 米的正方体 2100 个,堆成了一个实心的长方体。它的高是 10 米,长、宽都大于高。问长方体的长与宽的和是几米?

8. 早晨 8 点多钟有两辆汽车先后离开化肥厂向幸福村开去。两辆车的速度都是每小时 60 公里。8 点 32 分的时候,第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的三倍。到了 8 点 39 分的时候,第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的二倍。那么,第一辆汽车是 8 点几分离开化肥厂的?

9. 有一个整数,除 300、262、205,得到相同的余数。问这个整数是几?

10. 甲、乙、丙、丁四个人比赛乒乓球,每两个人都要赛一场。结果甲胜了丁,并且甲、乙、丙三人胜的场数相同。问丁胜了几场?

11. 两个十位数 1111111111 和 9999999999 的乘积有几个数字是奇数?

12. 黑色、白色、黄色的筷子各有 8 根,混杂地放在一起,黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子。问至少要取多少根才能保证达到要求?

13. 有一块菜地和一块麦地。菜地的一半和麦地的三分之一放在一起是 13 亩。麦地的一半和菜地的三分之一放在一起是 12 亩。那么,菜地是几亩?

14. 71427 和 19 的积被 7 除, 余数是几?

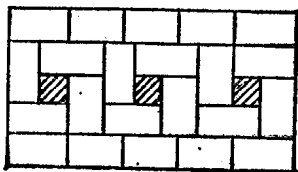
15. 科学家进行一项实验, 每隔五小时做一次记录。做第十二次记录时, 挂钟的时针恰好指向 9, 问做第一次记录时, 时针指向几?

16. 有一路电车的起点站和终点站分别是甲站和乙站。每隔 5 分钟有一辆电车从甲站出发开往乙站, 全程要走 15 分钟。有一个人从乙站出发沿电车路线骑车前往甲站。他出发的时候, 恰好有一辆电车到达乙站。在路上他又遇到了 10 辆迎面开来的电车, 才到达甲站。这时候, 恰好又有一辆电车从甲站开出。问他从乙站到甲站用了多少分钟?

17. 在混合循环小数 $2.71828\bar{1}$ 的某一位上再添上一个表示循环的圆点, 使新产生的循环小数尽可能大, 请写出新的循环小数。

18. 有六块岩石标本, 它们的重量分别是 8.5 公斤、6 公斤、4 公斤、4 公斤、3 公斤、2 公斤。要把它们分装在三个背包里, 要求最重的一个背包尽可能轻一些。请写出最重的背包里装的岩石标本是多少公斤?

19. 同样大小的长方形小纸片摆成如图的图形。已知小纸片的宽是 12 厘米, 求阴影部分的总面积。



初赛试题的解答、说明与探讨

李文汉

1. 解法一 $1986 \times 5 = 9930$ 。

解法二 $(1966 + 2006) \times 5 \div 2 = 9930$ 。

答 这五个数的总和是 9930。

说明与探讨 这个题目的解法很多。例如，可以逐个相加，但这样做太费时间。较简捷的方法是掌握它们的特点：后一个数总比前一个数多 10，这五个数的中间的那个数是它们的平均数，因此五个数的总和是

$$1986 \times 5 = 9930。$$

另一种方法是按

$(1966 + 2006) \times 5 \div 2$ 计算（后面将介绍这样作的道理），如果想清楚了 $(1966 + 2006) \div 2$ 就是 1986，计算的方法和前一个方法是一样的。

在国外，这类题目的解法有一个流传得很广的故事。在十八世纪末，德国有个叫高斯的小学生，据说在一次数学课上，老师让学生们计算从 1，2，3 一直加到 100，问答案是什么数？那时的小学生们是用一种石笔在小石板上计算，高斯很快就算出了答案。他的小石板上写着

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) \end{aligned}$$

$$= 101 \times 50$$

$$= 5050。$$

这个小高斯就是后来举世闻名的杰出数学家。

中国古代也有这一类算题。大约在公元五世纪左右，我国有一本名叫《张邱建算经》的数学书，它的卷上第二十二题的大意是：有一个妇女不善于织布，她每天织的布都比前一天减少一些，减少的数都是相等的。她第一天织了五尺，最后一天织了一尺，一共织了三十天。问她一共织了多少布？

计算的方法是很巧妙的。如果把这个妇女从第一天起直到第三十天织的布加起来，就是 $5 + \dots + 1$ ，每天都比上一天递减一个相同的数。考虑到把这个式子反过来写，从1起加到5，那么就是每天都比上一天递增一个相同的数了，把这两个式子相加，利用相对位置的两数之和都相等这一特点，就有

$$\begin{array}{r} 5 + \dots + 1 \\ +) 1 + \dots + 5 \\ \hline 6 + \dots + 6 \end{array}$$

也就是30个6相加。这个妇女织的布应是这个数的一半，列出式子便是

$$\frac{5+1}{2} \times 30 = 90。$$

答案是90尺。因为在那时候四丈布为一匹布，所以《张邱建算经》上面的答案是二匹一丈。

实际上，我们用的 1986×5 的计算方法，就是这种

技巧。这种技巧和它有关的更多的知识。同学们到高中时还会学到，它叫等差数列求和法。

2. 解 一个方框的面积是 $10^2 - 8^2$ (平方厘米)，五个方框的面积是

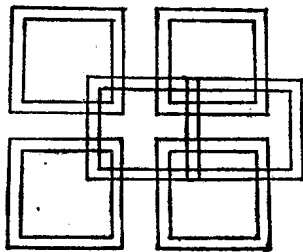
$$(10^2 - 8^2) \times 5 \text{ (平方厘米)}。$$

但是方框间互相盖住的部份重复计算了，应减去。因为这样的部份共有八处，每处 1 平方厘米，所以这个题目的答案是

$$(10^2 - 8^2) \times 5 - 8 = 180 - 8 = 172 \text{ (平方厘米)}。$$

答 172 平方厘米。

说明与探讨 这一类多加了又减下来的计算在很多题目的解题中是常见的。这一类型的题目有专门处理的理论和方法，由于这个题目比较简单，所以还不大能看出解这个题目的思路和方法的全貌，如果同学们做一个下面的题目，就能体会这个题目的特点了。方框的数据仍按照原题，当六个同样的方框摆成下面的图案时，求它盖住部份的面积是多少？



现在，解题时要特别注意，有些地方是三个方框的边重叠在一起的。由于我们已经解过原题，知道原来的五个方框盖住部份的面积是172平方厘米，现在多了一个方框，增加盖住的部份是一个方框减去这个方框与原先的五个方框重叠的部份，就是

$$36 - 10 - 2 = 24 (\text{平方厘米}),$$

因此这六个方框盖住部份的面积是

$$172 + 24 = 196 (\text{平方厘米}).$$

可是我们事先并不知道172这个数，必须一切从头开始。

为了掌握这类问题的计算方法，我们先看一个类似的题目。

某年级的课外体育小组分为田径、球类和游泳三个小组，参加田径小组的有23人，参加球类小组的有27人，参加游泳小组的有18人；同时参加田径、球类两个小组的4人，同时参加田径、游泳小组的有7人，同时参加球类、游泳小组的有5人；三个小组都参加的有2人，问这个年级参加课外体育小组的共有多少人？

计算时自然会想到将参加田径小组的23人、球类小组的27人和游泳小组的18人加起来，即 $23 + 27 + 18$ ，容易想到，有的人同时参加两个组，在上面的计算中加了两次，应该减出来，于是得，

$$(23 + 27 + 18) - (4 + 7 + 5).$$

可是，如果一个同学同时参加了三个组的话，他在前一个括号中加了三次，在后一个括号中又减了三次，就是