初中数学

典型错解分析

福建人民出版社

初中数学

典型错解分析

虞玉琳　清如许　编

福建人民出版社

一九八七年·福州

初中数学典型错解分析
虞玉琳　清如许 编
*
福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/32　6.5印张　143千字
1987年3月第1版
1987年3月第1次印刷
印数：1—96840
书号：7173·876　定价：0.97元

编者的话

初中数学，包括中学数学最基础的知识和最基本的思想与方法。但由于数学知识的容量大，加上抽象、复杂的数学概念，浩如烟海的数学习题，灵活多变的解题方法……所有这一切，都足以使刚刚步入中学的学生感到不适应。因此，他们在解答数学习题时，往往出现这样或那样的错误。

错误往往是正确的先导。产生错误并不可怕，可怕的是，既错了，而不知错在哪里。或者虽知错在哪里，但又不知错误的原因何在。本书旨在通过对初中数学典型解题错误的分析和归纳，帮助广大初中学生找出产生错误的原因和提出纠正错误的办法，从而更牢固地掌握初中数学的基本原理，更深刻地领悟初中数学的基本思想和方法，以最终达到增强防止解题错误的“免疫力”，提高分析问题和解决问题的能力的目的。

本书共收集初中数学解题典型错误195例。这些错例来自活生生的教学实践，具有一定的典型性。书中所选用的题目和错解，既紧扣教学大纲和现行课本，又按现行教材体系进行编排，书写格式还注意到与课本的要求一致，以紧密配合学生学习、教师教学使用。

本书对每一道错解都加以较为深刻的剖析，点出错误所在，对产生错误的原因，尽可能从初中数学基本的思想与方法的高度，运用初中学生便于接受的语言加以阐述，而后再

给出正确的解答。每章后面有章小结，对本章易错的知识点加以系统归纳，让学生对本章典型的解题错误类型有较为完整的认识。最后每章还配有适量的、有针对性的练习，用来检验学生的“免疫力”。

本书是一本以分析典型解题错误为主的初中数学课外读物。它不仅适合初中学生阅读，而且也可作为初中数学教师的教学参考书，以及广大青年职工文化补习的辅助读物。由于编写的时间仓促，加上水平有限，本书一定存在不少缺陷，望广大读者指正。

编　者

1986年秋于榕城

目　　录

第一章　数与式

例1—1　有怎样关系的两个数，它们的商为-1？

错答：这两个数互为相反数。

〔分析〕本题仅仅考虑只有符号不同的两个数是互为相反数，而没有考虑零的相反数还是零的特殊情形。“两个数互为相反数”当然也包含两个数都是零的情况。此时除数为零，商又有什么意义呢？正确的答案为：

答：这两个数互为相反数（零除外）。

例1—2　分别写出倒数、绝对值等于它本身的数。

错答：倒数等于它本身的数是1，绝对值等于它本身的数是0。

〔分析〕1的倒数等于它的本身，但倒数等于它本身的数不仅仅是1；同样0的绝对值等于它的本身，但绝对值等于它本身的数也未必都是0。若建立数学模式，本题就不致求错。如设所求的数为$x(x\neq0)$，则$\frac{1}{x}=x$，求得$x=\pm1$；同样$|x|=x$，解得$x=0$或$x>0$。正确的答案为：

答：倒数等于它本身的数有±1，绝对值等于它本身的数有正数和零。

例1—3　写出绝对值不大于2的整数。

错答：绝对值不大于2的整数有：-1、1。

〔分析〕本题错误有二：其一，对整数的概念模糊不清，因此把符合条件的0排除在整数集合之外；其二，对

“不大于”理解不清，把它等同于“小于”，把“等于”排除在外。正确的答案为：

答：绝对值不大于2的整数有：-2、-1、0、1、2。

例1—4　求 a 的倒数。

错解：a 的倒数为$\frac{1}{a}$。

〔分析〕解题时缺乏对 a 取值范围的分析。若 a 为正数或负数时，它的倒数确为$\frac{1}{a}$。可是当a为零时，它的倒数不存在。正确的解法为：

解：当$a\neq0$时，a 的倒数为$\frac{1}{a}$；

　　当$a=0$时，a的倒数不存在。

例1—5　比较$4a$与$-4a$的大小。

错解：$\because$　$4a$是正数，$-4a$是负数，

　　$\therefore$　$4a>-4a$。

〔分析〕错解不加分析，就断定 $4a$ 是正数，$-4a$ 是负数，这是毫无根据的。字母 a 除可以取正值外，也可以取负值或零。因此，$4a$ 与 $-4a$ 的大小要依a的取值范围而定。正确的解法为：

解：(1) 当$a>0$时，$4a$为正数，$-4a$为负数，$\therefore 4a>-4a$。

(2) 当$a=0$时，$4a$与$-4a$均为0，$\therefore 4a=-4a$。

(3) 当$a<0$时，$4a$为负数，$-4a$为正数，$\therefore 4a<-4a$。

例1—6　计算　$4\sqrt{3}\div(\sqrt{27}+2\sqrt{3})$。

错解：

$$
\begin{aligned}
&4\sqrt{3}\div(\sqrt{27}+2\sqrt{3})\\
&=4\sqrt{3}\div\sqrt{27}+4\sqrt{3}\div2\sqrt{3}\\
&=\frac{4}{3}+2=3\frac{1}{3}。
\end{aligned}
$$

〔分析〕本题错误地应用了除法分配律，由$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$成立，推出$a\div(b+c)=a\div b+a\div c$也成立，于是得出了错误的结果。正确的解法为：

解：
$$4\sqrt{3}\div(\sqrt{27}+2\sqrt{3})$$
$$=4\sqrt{3}\div5\sqrt{3}=\frac{4}{5}.$$

例1—7　计算

$$\left[-3^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times1\frac{2}{3}-0.5\times4\right]\div\left(-1\frac{1}{2}+2\right).$$

错解：
$$\left[-3^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times1\frac{2}{3}-0.5\times4\right]\div\left(-1\frac{1}{2}+2\right)$$
$$=\left[9\times\frac{4}{9}-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{5}{3}-2\right]\div\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left[4+\frac{4}{3}-2\right]\div\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{10}{3}\times(-2)=-6\frac{2}{3}.$$

〔分析〕本题错误有二：其一，混淆$(-3)^2$与-3^2的区别，前者是-3的平方，后者是3的平方的相反数，它们计算结果截然不同；其二，异号两数相加，和的符号弄错了，$-1\frac{1}{2}+2$不是等于$-\frac{1}{2}$，而是等于$\frac{1}{2}$。正确的解法为：

解：
$$\left[-3^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times1\frac{2}{3}-0.5\times4\right]$$
$$\div\left(-1\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\left[-9\times\frac{4}{9}-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{5}{3}-2\right]\div\frac{1}{2}$$

$$=\left[-4+\frac{4}{3}-2\right]\div\frac{1}{2}$$

$$=\left(-4\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{2}$$

$$=\left(-\frac{14}{3}\right)\times 2=-9\frac{1}{3}.$$

例1—8 计算 $-2^3\div\frac{9}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$.

错解： $-2^3\div\frac{9}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$$=-8\div\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}$$

$$=-8\div 1=-8.$$

〔分析〕 错解第二步把后半部分的两个数$\frac{9}{4}$与$\frac{4}{9}$约简为1，是由于没有弄清有理数运算顺序的缘故。因为第二步"$-8\div\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}$"只有乘除运算，所以它应该按顺序进行运算。正确的解法为：

解： $-2^3\div\frac{9}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$$=-8\div\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}$$

$$=-8\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}$$

$$=-\frac{128}{81}=-1\frac{47}{81}.$$

例1—9 已知$|x|=3$，y的平方等于16，求$x+y$的值。

错解： $\because\ |x|=3$,

∴　$x=3$。

又　y的平方等于16，

∴　$y=4$。

故　$x+y=7$。

〔分析〕对绝对值、平方的概念理解不清。正确的解法为：

解：∵　$|x|=3$，

∴　$x=3$ 或 -3。

又　y的平方等于16，

∴　$y=4$或-4。

(1) 当$x=3$，$y=4$时，$x+y=7$；

(2) 当$x=3$，$y=-4$时，$x+y=-1$；

(3) 当$x=-3$，$y=4$时，$x+y=1$；

(4) 当$x=-3$，$y=-4$时，$x+y=-7$。

例1—10　下列各数哪些属于有理数集合？哪些属于整数集合？哪些属于无理数集合？

$\sqrt[3]{-8}$，0，$\frac{37}{11}$，$\sqrt[4]{16}$，π，3.1416，0.12341234…，0.1010010001…。

错答：属于有理数集合的有：0，π，3.1416；属于整数集合的有：0，π；属于无理数集合的有：$\sqrt[3]{-8}$，$\frac{37}{11}$，$\sqrt[4]{16}$，0.12341234…，0.1010010001…。

〔分析〕本题由于对数的概念模糊而引起解题混乱。

$\pi=3.14159\cdots$虽是一个常数，但它是无限不循环小数，于是它不是有理数，更不是整数。

$\sqrt[3]{-8}=-2$，$\frac{37}{11}$，$\sqrt[4]{16}=2$，这些数都不是无理数。0.12341234…虽然是无限小数，但它是循环小数，因此

也不属于无理数。

正确的解法为：

解：属于有理数集合的有：$\sqrt[3]{-8}$，0，$\frac{37}{11}$，$\sqrt[4]{16}$，3.1416，0.12341234…；属于整数集合的有：$\sqrt[3]{-8}$，0，$\sqrt[4]{16}$；属于无理数集合的有：π，0.1010010001…。

例1—11　无理数是无限小数对吗？为什么？

错答：不对。因为无理数是无限不循环小数。

〔分析〕无限小数分为无限循环小数和无限不循环小数，无论是哪一种情形，它们都是无限小数。相反地，无限小数一定是无理数才是错误的。正确的答案为：

答：对。如果无理数不是无限小数，那么就是有限小数，而有限小数是有理数，由此得出无理数是有理数，这是荒谬的。因此，无理数是无限小数。

例1—12　某检修小组乘坐一辆汽车沿公路检修线路，约定前进为正，后退为负。某天从A地出发到收工时，所走的路程（单位：公里）为：

$+15$，-2，$+5$，-1，$+10$，-3，-2，$+12$，$+4$，-5，$+6$。

(1) 问收工时，检修小组距A多远？

(2) 若每公里耗油a升，求从出发到收工共耗油多少升？

错解：(1) 设收工时距A s公里，则

$$s=|15-2+5-1+10-3-2+12+4-5+6|$$
$$=39。$$

即某检修小组收工时距A39公里。

(2) 由(1)便知，从出发到收工的耗油量为$39a$升。

〔分析〕显然，总耗油量等于汽车所走的总路程与它每

公里耗油量的积。可是，$s=39$公里并不是汽车从A出发到收工时所走的总路程，而是从出发到收工时，汽车与A的距离，这段距离远小于汽车所走的总路程，因此，用它来代替总路程而计算出的耗油量是完全错误的。正确的解法为：

解：（1）同上面解法，$s=39$。

（2）汽车从出发到收工时，总耗油量为Q升，则

$$Q=(|+15|+|-2|+|+5|+|-1|+|+10|+|-3| +|-2|+|+12|+|+4|+|-5|+|+6|)a$$
$$=65a。$$

答：收工时检修小组距A39公里，从出发到收工共耗油$65a$升。

例1—13 一个三位数的百位上的数字为a，十位上的数字为b，个位上的数字为c，试写出这个三位数。

错解：这个三位数为abc。

〔分析〕abc表示a、b、c三个数的积，并非这个三位数的本身。例如，当$a=1$，$b=2$，$c=3$时，这个三位数为123，而$abc=1\times2\times3=6$，两者截然不同。正确的解法为：

解：这个三位数为$100a+10b+c$。

例1—14 设甲数为x，乙数为y。试用代数式表示：甲数的3倍与乙数的和除甲数与乙数的3倍的差。

错解一：$(3x+y)\div(x-3y)$。

错解二：$x-3y\div(3x+y)$。

〔分析〕错解一未弄清“除”与“除以”的区别，把二者等同起来，致使解题中把除式与被除式弄颠倒了。

错解二已经注意到“除”的含义，把$3x+y$作为除式，这是正确的；但被除式$x-3y$不加括号，被除式变成只有$3y$，这与题意相违背。

正确的解法为：

解： $(x-3y)\div(3x+y)$。

例1—15 某人从甲地到乙地，先以每小时8公里的速度走了一半路程，后以每小时6公里的速度走完余下的路程。求此人从甲地到乙地的平均速度。

错解： $(8+6)\div2=7$（公里/小时）。

答：此人从甲地到乙地的平均速度为7公里/小时。

〔**分析**〕平均速度的含义是物体所走的路程与它走完这段路程所花的时间之比。而不是如解题中所误解的：平均速度是几个速度的平均值。正确的解法为：

解： 设总路程为$2s$，则平均速度为

$$\frac{2s}{\frac{s}{8}+\frac{s}{6}}=6\frac{6}{7}\text{（公里/小时）}。$$

答：此人从甲地到乙地的平均速度为$6\frac{6}{7}$公里/小时。

例1—16 n个学生按8人一组分成若干组，其中一组还少1人，问共有几组。

错解： 共有$\frac{n-1}{8}$组。

〔**分析**〕本题由于对题意理解不清致错。错解以为有一组少一人，就在总数中减去1，这是采取机械理解题意的办法。正确的解法为：

解： 设共有x组，则

$$8(x-1)+7=n。$$

由此，得 $x=\frac{n+1}{8}$。

答：共有 $\frac{n+1}{8}$组。

例1—17 计算

$(5x^3-2x^2+3)-(x^2-2x+1)+(-1+3x-x^2)$。

错解： $(5x^3-2x^2+3)-(x^2-2x+1)$

$+(-1+3x-x^2)$

$=5x^3-2x^2+3-x^2-2x+1-1+3x-x^2$

$=5x^3-4x^2+x+3$。

〔分析〕本题没有掌握去括号的法则。当第二个括号展开时，第二、三两项没有变号，计算的结果自然是错的。正确的解法为：

解： $(5x^3-2x^2+3)-(x^2-2x+1)+(-1+3x-x^2)$

$=5x^3-2x^2+3-x^2+2x-1-1+3x-x^2$

$=5x^3-4x^2+5x+1$。

例1—18 当x为何值时，分式$\frac{|x|-2}{3x+6}$的值为零？

错解： 由分子$|x|-2=0$，得 $x=\pm 2$。

$\therefore$ 当$x=\pm 2$时，分式$\frac{|x|-2}{3x+6}$的值为零。

〔分析〕一个分式的值为零，首先应以该分式存在，即有意义为前提。因为一个分式如果不存在，还谈得上值的大小吗？

本题正是由于忽略了这个重要的前提而致错。若把$x=-2$代入分式，则分母$3x+6=0$，此时分式无意义，它的值不存在。正确的解法为：

解： 由分子$|x|-2=0$，得 $x=\pm 2$。

$\because$ 当 $x=-2$时，分母 $3x+6=0$，此时分式无意义，

$\therefore$ $x=-2$ 舍去。

$\because$ 当 $x=2$时，分母 $3x+6\neq 0$，

∴ 当 $x=2$时，分式$\frac{|x|-2}{3x+6}$的值为零。

例1—19 把 $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$ 分解因式。

错解：去分母，得

$$原式=x^2+2xy+y^2$$
$$=(x+y)^2.$$

〔分析〕原式是一多项式，如何去分母呢？本题解答过程，无缘无故地将分母去掉，得到不能成立的式子，即

$$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2\neq x^2+2xy+y^2.$$

正确的解法为：

解：
$$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x+y)^2.$$

例1—20 把 x^4-1因式分解。

错解：
$$x^4-1$$
$$=(x^2+1)(x^2-1)$$
$$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$
$$=(x^2+1)(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1).$$

〔分析〕因式分解的最终目的是把一个多项式分解成几个整式的积的形式，而上述解法中，$\sqrt{x}+1$和$\sqrt{x}-1$都不是整式，因此是错误的。正确的解法为：

解：
$$x^4-1$$
$$=(x^2+1)(x^2-1)$$

$$=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

例1—21 把 x^3-3x+2 因式分解。

错解：

$$\begin{aligned}&x^3-3x+2\\=&x^3-3x+3-1\\=&(x^3-1)-(3x-3)\\=&(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)\\=&(x-1)(x^2+x-2).\end{aligned}$$

〔分析〕 x^3-3x+2与$(x-1)(x^2+x-2)$固然相等，但作为题目的要求，多项式 x^2+x-2 还可以分解，应该把它分解彻底。正确的解法为：

解：

$$\begin{aligned}&x^3-3x+2\\=&x^3-3x+3-1\\=&(x^3-1)-(3x-3)\\=&(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)\\=&(x-1)(x^2+x-2)\\=&(x-1)(x-1)(x+2)\\=&(x-1)^2(x+2).\end{aligned}$$

例1—22 化简 $\dfrac{\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{b}}$.

错解： $\dfrac{\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

〔分析〕 要对繁分式进行约分，必须先把它的分子与分母化为积的形式。也就是说，一般地（特殊情形例外），若一个繁分式的分子、分母是和的形式时，这样的繁分式就不