中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

解析几何教材辅导

杨大淳 主编

河北教育出版社

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

解析几何教材辅导

杨大淳　主编

王敬庚　陈通鑫

庄汇淳　张克东

河 北 教 育 出 版 社

责任编辑：杨士蕙
封面设计：李文佚

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试
解析几何教材辅导
杨大淳　主编
王敬庚　陈通鑫　王汇淳　张克东

河北教育出版社出版发行（石家庄市北马路45号）
河北新华印刷一厂印刷

787×1092毫米 1/32　16印张　341,000字　1989年4月第1版
1989年4月第1次印刷　印数：000001—2,000　定价：4.00元
ISBN 7-5434-0271-8/G·225

前　　言

本辅导书是按照中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试解析几何课本（以下简称课本）的体系与要求编写的。目的是为了辅导参加《专业合格证书》文化专业知识考试的初中数学教师更好地掌握课本中的基础知识、基本技能和一般的解题思路与解题方法。

本辅导书包括有：平面解析几何部分的直线、二次曲线的一般理论、参数方程和极坐标、空间解析几何的向量代数、平面、空间直线、特殊曲面、二次曲面，共九章。

每章分四部分，一是本章概述，主要是阐述本章内容间的内在联系，以及与其他章的联系；二是疑难解析与例题分析，主要是对重要的概念和难以理解的概念进行辨析，以及对解题方法的总结，相应地配以例题，并对例题的解法进行分析，从而使读者能够透彻地领会课本知识和提高运用知识的能力；三是与课本相应章节的练习题及习题解答，供读者作题后参考；四是自检题，以便读者检查自己学习课本各章知识的效果。本书最后还附有各章自检题的答案。

本书由参加中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试解析几何课本的编写人员编写。

编者

1987.6

目　　录

平面解析几何部分

空间解析几何部分

平面解析几何部分

第一章 直　　线

一、本 章 概 述

本章研究了直线的一般式方程、法线式方程、直线系方程．直线的一般式方程、法线式方程与直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程一样，都是二元一次方程．而每一个二元一次方程都表示一条直线，但是表示同一条直线的方程形式却不是唯一的，不过它们都可以通过方程的同解变形进行互化，可以看作是同一个方程．因此，直线和二元一次方程是一一对应的．

两个独立的条件决定一条直线．根据不同的条件，就得到直线方程的不同形式．有了直线的方程，就可以根据直线方程的系数，来研究直线的几何性质．对直线方程的系统研究，就为以后学习解析几何，打下了基础．

研究直线方程的一般式，是在研究直线方程的几种特殊形式（如点斜式等）的基础上进行的．关于直线方程的一般式，应该理解，平面内任意一条直线方程都是关于x与y的一次方程，任何关于x与y的一次方程，它的图形都是一条直线．

研究直线的法线式方程是因为直线方程的几种形式，除了一般式以外，存在一个共同的缺点，就是不能表达某些特殊情况下的直线。如平行于y轴的直线，用点斜式、斜截式、两点式和截距式方程都不能表达出来。这样就需要建立另一种直线方程，即直线的法线式方程。它不仅能表示一切情形下的直线，并且还可以利用它求点到直线的距离等问题。直线的法线式方程是本章学习的重点。

关于直线系，应了解直线系的意义。课本中通过具体例子进行说明，比较直观。另外还可以从确定直线的条件来认识。直线的确定需要两个独立的条件，如果直线只满足一个条件，这样的直线往往有无数条，我们可以用含有一个未定常数的直线系方程表示它。课本中主要是研究了共点直线系与平行直线系，反映在直线方程$y=kx+b$中，就是一个常数确定（b或k），另一个常数未定。课本中的例子说明怎样根据一个条件，选用直线方程的一种适当的形式写出直线系方程。

经过两条直线交点的直线系定理，我们采用$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$来表示直线系方程，主要是在解题时应用起来比较方便。但是这种形式的直线系方程表示的直线不包括直线$A_2x+B_2y+C_2=0$在内，因此在理论上证明时，不够严密。

另外，定理中的“相交”这个条件，也应该重视。如果l_1和l_2不相交而平行，那么定理中的直线系所表示的直线都和l_1与l_2平行。

二、疑难解析与例题分析

1. 直线的斜率

斜率在解决直线方程的问题时，是很重要的。有时斜率不是直接给出的，而是给出倾角的关系。这时就需要将倾角之间的关系转化为斜率之间的关系。

例1 一条直线经过点 $P(2,-3)$，且它的倾角比直线 $y=2x$ 的倾角大 $45°$，求直线的方程。

分析 要求直线的方程，已知此直线经过的一点 $P(2,-3)$，如果知道此直线的斜率，根据点斜式，此直线的方程可求出。现在知道所求直线的倾角比直线 $y=2x$ 的倾角大 $45°$，那么此直线的斜率可求出。于是可求出此直线的方程。

解 设所求直线和直线 $y=2x$ 的倾角分别为 α 与 α_1，则所求直线的斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha_1+45°)=\dfrac{2+1}{1-2}=-3$。

因为直线经过点 $p(2,-3)$，所以它的方程为

$$y+3=-3(x-2),$$

即

$$3x+y-3=0.$$

有时，给出了倾角，要求直线方程中一些元素之间的关系（如截距）.这样的问题也要用到斜率。

例2 直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 的倾角为 $135°$，试求 a 与 b 之间的关系式。

分析 先把直线的截距式方程，化为一般式方程。于是可求出此直线的斜率，由斜率可得 a 与 b 之间的关系式。

解 直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$可化为

$$bx+ay=ab.$$

它的斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{b}{a}$,

又 $\alpha=135°$,

即 $\operatorname{tg}135°=-\frac{b}{a}$,

于是 $-1=-\frac{b}{a}$,

所以 a, b 之间的关系为 $a=b$.

例 3 已知$\triangle ABC$中，顶点 A 的坐标为$(1,3)$，AB与AC边上的中线方程分别是$x-2y+1=0$与$y-1=0$，求各边的方程.

分析 顶点 A 的坐标为已知，先设出 B 和 C 的坐标、AB 和 AC 中点的坐标. 两边中点的坐标应分别满足 AB 与 AC 边上的中线方程. 另外，AB 与 AC 中点E、D 的坐标，可用顶点 A 与 B、C 的坐标分别表示出来. 这样，容易求出B、C、D、E 的坐标. 由两点式可得三角形各边的方程.

解 设点 B 与 C 的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，AC的中点 D，AB 的中点 E 的坐标分别为(x_3, y_3)与(x_4, y_4).

因为点 B 与 D 在直线 $y-1=0$ 上，所以

$$y_1=y_3=1.$$

因为 C 与 E 在直线 $x-2y+1=0$ 上，所以

$$x_2-2y_2+1=0, \tag{1}$$

$$x_4-2y_4+1=0. \tag{2}$$

又 D 为 AC 的中点，它的坐标为

$$x_3=\frac{1+x_2}{2}, \tag{3}$$

$$y_3=\frac{3+y_2}{2}. \tag{4}$$

又 E 为 AB 的中点坐标，所以它的坐标为

$$x_4=\frac{1+x_1}{2}, \tag{5}$$

$$y_4=\frac{3+y_1}{2}. \tag{6}$$

将 $y_3=1$ 代入(4)，得 $y_2=-1$；
将 $y_1=1$ 代入（6)，得 $y_4=2$；
将 $y_2=-1$ 代入(1)，得 $x_2=-3$；
将 $y_4=2$ 代入(2)，得 $x_4=3$；
将 $x_4=3$ 代入(5)，得 $x_1=5$；
将 $x_2=-3$ 代入(3)，得 $x_3=-1$.

所以 $B(5,\ 1)$、$C(-3,\ -1)$、$D(-1,\ 1)$、$E(3,\ 2)$.

由直线方程的两点式，可得三角形各边的方程．即

AB 的方程为 $\dfrac{y-3}{1-3}=\dfrac{x-1}{5-1}$,

化简，得 $2y+x-7=0$.

同理可得 BC 的方程为 $x-4y-1=0$,

AC 的方程为 $x-y+2=0$.

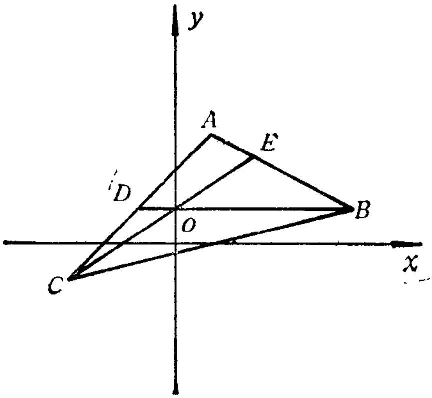

图 1-1

2. 关于对称的问题

在研究直线方程中，时常涉及对称问题．对称的问题，主要有两类：一是点关于直线的对称；二是直线关于直线的对称．求点关于直线的对称点时，必须明确，所求的对称点与已知点的连结线段被已知直线垂直平分．这样，根据垂直关系和已知点的坐标，可求出已知点与所求的对称点的连结线段所在直线的方程．然后求已知直线与此线段所在直线交点的坐标．于是，运用中点公式，可求得对称点的坐标．求一直线关于已知直线的对称直线时，也应该明确，此直线和已知直线的夹角等于所求的直线和已知直线的夹角．通过这个关系，可求得所求的对称直线的斜率．它们的交点是很容易求得的．于是，根据点斜式，可求得所求的对称直线的方程．

例 4 已知直线 $2x-y+1=0$。

(1) 求 $P(2,\ 4)$关于这条直线的对称点；

(2) 求直线 $3x-y=0$ 关于已知直线对称的直线方程.

分析 要求已知点关于已知直线的对称点，先求出已知点与对称点所在直线的方程；再求此直线与已知直线的交点．根据中点公式，可得所求对称点的坐标.

求一直线关于已知直线对称的直线，根据此直线与已知直线的夹角等于已知直线与所求直线的夹角，可得所求的对称直线的斜率．再求此直线与已知直线的交点，于是根据点斜式，可得所求的对称直线的方程.

解 (1) 设 $Q(x',\ y')$为点 P 关于直线 $2x-y+1=0$ 的对称点，

因为点 Q 在与直线 $2x-y+1=0$ 垂直且通过 P 点的直线上，所以这直线的斜率 $k=-\dfrac{1}{2}$.

它的方程为 $y-4=-\dfrac{1}{2}(x-2)$，

即 $$x+2y-10=0.$$

解方程组 $$\begin{cases}2x-y+1=0,\\ x+2y-10=0.\end{cases}$$

解得两直线交点的坐标$\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{21}{5}\right)$.

又此交点为 PQ 的中点，

$$\therefore \quad \begin{cases}\dfrac{x'+2}{2}=\dfrac{8}{5},\\[2ex] \dfrac{y'+4}{2}=\dfrac{21}{5}.\end{cases}$$

解得，P 点关于直线 $2x-y+1=0$ 的对称点 Q 的坐标为 $\left(\frac{6}{5}, \frac{22}{5}\right)$。

（2）直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $3x-y=0$ 的斜率分别为 $k_1=2$，$k_2=3$。

设所求直线的方程为 $y=kx+b$，则直线 $3x-y=0$ 与直线 $2x-y+1=0$ 的夹角 θ_1 和直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $y=kx+b$ 的夹角 θ_2 的正切分别为 $\operatorname{tg}\theta_1=\frac{3-2}{1+3\times 2}$，

$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{2-k}{1+2k}$，依题意 $\theta_1=\theta_2$，所以

$$\frac{3-2}{1+3\times 2}=\frac{2-k}{1+2k},$$

解得
$$k=\frac{13}{9}.$$

解方程组 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\ 3x-y=0.\end{cases}$

得直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $3x-y=0$ 的交点坐标（1，3）。这样，可根据点斜式求得直线方程。也可按下面的方法求得直线方程。

依题意直线 $y=\frac{13}{9}x+b$ 过交点(1,3)。

所以
$$3=\frac{13}{9}\times 1+b.$$

解得
$$b=\frac{14}{9}.$$