工程数学

积分变换

张韵琴　蒋传章　编

陕西科学技术出版社

工 程 数 学

积 分 变 换

张韵琴　蒋传章　编

陕西科学技术出版社

工程数学

积分变换

张韵琴　蒋传章　编
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　陕西机械学院印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　4印张　83千字
1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷
印数：1—3000
统一书号：7202·117　定价：0.87元

内 容 简 介

本书系统介绍了富里叶变换和拉普拉斯变换的概念、性质以及它们的简单应用。各章节都选配了一定数量的习题并附有答案。本书可供高等工科院校机和电类各专业选作教材，也可供有关工程技术人员参考。

前　言

本书根据高等工科院校《工程数学教学大纲》中“积分变换”部分的要求编写而成，内容包括富里叶变换和拉普拉斯变换。全书教学时数大约为20学时，对于学时较少的专业可以不讲授书中有“*”号的内容。

本书对于概念的叙述力求做到深入浅出，在讲法上有以下几个特点：关于δ—函数结合物理知识加以定义，可以不脱离工科学生现有的数学理论基础；介绍拉氏逆变换时，考虑到有些专业没有学过复变函数，因此，不涉及复变函数的知识介绍了各种类型函数的拉氏逆变换的求法，对于学过复变函数的专业还可以学习带有“*”号的“用留数求拉氏逆变换”；在介绍积分变换的应用时，考虑到低年级学生的现有基础，因此不过多的联系专业知识，处理得比较简练，学生易于接受。

本书由西安交通大学数学系游兆永教授审稿。

本书在编写过程中，宋又祥、张自立等同志提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，难免有错误和不妥之处，诚恳希望读者提出批评指正。

编　者

1985.5. 于西安交大

目　录

引　言

我们知道很多实际问题都可以用微分方程来描述。要找出某一个实际问题中的一些物理量的直接关系，就需要求出它的微分方程的解。虽然在高等数学中对一些简单的微分方程积累了一些解法，但客观存在的物质运动是比较复杂的，反映它们在数量上的关系的微分方程也比较复杂，因此需要寻求解微分方程的简捷方法，从而产生了富里叶变换及拉普拉斯变换（简称富氏变换及拉氏变换）。它们是积分变换中常用的两种变换。所谓积分变换，就是通过积分运算把一个函数变成另一个函数的变换。这个积分是一个含参变量的积分，形如

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)k(t,\alpha)dt,$$

其中$k(t,\alpha)$是一个确定的二元函数，称为积分变换的核。积分限可以是有限的，也可以是无限的。在一定条件下，一个积分运算可以把函数$f(t)$变为函数$F(\alpha)$，然后通过另一个积分运算又可以把函数$F(\alpha)$变为函数$f(t)$，因此一般地讲，它们是一一对应且变换是可逆的。

积分变换使许多问题的分析与求解得到简化和更具有规律性，利用积分变换解微分方程时，可以把微分方程的求解问题转化为代数方程的求解问题，然后再取反变换就可得到微分方程的解。利用变换使问题得到简化．这是数学中经常采

用的一种方法。比如，对数变换可以把比较复杂的乘、除运算转化为加、减运算。线性变换也是一种常用的变换，坐标旋转变换就是一种线性变换，它可以把复杂的二次曲线方程转化为标准方程。

富氏变换与拉氏变换之间有一定的内在连系。一般来说，对一个函数施行富氏变换时，对这个函数的要求比较强，而对一个函数施行拉氏变换时，对这个函数的要求就比较弱。因此拉氏变换比富氏变换应用更为广泛。本书主要讨论它们的定义、性质和一些简单的应用。

第一章 富里叶变换

§1.1 从富里叶级数到富里叶积分

1. 富里叶级数

在研究富里叶级数时，我们已经知道一个以T为周期的周期函数 $f_T(t)$，如果它在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上满足狄利克雷条件，那末在连续点处，这个函数可展开为富氏级数，即

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t dt \qquad n=0,1,2\cdots.$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t dt \qquad n=1,2\cdots,$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}。$$

在间断点处，这个级数收敛于函数在该点左、右极限的平均值。

下面研究富氏级数的复数形式，根据欧拉公式

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

令　$\varphi=n\omega t$，则

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}-b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2}i$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-b_ni}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+b_ni}{2}e^{-in\omega t},$$

如果令

$$C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)dt,$$

$$C_n=\frac{a_n-b_ni}{2}=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t dt-\right.$$

$$\left.i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t dt\right]$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}dt,\qquad (n=1,\ 2\cdots)$$

同理可得

$$C_{-n}=\frac{a_n+b_ni}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{in\omega t}dt,\qquad (n=1,2\cdots)$$

现将C_n与C_{-n}统一用一个式子表达出来，则

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}dt,\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

故　$$f_T(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{in\omega t}+C_{-n}e^{-in\omega t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega t},$$

其中

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-in\omega t}dt\ , \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

此即富里叶级数的复数形式，其求和过程应理解为级数正负指数项对称的部分和的极限，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega t}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} C_n e^{in\omega t}。$$

若令 $\qquad \omega_n=n\omega,\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

则 $\qquad f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}\ ,$

其中

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-i\omega_n t}dt, \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

现将C_n代入上式，即得

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}.$$

以上研究了富氏级数的实数形式及复数形式，这两种形式本质上是一样的，但在应用上复数形式比较方便，这是因为它的系数表达式只有一个，同时它的系数还直接反映了n阶谐波振幅的大小，其系数的模恰好等于n阶谐波振幅的一半。

2.富氏积分定理

前面研究了周期函数$f_T(t)$展为富氏级数问题。下面继

续研究非周期函数$f(t)$的积分表达式。先看一个具体的例子。

设非周期函数$f(t)$是单个矩形脉冲函数，其表达式为

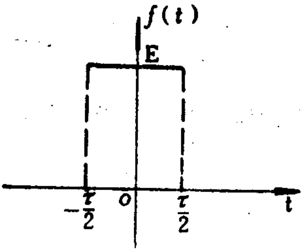

图 1—1

$$f(t)=\begin{cases} E, & |t|<\frac{\tau}{2}; \\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

如图1—1所示。

现作一个周期函数$f_T(t)$，使它在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上满足

$$f_T(t)=f(t) \quad ,$$

而在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$之外，作周期性延拓，如图1—2所示。

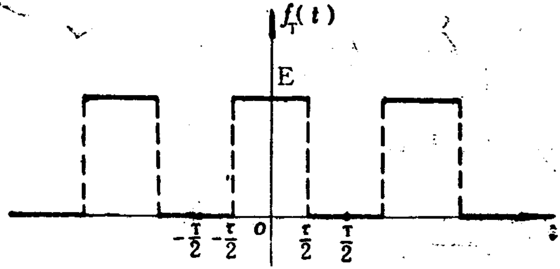

图 1—2

显然，T越大，$f_T(t)$与$f(t)$相等的范围越大，且

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t)$$

对任何一个非周期性函数$f(t)$，都可作如上的处理，使

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t) \text{。}$$

而周期函数$f_T(t)$只要满足狄利克雷条件，在连续点处总可展

为富氏级数，然后取极限就可以得到非周期函数$f(t)$的积分表达式。由于

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t},$$

当n取一切整数时，ω_n均匀的分布在数轴上，而当$T\to+\infty$时，ω_n就连续分布在数轴上。

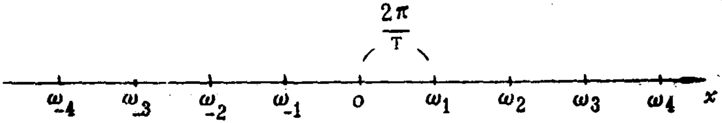

图 1—3

令 $\Delta x=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T}$，若把t暂时固定，且当$T\to+\infty$时，$\Delta x\to0$，则

$$f(t)=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\(T\to+\infty)}}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}\cdot\Delta x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-ix\tau}d\tau\right]e^{ixt}dx,$$

如果将x用ω表示，则上式变为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega\ .$$

这个公式称为非周期函数$f(t)$的富里叶积分公式，必须注意，上面的推导是不严格的，因为右端的极限是否存在都不知道，至于一个非周期函数$f(t)$具备什么条件才可以用富氏积分来表示，存在下面的富氏积分定理。

富氏积分定理 若$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足下列条件：

1° 它在任意有限区间上满足狄利克雷条件；

2° 它在无限区间$(-\infty, +\infty)$上绝对可积（即积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛），则在连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega^{①}$$

成立。在$f(t)$的间断点t处，左端用$\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$代替。这个公式是富里叶积分公式的复数形式。

这个定理的条件是充分的，它的证明要用到更多的基础理论，这里从略。

3．富氏积分公式的其他形式

前面介绍了富里叶积分公式的复数形式，下面介绍富里叶积分公式的其他形式。

1) 富里叶积分的三角形式： 由富里叶积分公式的复数形式就可推出它的三角形式。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

---

① 其外层积分指的是柯西主值意义下收敛，这种积分称柯西主值，即

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}f(x)dx=v\cdot p\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

它还可以改写成

$$f(t)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega\right\}。$$

2）富里叶积分展开式：从富里叶积分公式的三角形式出发，可以得到

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)d\tau\right]d\omega$$

$$=\int_0^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]d\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau。$$

上式称$f(t)$的富里叶积分展开式。它的形式与富里叶级数展开式很类似，而其系数与欧拉富里叶系数也很类似。

3）富里叶正弦、余弦的展开式：若$f(t)$为偶函数，

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\quad b(\omega)=0。则$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right)\cos\omega t d\omega,-\infty<t<+\infty。$$

称这个式子为富里叶余弦展开式。

若$f(t)$为奇函数，$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$，$a(\omega)=0$。

则

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right)\sin\omega t d\omega,-\infty<t<+\infty。$$