

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

# 解析几何教材辅导

杨大淳 主编



河北教育出版社

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

---

# 解析几何教材辅导

杨大淳 主编

汪敬庚 陈通鑫

杜江淳 张克东

河北教育出版社

责任编辑：杨士蕙

封面设计：李文侠

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

**解析几何教材辅导**

杨大淳 主编

王敬庚 陈通鑫 王汇淳 张克东

---

河北教育出版社出版发行（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷

---

787×1092毫米 1/32 16印张 341,000字 1989年4月第1版  
1989年4月第1次印刷 印数：000001—2,000 定价：4.00元

ISBN 7-5434-0271-8/G·225

# 前 言

本辅导书是按照中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试解析几何课本（以下简称课本）的体系与要求编写的。目的是为了辅导参加《专业合格证书》文化专业知识考试的初中数学教师更好地掌握课本中的基础知识、基本技能和一般的解题思路与解题方法。

本辅导书包括有：平面解析几何部分的直线、二次曲线的一般理论、参数方程和极坐标、空间解析几何的向量代数、平面、空间直线、特殊曲面、二次曲面，共九章。

每章分四部分，一是本章概述，主要是阐述本章内容间的内在联系，以及与其他章的联系；二是疑难解析与例题分析，主要是对重要的概念和难以理解的概念进行辨析，以及对解题方法的总结，相应地配以例题，并对例题的解法进行分析，从而使读者能够透彻地领会课本知识和提高运用知识的能力；三是与课本相应章节的练习题及习题解答，供读者作题后参考；四是自检题，以便读者检查自己学习课本各章知识的效果。本书最后还附有各章自检题的答案。

本书由参加中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试解析几何课本的编写人员编写。

编者

1987.6

# 目 录

## 平面解析几何部分

|                           |        |
|---------------------------|--------|
| 第一章 直线 .....              | ( 1 )  |
| 一、本章概述 .....              | ( 1 )  |
| 二、疑难解析与例题分析 .....         | ( 3 )  |
| 1. 直线的斜率 .....            | ( 3 )  |
| 2. 关于对称的问题 .....          | ( 6 )  |
| 3. 直线的法线式方程 .....         | ( 9 )  |
| 4. 点到直线的离差 .....          | ( 11 ) |
| 5. 直线系 ( 直线束 ) .....      | ( 14 ) |
| 三、解析几何课本*第一章练习、习题解答 ..... | ( 20 ) |
| 四、自检题 .....               | ( 50 ) |
| 第二章 参数方程 .....            | ( 53 ) |
| 一、本章概述 .....              | ( 53 ) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....         | ( 53 ) |
| 1. 曲线的参数方程 .....          | ( 53 ) |
| 2. 直线和二次曲线的参数方程 .....     | ( 55 ) |
| 3. 化参数方程为普通方程 .....       | ( 58 ) |
| 4. 参数方程的应用 .....          | ( 60 ) |
| 三、解析几何课本第二章练习、习题解答 .....  | ( 62 ) |
| 四、自检题 .....               | ( 78 ) |
| 第三章 极坐标方程 .....           | ( 79 ) |

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| 一、本章概述 .....                    | (79)  |
| 二、疑难解析与例题分析 .....               | (80)  |
| 1. 极坐标系 .....                   | (80)  |
| 2. 曲线的极坐标方程 .....               | (80)  |
| 3. 极坐标与直角坐标的互化 .....            | (83)  |
| 4. 利用极坐标解轨迹问题 .....             | (84)  |
| 5. 极坐标方程曲线的描绘 .....             | (87)  |
| 三、解析几何课本第三章练习、习题解答 .....        | (88)  |
| 四、自检题 .....                     | (104) |
| 第四章 二次曲线的一般理论 .....             | (106) |
| 一、本章概述 .....                    | (106) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....               | (107) |
| 1. 直线与二次曲线的位置关系 .....           | (107) |
| 2. 直径、共轭直径、主径的方程 .....          | (112) |
| 3. 曲线的切线方程 .....                | (115) |
| 4. 坐标变换 .....                   | (120) |
| 5. 在旋转变换中如何画出旋转角 $\theta$ ..... | (125) |
| 6. 化简二元二次方程 .....               | (127) |
| 7. 二次曲线的不变量 .....               | (130) |
| 8. 利用不变量, 讨论含有参数的二元二次方程 .....   | (132) |
| 9. 利用不变量化中心型曲线方程为规范形式的步骤 .....  | (134) |
| 10. 关于无心型曲线化为规范形式的问题 .....      | (135) |
| 三、解析几何课本第四章练习、习题解答 .....        | (135) |
| 四、自检题 .....                     | (195) |

## 空间解析几何部分

|                |       |
|----------------|-------|
| 第一章 向量代数 ..... | (198) |
|----------------|-------|

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| 一、本章概述 .....                     | (198) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....                | (199) |
| 1. 数量与向量 .....                   | (199) |
| 2. 向量的加法和减法 .....                | (200) |
| 3. 数与向量的乘法 .....                 | (204) |
| 4. 空间直角坐标系 .....                 | (209) |
| 5. 向量的坐标 .....                   | (210) |
| 6. 向量的数量积 .....                  | (215) |
| 7. 向量的向量积 .....                  | (218) |
| 8. 向量的混合积 .....                  | (223) |
| 三、解析几何课本空间解析几何部分第一章练习、习题解答 ..... | (225) |
| 四、自检题 .....                      | (251) |
| 第二章 平面 .....                     | (253) |
| 一、本章概述 .....                     | (253) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....                | (254) |
| 1. 平面的点法式方程 .....                | (254) |
| 2. 平面方程的一般式 .....                | (256) |
| 3. 平面方程的其他形式 .....               | (258) |
| 4. 点与平面的位置关系 .....               | (263) |
| 5. 两平面的位置关系 .....                | (264) |
| 6. 建立平面方程的方法小结——待定系数法 .....      | (266) |
| 三、解析几何课本空间解析几何部分第二章练习、习题解答 ..... | (274) |
| 四、自检题 .....                      | (289) |
| 第三章 空间直线 .....                   | (292) |
| 一、本章概述 .....                     | (292) |

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| 二、疑难解析与例题分析 .....                    | (293) |
| 1. 直线方程的参数式与对称式 .....                | (293) |
| 2. 直线方程的一般式和射影式 .....                | (296) |
| 3. 直线与平面的位置关系 .....                  | (300) |
| 4. 直线与直线的位置关系 .....                  | (307) |
| 5. 平面束 .....                         | (313) |
| 6. 方法小结——关于直线的方向向量 .....             | (315) |
| 三、解析几何课本空间解析几何部分第三章练<br>习、习题解答 ..... | (319) |
| 四、自检题 .....                          | (350) |
| 第四章 曲面和空间曲线 .....                    | (353) |
| 一、本章概述 .....                         | (353) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....                    | (354) |
| 1. 曲面方程 .....                        | (354) |
| 2. 空间曲线方程 .....                      | (355) |
| 3. 球面 .....                          | (356) |
| 4. 直圆柱面和一般柱面 .....                   | (360) |
| 5. 直圆锥面和一般锥面 .....                   | (364) |
| 6. 旋转曲面 .....                        | (367) |
| 7. 空间曲线的参数方程 .....                   | (373) |
| 8. 曲面的参数方程 .....                     | (377) |
| 三、解析几何课本空间解析几何部分第四章练<br>习、习题解答 ..... | (383) |
| 四、自检题 .....                          | (410) |
| 第五章 二次曲面 .....                       | (416) |
| 一、本章概述 .....                         | (416) |
| 二、疑难解析与例题分析 .....                    | (417) |



|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| 1. 关于曲面的对称性的讨论 .....                 | (417) |
| 2. 椭球面和双曲面的标准方程特点的分析 .....           | (419) |
| 3. 椭圆抛物面和双曲抛物面标准方程特点的分析 .....        | (422) |
| 4. 截口曲线 .....                        | (425) |
| 5. 由方程识别图形 .....                     | (429) |
| 6. 单叶双曲面和双曲抛物面的直母线 .....             | (437) |
| 7. 描绘二次曲面图形的基本技巧 .....               | (442) |
| 三、解析几何课本空间解析几何部分第五章练<br>习、习题解答 ..... | (456) |
| 四、自检题 .....                          | (484) |
| 附录 自检题答案 .....                       | (489) |

# 平面解析几何部分

## 第一章 直 线

### 一、本章概述

本章研究了直线的一般式方程、法线式方程、直线系方程。直线的一般式方程、法线式方程与直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程一样，都是二元一次方程。而每一个二元一次方程都表示一条直线，但是表示同一条直线的方程形式却不是唯一的，不过它们都可以通过方程的同解变形进行互化，可以看作是同一个方程。因此，直线和二元一次方程是一一对应的。

两个独立的条件决定一条直线。根据不同的条件，就得到直线方程的不同形式。有了直线的方程，就可以根据直线方程的系数，来研究直线的几何性质。对直线方程的系统研究，就为以后学习解析几何，打下了基础。

研究直线方程的一般式，是在研究直线方程的几种特殊形式（如点斜式等）的基础上进行的。关于直线方程的一般式，应该理解，平面内任意一条直线方程都是关于  $x$  与  $y$  的一次方程，任何关于  $x$  与  $y$  的一次方程，它的图形都是一条直线。

研究直线的法线式方程是因为直线方程的几种形式，除了一般式以外，存在一个共同的缺点，就是不能表达某些特殊情况下的直线。如平行于  $y$  轴的直线，用点斜式、斜截式、两点式和截距式方程都不能表达出来。这样就需要建立另一种直线方程，即直线的法线式方程。它不仅能表示一切情形下的直线，并且还可以利用它求点到直线的距离等问题。直线的法线式方程是本章学习的重点。

关于直线系，应了解直线系的意义。课本中通过具体例子进行说明，比较直观。另外还可以从确定直线的条件来认识。直线的确定需要两个独立的条件，如果直线只满足一个条件，这样的直线往往有无数条，我们可以用含有一个未定常数的直线系方程表示它。课本中主要是研究了共点直线系与平行直线系，反映在直线方程  $y = kx + b$  中，就是一个常数确定 ( $b$  或  $k$ )，另一个常数未定。课本中的例子说明怎样根据一个条件，选用直线方程的一种适当的形式写出直线系方程。

经过两条直线交点的直线系定理，我们采用  $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  来表示直线系方程，主要是在解题时应用起来比较方便。但是这种形式的直线系方程表示的直线不包括直线  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  在内，因此在理论上证明时，不够严密。

另外，定理中的“相交”这个条件，也应该重视。如果  $l_1$  和  $l_2$  不相交而平行，那么定理中的直线系所表示的直线都和  $l_1$  与  $l_2$  平行。

## 二、疑难解析与例题分析

### 1. 直线的斜率

斜率在解决直线方程的问题时，是很重要的。有时斜率不是直接给出的，而是给出倾角的关系。这时就需要将倾角之间的关系转化为斜率之间的关系。

**例 1** 一条直线经过点  $P(2, -3)$ ，且它的倾角比直线  $y = 2x$  的倾角大  $45^\circ$ ，求直线的方程。

**分析** 要求直线的方程，已知此直线经过的一点  $P(2, -3)$ ，如果知道此直线的斜率，根据点斜式，此直线的方程可求出。现在知道所求直线的倾角比直线  $y = 2x$  的倾角大  $45^\circ$ ，那么此直线的斜率可求出。于是可求出此直线的方程。

**解** 设所求直线和直线  $y = 2x$  的倾角分别为  $\alpha$  与  $\alpha_1$ ，则所求直线的斜率  $k = \tan \alpha = \tan(\alpha_1 + 45^\circ) = \frac{2+1}{1-2} = -3$ 。

因为直线经过点  $p(2, -3)$ ，所以它的方程为

$$y + 3 = -3(x - 2),$$

即  $3x + y - 3 = 0$ 。

有时，给出了倾角，要求直线方程中一些元素之间的关系（如截距）。这样的问题也要用到斜率。

**例 2** 直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  的倾角为  $135^\circ$ ，试求  $a$  与  $b$  之间的关系式。

**分析** 先把直线的截距式方程，化为一般式方程。于是可求出此直线的斜率，由斜率可得  $a$  与  $b$  之间的关系式。

**解** 直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  可化为

$$bx + ay = ab.$$

它的斜率为  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a},$

又  $\alpha = 135^\circ,$

即  $\operatorname{tg} 135^\circ = -\frac{b}{a},$

于是  $-1 = -\frac{b}{a},$

所以  $a, b$  之间的关系为  $a = b.$

**例 3** 已知  $\triangle ABC$  中, 顶点  $A$  的坐标为  $(1, 3)$ ,  $AB$  与  $AC$  边上的中线方程分别是  $x - 2y + 1 = 0$  与  $y - 1 = 0$ , 求各边的方程.

**分析** 顶点  $A$  的坐标为已知, 先设出  $B$  和  $C$  的坐标、 $AB$  和  $AC$  中点的坐标. 两边中点的坐标应分别满足  $AB$  与  $AC$  边上的中线方程. 另外,  $AB$  与  $AC$  中点  $E, D$  的坐标, 可用顶点  $A$  与  $B, C$  的坐标分别表示出来. 这样, 容易求出  $B, C, D, E$  的坐标. 由两点式可得三角形各边的方程.

**解** 设点  $B$  与  $C$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ,  $AC$  的中点  $D$ ,  $AB$  的中点  $E$  的坐标分别为  $(x_3, y_3)$  与  $(x_4, y_4)$ .

因为点  $B$  与  $D$  在直线  $y - 1 = 0$  上, 所以

$$y_1 = y_3 = 1.$$

因为  $C$  与  $E$  在直线  $x - 2y + 1 = 0$  上, 所以

$$x_2 - 2y_2 + 1 = 0, \quad (1)$$

$$x_4 - 2y_4 + 1 = 0. \quad (2)$$

又  $D$  为  $AC$  的中点, 它的坐标为

$$x_3 = \frac{1+x_2}{2}, \quad (3)$$

$$y_3 = \frac{3+y_2}{2}. \quad (4)$$

又  $E$  为  $AB$  的中点坐标, 所以它的坐标为

$$x_4 = \frac{1+x_1}{2}, \quad (5)$$

$$y_4 = \frac{3+y_1}{2}. \quad (6)$$

将  $y_3 = 1$  代入(4), 得  $y_2 = -1$ ;

将  $y_1 = 1$  代入(6), 得  $y_4 = 2$ ;

将  $y_2 = -1$  代入(1), 得  $x_2 = -3$ ;

将  $y_4 = 2$  代入(2), 得  $x_4 = 3$ ;

将  $x_4 = 3$  代入(5), 得  $x_1 = 5$ ;

将  $x_2 = -3$  代入(3), 得  $x_3 = -1$ .

所以  $B(5, 1)$ 、 $C(-3, -1)$ 、 $D(-1, 1)$ 、 $E(3, 2)$ .

由直线方程的两点式, 可得三角形各边的方程. 即

$AB$  的方程为  $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{5-1},$

化简, 得  $2y+x-7=0.$

同理可得  $BC$  的方程为  $x-4y-1=0,$

$AC$  的方程为  $x-y+2=0.$

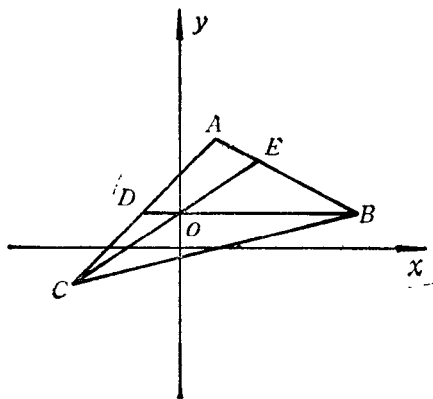


图 1-1

## 2. 关于对称的问题

在研究直线方程中，时常涉及对称问题。对称的问题，主要有两类：一是点关于直线的对称；二是直线关于直线的对称。求点关于直线的对称点时，必须明确，所求的对称点与已知点的连结线段被已知直线垂直平分。这样，根据垂直关系和已知点的坐标，可求出已知点与所求的对称点的连结线段所在直线的方程。然后求已知直线与此线段所在直线交点的坐标。于是，运用中点公式，可求得对称点的坐标。求一直线关于已知直线的对称直线时，也应该明确，此直线和已知直线的夹角等于所求的直线和已知直线的夹角。通过这个关系，可求得所求的对称直线的斜率。它们的交点是很容易求得的。于是，根据点斜式，可求得所求的对称直线的方程。

**例 4** 已知直线  $2x - y + 1 = 0$ 。

(1) 求  $P(2, 4)$  关于这条直线的对称点;

(2) 求直线  $3x - y = 0$  关于已知直线对称的直线方程。

**分析** 要求已知点关于已知直线的对称点, 先求出已知点与对称点所在直线的方程; 再求此直线与已知直线的交点。根据中点公式, 可得所求对称点的坐标。

求一直线关于已知直线对称的直线, 根据此直线与已知直线的夹角等于已知直线与所求直线的夹角, 可得所求的对称直线的斜率。再求此直线与已知直线的交点, 于是根据点斜式, 可得所求的对称直线的方程。

**解** (1) 设  $Q(x', y')$  为点  $P$  关于直线  $2x - y + 1 = 0$  的对称点,

因为点  $Q$  在与直线  $2x - y + 1 = 0$  垂直且通过  $P$  点的直线上, 所以这直线的斜率  $k = -\frac{1}{2}$ 。

它的方程为  $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ ,

即  $x + 2y - 10 = 0$ 。

解方程组 
$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - 10 = 0. \end{cases}$$

解得两直线交点的坐标  $(\frac{8}{5}, \frac{21}{5})$ 。

又此交点为  $PQ$  的中点,

$$\therefore \begin{cases} \frac{x' + 2}{2} = \frac{8}{5}, \\ \frac{y' + 4}{2} = \frac{21}{5}. \end{cases}$$



解得,  $P$  点关于直线  $2x - y + 1 = 0$  的对称点  $Q$  的坐标为  $(\frac{6}{5}, \frac{22}{5})$ .

(2) 直线  $2x - y + 1 = 0$  与直线  $3x - y = 0$  的斜率分别为  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ .

设所求直线的方程为  $y = kx + b$ , 则直线  $3x - y = 0$  与直线  $2x - y + 1 = 0$  的夹角  $\theta_1$  和直线  $2x - y + 1 = 0$  与直线  $y = kx + b$  的夹角  $\theta_2$  的正切分别为  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{3-2}{1+3 \times 2}$ ,

$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2-k}{1+2k}$ , 依题意  $\theta_1 = \theta_2$ , 所以

$$\frac{3-2}{1+3 \times 2} = \frac{2-k}{1+2k},$$

解得  $k = \frac{13}{9}$ .

解方程组 
$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$$

得直线  $2x - y + 1 = 0$  与直线  $3x - y = 0$  的交点坐标  $(1, 3)$ . 这样, 可根据点斜式求得直线方程. 也可按下面的方法求得直线方程.

依题意直线  $y = \frac{13}{9}x + b$  过交点  $(1, 3)$ .

所以  $3 = \frac{13}{9} \times 1 + b$ .

解得  $b = \frac{14}{9}$ .