证明的方法

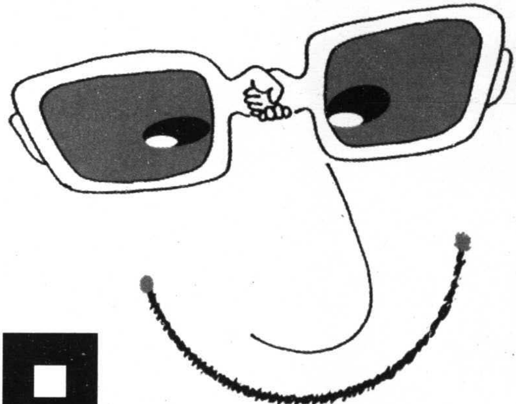
脑开发丛书

赵雄辉 编著

湖南人民出版社

证明

方法



证明的方法

湖南人民出版社

脑开发丛书

赵雄辉 编著

图书在版编目(CIP)数据

证明的方法/赵雄辉编著.—长沙:湖南人民出版社,2002.3

("脑开发"丛书)

ISBN 7-5438-2824-3

Ⅰ.证... Ⅱ.赵... Ⅲ.定理证明-方法-中学-课外读物 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第001513号

责任编辑:张志红

装帧设计:虢　剑

证明的方法

赵雄辉　编著

*

湖南人民出版社出版、发行

(长沙市展览馆路66号　邮编:410005)

湖南省新华书店经销　湖南东方速印科技股份有限公司印刷

2002年3月第1版第1次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:6.875

字数:116,000　印数:1-6,000

ISBN7-5438-2824-3

G·621　定价:11.00元

出版前言

轻轻松松上北大，轻轻松松上清华，甚至轻轻松松上哈佛，你相信有这样的事吗？

学习是否轻松，每个学子都心中有数。所谓轻松学习，无非是一要培养学习的兴趣，二要掌握学习的方法。有了学习兴趣，掌握了学习方法，学习起来，自然就会轻松。

“谁知道如何学习，谁就有丰富的知识。”这是美国的教育家亚当斯先生在《论教育》一书中的一句名言。他所指的如何学习，实际上也关涉到学习方法的问题。掌握了学习方法，就会获得丰富的知识，有了丰富的知识，上北大、清华，甚至哈佛，也就不会是梦想，而且，这梦还做得轻松着哩！

掌握学习方法是如此的重要，因此，为帮助正在求学途中的莘莘学子，我们出版了这套“脑开发”丛书，其目的和宗旨，也是为学子们提供最佳的学习方法。

这套丛书第一辑有五种，它们是：《发现的方

法》、《观察的方法》、《证明的方法》、《阅读的方法》和《表达的方法》。撰写这五本书的作者，或为大学教授，或为教育研究工作者，他们对学习方法均有自己的独特感悟。我们也期望这五本书是五把金钥匙，能帮学子们开启智慧的宝库，获得丰富的知识。

湖南人民出版社

辞书编辑室

2001 年 12 月

前　　言

“证明是数学的灵魂”（黑格尔语），数学家们总是不厌其烦地去找出一个又一个的命题，然后再想方设法证明它们。但是，证明不是数学的专利。物理学中有证明，化学需要证明，法官判案离不开证明，生活中也充满了证明。

古往今来，人类已经证明了的问题不计其数，而有待证明的问题更是层出不穷。有的问题轻而易举就证完了，有的问题则耗费了科学家们千百年的心血方才解开疑惑；有的问题只是应付考试时才有用，有的问题则可为你打开一扇通往科学殿堂的大门。

证明的方法丰富多彩。有直接证明，也有间接证明；有逻辑演绎证明，也有实验事实证明；有纸笔演算证明，也有计算机的机器证明。

证明的话题确实很大很大，可以找到的资料真的许许多多。本书只是从浩如烟海的证明文献中拾来点点小玩意，为中学生朋友介绍一些证明的历

史、典故和基本方法，以让中学生们开阔眼界，知道教科书以外还有许多关于证明的趣闻，学到更多的证明手段，从而不再害怕证明、远离证明。

书中的每一个小专题基本上是独立的，读者可以不按顺序阅读。个别问题如果涉及到没有学过的知识，你可以暂时跳过去，一般不会影响你对本书基本思想的了解。

在本书的写作过程中，我读研究生时的导师刘云章教授给予了热情的鼓励和指导，申建春先生、颜志明先生也提出了不少中肯的建议，还参考了大量的书籍和文章，在此表示衷心的感谢。

根据我多年中学数学教学和教研工作的感觉，“证明的”方法”应该是中学生很愿意学习的，本书的主题应该是中学生关心的，所以我鼓起勇气把这本小书写了出来。但我自己做出的证明实在太少，更没有数学研究的经验可言，故而又担心书中错漏的存在。在这里，只有老老实实请求读者朋友们多加指正，并向你们致以诚挚的谢意。

赵雄辉

2001 年 10 月

于湖南省教育科学研究院

目　录

证明由来已久

如果有人问你：为什么三角形三个内角的和等于 180°呢？

你可能会先画一个$\triangle ABC$，再过点 A 作一条辅助线 DE，使 $DE /\!/ BC$（如图 1—1）．然后作如下说明：

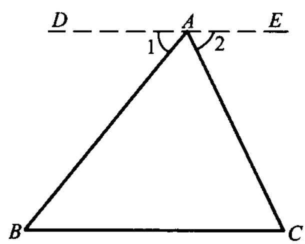


图 1—1

$\because DE /\!/ BC$

（已知），

$\therefore \angle 1 = \angle B$，

$\angle 2 = \angle C$

（两直线平行，内错角相等）．

又$\because \angle BAC + \angle 1 + \angle 2 = 180°$

（平角的定义），

$\therefore \angle BAC + \angle B + \angle C = 180°$

（等量代换）．

故$\triangle ABC$ 三个内角的和等于 180°.

这样一来，提问的人只要有相应的几何知识基础，他就会相信任一个三角形三个内角的和等于 180°，因为你给出了这个命题的数学证明.

在生活中，证明就是“用可靠的材料来表明或断定人或事物的真实性”．在数学里，证明就是用已知的数学事实，或其真实性显而易见的数学公理去解释、说明、断定要证命题的真实性，每个命题的证明实际上是已知事实、概念、命题、思想、方法的合理组合.

人类对数学命题进行证明的研究已有两千年历史了，数学家们总是努力去找出一个又一个的数学命题，并且一个又一个地加以证明，谁能证明更重要的命题谁就是胜利者.

早在公元前 7 世纪末，古希腊第一个享誉世界的数学家、哲学家泰勒斯（Thales，约公元前 640—546 年）就可能开始了数学命题的证明．据说他证明了“两直线相交，对顶角相等”、“等腰三角形的底角相等”、“直径把圆平分”等命题，他不满足对这些命题的直观判断，而是要穷究其正确的道理，把对事物的认识从感性上升到理性.

毕达哥拉斯（Pythagoras），大约生于公元前 580 至 568 年之间的撒摩斯岛（今土耳其西岸小岛），死于公元前 501 年或 500 年，他认为世界的本原是数，“数统治宇宙”，不过他理解的数是自然数，而分数则是自然数的比．毕达哥拉斯游历过许

多地方，在大希腊建立了一个秘密组织，即毕达哥拉斯学派，这个学派企图用数来解释一切，学派内得到的一切发明都归功于学派的领袖，而且常常秘而不宣．他们研究了许多数学问题，重视算术与几何的联系，发现了毕达哥拉斯定理（即勾股定理）．传说他们为了酬谢赐予毕达哥拉斯灵感的神灵，宰杀了一百头牲畜祭祀神话中掌管文艺、科学的缪斯女神．

毕达哥拉斯学派凭形象直观得出过一些结论，但他们看到了直观有时会导致谬误，认为不能用经验观察代替推理．他们给出了毕达哥拉斯定理的严格证明，并由此推证出等腰直角三角形的斜边与其一直角边之比不可能是分数 $\frac{q}{p}$（其中 p，q 是整数），从而创立了反证法，带来了无理数的发现．相传这一发现是一位叫希帕索斯的人发现的，由于触犯了该学派认为一切量都可以用整数和分数表示的信条，于是学派成员把希帕索斯投入大海中淹死了．不过，真理是淹不死的，相反，它以顽强的生命力广为流传，推动了数学的发展，促进了证明的逻辑基础的完善．

古希腊的数学发展是与哲学分不开的，很多哲学家也是数学家，他们认为只有学好数学才有资格讨论哲学问题．所以，当时的数学与哲学是相互影响和相互促进的．数学证明的产生，深深地受到希

腊哲学的影响，尤其是辩论学派的影响．公元前5世纪那时起，哲学家们在辩论时，总是以某些双方都已接受的命题、都认为不要再证实的“假说”（这种假说就转变为现在的公理）为出发点进行辩论．大哲学家柏拉图（Plato，约公元前427—前347年）就是这样的辩论者．在他的《理想国》中，有不少讨论几何、论证假设的论谈，例如书中有这样一段话：“我想你知道，研究几何学、算学以及这一类学问的人，首先要假设偶数与奇数、各种图形、三种角以及其他诸如此类的东西．他们把这些东西看成已知的，看成绝对假设．他们假设关于这些东西是不需要对他们自己或别人作任何说明的，这些东西是任何人都明白的．他们就从这些假设出发，通过首尾一贯的推理最后达到他们所追求的结论．”（中文本，商务印书馆出版，1995年版第269页）

柏拉图的学生亚里士多德（Aristotle，公元前384—322年）也是一个大学问家，中世纪的人把他奉为圣人，其思想影响西方数千年之久．他留下的著作涉及逻辑学、物理学、心理学、生物学、形而上学、伦理学、政治学、修辞学和诗学众多分支．他的名言“吾爱吾师，吾尤爱真理”，至今仍广为流传．

亚里士多德总结了当时的数学推理规律，建立了逻辑学．他提出三段论法，并举出过下面著名的

演绎推理例子：

凡人都要死，（大前提）

苏格拉底是人，（小前提）

所以苏格拉底必死.（结论）

这里，苏格拉底是亚里士多德的老师柏拉图的老师，也就是亚里士多德的师爷了.

三段论形式的推理在中学课程学习中广泛使用，如：

平行四边形的对边相等，

菱形是平行四边形，

所以菱形的对边相等.

到了公元前 4 世纪，希腊几何学已有了丰富的成果，于是，数学家们思考如何把它整理在严密的逻辑系统之中，并且一些数学家做了综合整理工作，最为突出的是欧几里得（Euclid，约公元前 330—275 年）写出了举世闻名的巨著《几何原本》(Elements)，该书从一些基本定义与公理出发，以合乎逻辑的演绎手法推导出四百多条定理，从而奠定了数学证明的模式.

在我国，演绎论证也有悠久的历史．春秋战国时代的思想家墨翟（大约生于公元前 490 年，死于公元前 403 年）的遗著《墨经》，大约成书于公元前 5 世纪到公元前 3 世纪，讨论的问题涉及认识论、逻辑思辨学、心理社会科学、自然科学及工艺上的应用等方面．在这本书中，关于数学和物理学

知识的内容在当时前所未有，可谓是中国历史上第一部自然科学专著．《墨经》共有6篇，其中《经上》各条大都是原理、定义、界说之类，各条先后次序连贯，自成严密的体系；《经下》采取建立论题加以论证的形式，或辩驳别家别派的论点．在《墨经》中的数学主要是几何学知识，虽然都是原始的、很朴素的关于数学名词的界说或定义，如：圆（圜）、点（端），没有数学符号，但含有丰富的数学概念，严密的逻辑推理和深邃的数理哲学思想和理论．其逻辑推理的论述是中国数学史中最早的和最珍贵的财产．有许多概念和理论，与《几何原本》极相符合．与古希腊一样，我国逻辑学的发展也是作为辩论术而发展起来的．在《墨经》中认为辩论的作用是区别是非真伪，比较异同，解释前因后果．辩论的对象就是命题．

《九章算术》是我国公元前2世纪前的一本数学著作，被誉为中国的《几何原本》，书中收集的246个问题分九章编写，第一章方田，第二章粟米，第三章衰分，第四章少广，第五章商功，第六章均输，第七章盈不足，第八章方程，第九章勾股．该书不像《几何原本》建立了严格的逻辑体系，而是一个题一个题地解答．但书中有不少推导说理，特别是数学家刘徽（3世纪人）对该书作的注释中推证了许多法则、公式（如多边形面积公式），逻辑推演了《九章算术》中所列的各种数学

结论，他认为“不有明据，辩之斯难”，强调“析理以辞，解体用图”，就是重视数学不仅要知其然，还要知其所以然，在推理、论证方面下了很大的功夫.

演绎证明经过千百年的发展，已成为认识自然，推动社会和科学发展的重要工具．它不仅核实命题，使人相信命题和理解命题，而且是发现真理的一个途径.

17 世纪英国著名的哲学家霍布斯（T. Hobbes，1588—1679 年）的传记里记叙了这样一件事：在他 40 岁那年，还从没有读过几何．一个偶然的机会，他在朋友家书房的案头上一本打开的书上看到欧几里得的《几何原本》卷一中的毕达哥拉斯定理：“在直角三角形中，直角所对的边上的正方形等于夹直角的两边上的正方形的和．”他看了这个命题，发誓般地说：“我向上帝保证，这是不可能的！”为了满足好奇心，他便开始仔细阅读这个命题的证明，在这个证明中，由于应用了前面的已经证明了的命题，于是他又逐个去阅读前面的定理，那条定理的证明又用到前面的定理，于是他继续追查下去，最后他完全信服了这个定理，并喜欢上了几何这门科学.

的确，我们遇到的命题中，有的命题直观易明，一看就不会怀疑，似乎不要证明，但有的命题必须证明才能使人相信.