SOUTHEAST
UNIVERSITY PRESS

东南大学出版社

数值分析

NUMERICAL ANALYSIS

袁慰平
张令敏
黄新芹　Yuan Weiping　Zhang Lingmin
闻震初　Huang Xingqin　Wen Zhenchu

数值分析

袁慰平　张令敏
黄新芹　闻震初　编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书着重介绍适合于电子计算机上采用的数值计算方法及其理论。其内容有：误差分析，非线性方程求根，线性方程组数值解法，函数插值与逼近，矩阵特征值与特征向量计算，数值微积分，常微分方程数值解法，偏微分方程数值解法等。内容覆盖了《国家教委工科研究生数学课程教学指导小组》所制订的工科硕士生数值分析课程教学基本要求，同时还增加了一些工科专业所需要的内容，如机器数系，有理函数插值，FFT变换，振荡函数积分，广义特征值计算等等，书中对各种计算方法的构造思想都作了较详细的阐述，对稳定性、收敛性、误差估计及算法的优缺点等也作了适当的讨论。本书还挑选了部分东南大学工科研究生结合各自专业自选课题的计算实习，以此作为本书各章的应用实例。

本书可作为工科研究生的教材，也可供从事数值计算的科技工作者阅读参考。

责任编辑 徐步政

数 值 分 析

袁慰平 张令敏 黄新芹 闻震初 编

东南大学出版社出版

地址：南京四牌楼2号 邮码：210018

江苏省新华书店发行 江苏省地质测绘院印刷厂印刷

开本 850×1168毫米 1/32 印张 17.375 字数 430千

1992年10月第1版 1998年7月第2次印刷

印数：3001－6000册

ISBN 7－81023－657－1

O·60 定价：20.00元

出 版 说 明

研究生教育是培养高层次专门人才的一条重要途径。通过研究生阶段的教学，应使研究生在本门学科上掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，并具有从事科学研究工作或独立担负专门技术工作的能力。编辑出版能够体现学校研究生教育特色、有较高学术水平的研究生教材，是研究生教育的重要基础工作之一。

一本好的研究生教材，应当富有教育性、系统性、启迪性、学术性和新颖性。这即是说，研究生教材必须符合教学的基本规律，注意理论联系实际；必须系统阐明本门学科所必要的基础理论和专门知识，注意突出基本原理和基本内容；必须着眼于研究生能力的培养，注意启发他们的创造性思维；必须体现较高的学术水平，注意有足够的理论深度，必须充分反映国内外的最新研究动态，注意当代科学技术发展的前沿。所有这些，既是对研究生教材的要求，也是我们组织出版研究生教材所要遵循的原则。当然，使研究生教材能对本学科领域的科研和工程技术人员有较高的参考价值，也是我们追求的目标。

现在出版的教材虽然是作者多年研究生教学的实践与研究的结晶，从选题，审定到编辑出版，我们也都经过了细致认真的工作，但要使一本研究生教材能满足大家之所求，决非易事。限于我们的水平和经验，难免有失当和错误之处。尚祈读者不吝指正。

东南大学研究生院

东南大学出版社

前　　言

随着计算机的广泛使用与科学技术的迅速发展，使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计中越来越不可缺少的一个环节，它有时甚至代替或超过了实验所起的作用。因此，科学计算应该成为高级科技人员的一个基本功。为此，作为科学计算的核心——“数值分析”已被较多的工科专业列为硕士研究生的一门学位课程。

我校自1981年开设此课程以来，进行了专业需要的调查以及教学内容和教学方法的改革与研究，并在教学实践的基础上形成了本书的初稿。初稿在本校使用过多遍，得到研究生及其指导教师们的良好反映与支持。在这次出版时，再一次总结教学实践中的经验，作了修改和加工。

本书的读者对象是工科研究生及从事数值计算的科技工作者，着重介绍了适合于电子计算机上采用的计算方法的构造及使用，对误差估计、方法的收敛性、稳定性、适用范围及优缺点等作了适当分析，对一些解法作了比较详细的推导和列举了较多的数值计算实例。其内容覆盖了〈国家教委工科研究生数学课程教学指导小组〉所制订的工科硕士研究生数值分析课程教学基本要求，同时还增加了一些工科专业所需要的内容，如误差分析中的机器数系；非线性方程求根的Sturm定理；插值与逼近中的重节点插值、有理函数插值及最佳一致逼近；数值积分中的振荡函数的积分、重积分的近似计算；常微分方程中的自适应算法及稳定性较好的单步隐格式；特征值计算中的广义特征值计算等等。增加的这些内容，若教学时数较少则可以删去，不会影响教学的连

续性；但若增加了这些内容，则在内容的深广度上更能适应工科专业发展的需要。因此，本书兼顾了多学时与少学时的要求。

本书每章末（除第一、七两章外）都有应用实例一节，取材于历届学生结合各自专业的自选课题。我们认为研究生学习“数值分析”课，一方面是提高数学素质，另一方面是为应用所学知识进行科学研究。于是我们要求学生在学完本课程后，必须结合所学内容及各自的专业自选研究课题做一个大型计算实习。这次，在讲义修改出版过程中，我们将历届学生做的大型计算实习，挑选了部分作为实例进入教材，有的实例尽管被我们作了简化和加工，但仍然可以从这些实例中初步看到本课程在各专业应用中的深广度。

南京大学苏煜城教授仔细地审阅了全书，并提出了宝贵的意见，在苏先生的指点下，我们作了修改。在本书的形成、使用、修改和出版过程中，得到东南大学研究生院和东南大学出版社及有关工科研究生指导教师和本教研室同志的关心、支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

本书编写分工如下、第一、三、五章为袁慰平，第二、六章为黄新芹，第四章为闻震初，第七、八章为张令敏。由于作者水平有限，缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　　者

于东南大学

目　　录

第一章 绪 论

§1 数值分析的对象与特点

数值分析是寻求数学问题近似解的方法、过程及其理论的一个数学分支。当今世界计算机已被广泛使用，因此数值分析所研究的应该是适合于计算机上使用的计算方法及其误差分析和收敛性、稳定性问题。

使用计算机通过计算方法或数值模拟的手段去解决科学或工程中的关键问题，我们简称为科学计算。它已成为科学研究、工程设计等越来越不可缺少的一个环节，有时甚至代替或超过了实验所起的作用。

最近半个世纪科学研究的实践使人们越来越清楚地认识到当代科学研究方法论应该由实验、科学计算及理论三大环节所组成。也就是说科学计算已成为一种新的科学研究方法。因此，作为科学计算的主体——数值分析也就越来越被人们所重视。

§2 误差的基本概念

2-1 误差的来源

一个物理量的真实值和我们算出的值往往不相等，它们之差称为误差，引起误差的原因是多方面的。

1. **模型误差** 从实际问题转化为数学问题，就是所谓的建立数学模型时，对被描述的实际问题进行了抽象和简化，因此数学模型只是客观现象的一种近似、一种粗糙的描述。这种数学模型与实际问题之间出现的误差称为模型误差。

2. **观测误差** 在给出的数学模型中往往涉及一些根据观测

得到的物理量，如电压、电流、温度、长度等，而观测难免不带误差，这种误差称为观测误差。

3. 截断误差 在计算中常常遇到只有通过无限过程才能得到的结果，但实际计算时，只能采用有限过程，如无穷级数求和，只能取前面有限项之和来近似代替，于是产生了有限过程代替无限过程的误差，称为截断误差，这是计算方法本身所出现的误差，所以也称方法误差。

4. 舍入误差 在计算中遇到的数据可能位数很多，也可能是无穷小数，如$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$，但计算时只能对有限位进行运算，一般采用四舍五入的办法。电子计算机计算时也有采用截尾的办法，如$\sqrt{2}$在八位字长的截断机里取成1.4142135，这样产生的误差称为舍入误差，也称计算误差。

少量的舍入误差是微不足道的，但在电子计算机上作了成千上万次运算后，舍入误差的积累有时可能是十分惊人的。

例1.1 设$y_0=2$，按递推公式$y_n=y_{n-1}+\frac{\sqrt{2}}{10}$，若取$\sqrt{2}=1.41$，求计算到$y_{100}$将有多大误差？

解 y_{100}误差是由$\sqrt{2}$取近似值1.41所产生的舍入误差积累而成。

精确值 $y_1=y_0+\frac{\sqrt{2}}{10}$。

近似值 $\tilde{y}_1=y_0+\frac{1.41}{10}$，则

$$y_2=y_1+\frac{\sqrt{2}}{10},\quad \tilde{y}_2=\tilde{y}_1+\frac{1.41}{10}$$

误差 $e_1=y_1-\tilde{y}_1=\frac{1}{10}(\sqrt{2}-1.41)$，

并设$\sqrt{2}$的舍入误差为$\delta=\sqrt{2}-1.41$，则 $e_1=\frac{1}{10}\delta$

$$e_2=y_2-\tilde{y}_2=y_1-\tilde{y}_1+\frac{1}{10}(\sqrt{2}-1.41)=\frac{2}{10}\delta$$

因此 $$e_{100}=y_{100}-\tilde{y}_{100}=\frac{100}{10}\delta=10\delta$$

此例说明按所给递推公式作 100 次运算后，舍入误差扩大了10倍，因此这种误差积累的速度是很快的。

由上述误差来源的分析可以得到如下结论，误差是不可避免的，要求绝对准确、绝对严格实际上是办不到的。对于实际问题，在建立数学模型时，本身已存在着模型误差和观测误差，因此既然描述问题的方法是近似的，那么要求解的绝对准确也就没有意义了。于是我们在计算方法里所讨论的解都只需是近似解，那种认为近似解不可靠、不准确的看法是错误的，应该认为求近似解是正常的，需要研究的问题是尽量设法减少误差，提高精度。从以上四种误差来源的分析，可以知道前两种误差是客观存在的，后两种是由计算方法所引起的，从主观上讲有的误差可以由改进计算方法而得到一些改善，本课程是研究数学问题的数值解法，因此只涉及后两种误差。

2-2 误差限

设x^*为准确值，x是x^*的一个近似值，称 $e=x^*-x$ 为近似值 x 的绝对误差，简称误差。

注意这样定义的误差 e 可正可负，所以绝对误差不是误差绝对值。通常我们不能算出准确值 x^*，也不可能算出误差的准确值，因此这个值虽然客观存在，但实际计算中是得不到的，得到的只能是误差的某个范围，即根据测量工具或计算情况估计出误差的绝对值不超过某正数 ε，即

$$|e|=|x^*-x|\leqslant\varepsilon$$

ε 称为近似值 x 的绝对误差限，简称误差限，有时也可以表示成 $x^*=x\pm\varepsilon$。

例如用毫米刻度的直尺测量一长度为x^*的物体，测得其长度的近似值为$x=2$毫米，由于直尺以毫米为刻度，所以其误差不超过0.5毫米，即

$$|x^*-2|\leqslant 0.5$$

从这个不等式我们不能得出准确值x^*之值，但却知道x^*的范围为

$$1.5\leqslant x^*\leqslant 2.5$$

对于给定的正数ε，若近似值x满足

$$|x^*-x|\leqslant\varepsilon$$

则在ε范围内认为x就是x^*，也即近似值x和真值x^*关于允许误差ε可以看成是“重合”的，或者说值x关于允许误差ε是准确的。

对于不同的物理量绝对误差限的大小不能完全表示出近似值的好坏，为了较好地反映近似值的精确程度，必须考虑绝对误差与真值之比，即相对误差，我们称$\frac{x^*-x}{x^*}=\frac{e}{x^*}$为近似值$x$的相对误差，记作$e_r$。

在实际计算中，真值x^*不能得到，因此当e_r很小时，可取$e_r=\frac{e}{x}$作为x的相对误差。

计算相对误差与计算绝对误差具有相同的困难，因此通常也只能考虑相对误差限，即如果有正数ε_r，使

$$|e_r|=\left|\frac{e}{x}\right|\leqslant\varepsilon_r$$

则称ε_r为x的相对误差限。

绝对误差只能用来比较对同一个量所测得的不同近似值的准确程度，而相对误差却能用来刻画或比较任何近似值准确程度。

§3 有效数与机器数系

3-1 有效数

工程技术中对于测量得到的数经常表示成$x\pm\varepsilon$，它虽然表示了近似值x的准确程度，但用这个量进行数值计算就太麻烦了，