21世纪高等学校教材

GAODENG SHUXUE

高等数学（下册）

第二版

北京邮电大学数学教研室/编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高 等 数 学

下 册

（第二版）

北京邮电大学数学教研室 编

北 京 邮 电 大 学 出 版 社

内容提要

本书是在面向21世纪大学数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，经过多年数学试点班的教学实践编写而成的. 它在工科高等数学的基础上加入了部分数学分析的理论内容，使全书体现出结构严谨、内容丰富、理论性强的特点.

本书分为上、下两册. 下册内容为多元函数微分学、多元函数微分学的应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程共六章. 每节后配有习题，每章后配有两类综合练习，书末附有习题答案与提示，便于教与学.

本书可作为高等理工科院校及师范院校高等数学教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/北京邮电大学数学教研室编. —2版. —北京：北京邮电大学出版社，2004

ISBN 7－5635－0917－8

Ⅰ.高...　Ⅱ.北...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第059709号

书　　名：高等数学(下册)

编　　者：北京邮电大学数学教研室

责任编辑：徐夙琨

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(100876)

E-mail：publish@bupt.edu.cn

电话传真：010－62282185(发行部)010－62283578(传真)

经　　销：各地新华书店

印　　刷：国防科技大学印刷厂印刷

开　　本：787mm×960mm　1/16

印　　张：21

字　　数：397千字

版　　次：2004年7月第2版　2004年7月第1次印刷

ISBN 7－5635－0917－8/O·84　　定价(上、下册)：49.00元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有　侵权必究

第二版前言

本书在使用过程中受到了多方肯定,效果良好.特别是对于数学要求较高的理工科非数学专业较为适合.为了更好地提高学生的数学素养,并结合世界银行贷款的21世纪初高等教育“理工融合”教学模式的改革项目,我们在第一版的基础上做了修订,将实数理论基础部分单独成章,在内容体系上更趋合理完整,便于学生理解掌握.前三章内容有较大变动,分别由闵祥伟(第一、二章)和丁金扣(第三章)改写.另外,在全书的修订中,添加了一些精选例题,更有效地激发学生的学习兴趣,从而提高学生发现问题、解决问题的能力.

在本书的使用和修订过程中,数学部其他教师提出了不少具体意见和建议,给予我们很大的帮助.同时,北京邮电大学出版社也提供了大力的支持,为此,我们表示衷心的感谢.

编　者

2002年7月

前　　言

高等数学是一门重要的基础课，它为今后专业课的学习提供了大量的理论依据．同时，高等数学课程在训练学生的抽象思维、提高学生认识问题和解决问题的能力方面起到了不可低估的作用．我们在总结多年课堂教学经验的基础上，结合数年数学试点班的教学实践，编写了这套高等数学教材．该书基本上遵照教育部高等学校工科高等数学教学大纲的要求，但随着现代科学技术的迅猛发展，教学手段的不断提高，迫切需要在教学方面加大信息量．与此同时，考虑到我校各专业的后继课程对数学基础要求较高的特点，所以在书中加进了部分数学分析理论的内容，从而加强了本书的理论性，这也正符合了21世纪教学改革的基本方针．

本书在内容安排上由浅入深，符合认知规律，力求做到理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握．同时，书中配有大量例题和习题，每章后还配有两类综合练习，有助于培养学生综合分析问题的能力．

参加本书编写工作的有董友信（第一至三章）、闵祥伟（第四至六章、第八、九章）、丁金扣（第七章）、刘宝生（第十、十一章）、赵启松（第十二、十三章），全书由闵祥伟主编．

限于编者水平有限，同时由于编写时间较为仓促，书中一定存在不妥之处，敬请广大读者批评指正．

编　者

2000年5月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第九章　多元函数微分学

在上册中讨论的函数都只有一个自变量，称之为一元函数．在客观世界中，事物的变化是复杂的，是由各方面的因素决定的，在某些特定的情况下不需要考虑多种事物和多种因素的联系，而只注意一个事物和某一因素的联系，这时，事物的运动和变化规律可以表示成一元函数．但在大量的实际问题中，经常要考虑多种事物与多种因素的联系，因此反映到数学上，就有必要把函数概念从一个自变量与一个因变量的情形推广到多个自变量与多个因变量的情形，这就是多元函数．

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分学，并以二元函数为主．

第一节　多元函数

一、区域

讨论一元函数时，经常用到邻域和区间的概念．由于讨论多元函数的需要，首先把邻域和区间的概念加以推广，同时还要涉及其他一些概念．

1．邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体．

如果不需要强调邻域的半径时，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域，点 P_0 的去心（或空心）邻域记作 $U_0(P_0)$．

有了邻域的概念，可以借助它来描述点和集合的关系．

2．内点、外点、边界点

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点，则点 P 与集合 E 的关系有下列三种情形，见图 9-1．

（1）若存在 P 的某邻域 $U(P,\delta)$，使得

$$U(P,\delta)\subset E,$$

则称 P 为 E 的内点．E 的全部内点组成的集合称为 E 的内集或内部，记为 E^0．

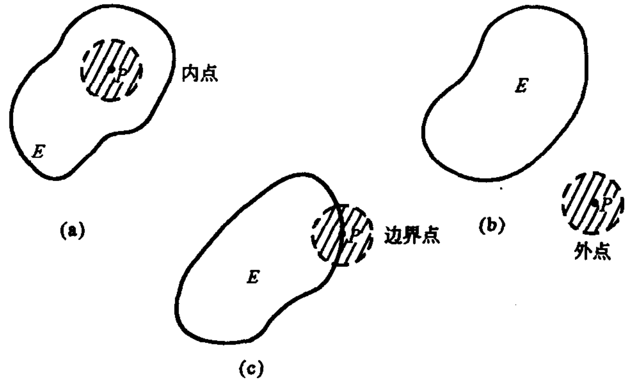

图 9-1

(2) 若存在 P 的某邻域 $U(P,\delta)$，使得

$$U(P,\delta)\cap E=\varnothing,$$

则称 P 是 E 的外点。E 的全部外点组成的集合称为 E 的外部.

(3) 若 P 既不是 E 的内点，也不是 E 的外点，则称 P 为 E 的边界点，即 P 的每个邻域既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点. E 的全体边界点组成的集合称为 E 的边界，记为 ∂E.

(4) 若点 P 的每个邻域 $U(P,\delta)$ 都含有 E 中异于 P 的一个点，则称 P 为 E 的聚点.

E 的聚点 P 可以属于 E，也可以不属于 E.

设点 P 不是 E 的聚点，若 $P\overline{\in}E$，则 P 是 E 的外点；若 $P\in E$，称 P 为 E 的孤立点. 孤立点一定是边界点.

显然内点和非孤立的边界点均为聚点.

3. 区域

若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

若点集 E 包含它的一切聚点，则称 E 为闭集，又约定空集 $\varnothing$ 为闭集.

例如：$E_1=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 为开集. $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 为 E_1 的边界.

设 D 是开集，如果对于 D 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 D，则称 D 是连通的开集，又称开区域. 开区域连同它的非孤立的边界点一起称为闭区域.

例如：$E_2=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 及 $E_3=\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 0\}$ 均为闭区域.

对于点集 E，若存在 $M>0$，对任意 $P\in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

M,即$|AP|\leqslant M$,

则称 E 为有界点集,否则称为无界点集.

例如:E_2 是有界闭区域,而 E_3 是无界闭区域.

4. n 维空间

我们知道,数轴上的点与实数有一一对应的关系,从而实数全体表示数轴上一切点的集合,即直线.在平面上引入直角坐标系后,平面上的点与有序二元数组(x,y)一一对应,从而有序二元数组(x,y)的全体表示平面上一切点的集合,即平面.在空间引入直角坐标系后,空间的点与有序三元数组(x,y,z)一一对应,从而有序三元数组(x,y,z)的全体表示空间一切点的集合,即空间.一般地,设 n 为取定的一个自然数,称有序 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为 n 维空间,而每个有序 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间中的一个点,数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为该点的第 i 个坐标,n 维空间记为 $\mathbf{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

由此,可以给出 $\mathbf{R}^n$ 上邻域的定义,以此为基础,可以将一系列概念推广到 n 维空间中去.

二、多元函数的概念

在很多问题中,经常会遇到多个变量之间的依赖关系.

例 1　一定量的理想气体的压强 p,体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数,这里 V,T 在集合$\{(V,T)|V>0,T>T_0\}$内取定一对值(V,T)时,p 的对应值就随之确定.

例 2　三角形的面积 S 和它的两边 b,c 及该两边的夹角 A 之间具有关系

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

这里,当 b,c,A 在集合$\{(b,c,A)|b>0,c>0,0<A<\pi\}$内取定一组值$(b,c,A)$时,$S$ 的对应值就随之确定.

上面两个例子的具体意义各不相同,但它们却有共同的特性,由此可抽象出多元函数的概念.

定义 1　设 D 是平面上的一个点集,如果对于每个点$P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y 的二元数值函数,简称二元函数(或点 P 的函数),记为

$$z=f(x,y)\quad（或\ z=f(P)）.$$

称 D 为定义域，x,y 为自变量，z 为因变量，数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为该函数的值域.

若对应于函数定义域中的(x,y)，有多个 z 值与之对应，则称为多值函数，对此，要将其分为若干支单值函数分别讨论. 今后如无特别声明，均指单值函数.

一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，则可类似地定义 n 元数值函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n\geqslant 2$ 时，统称为多元数值函数，简称多元函数.

从几何意义上说，一元函数的图像

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}$$

对应于 xOy 平面上的一条曲线. 二元函数的图像

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

则对应于 $Oxyz$ 空间中的一张曲面. 并且可以看到函数 $z=f(x,y)$的图像在 xOy 平面上的投影即为函数 $f(x,y)$的定义域(见图 9-2).

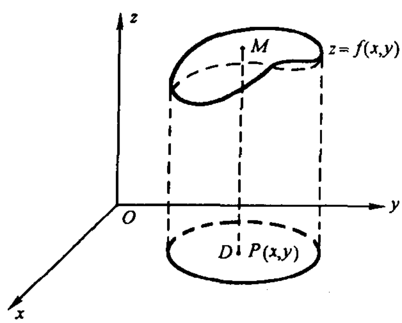

图 9-2

例 3 求 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的定义域.

解 定义域是 $R^2-x^2-y^2\geqslant 0$，即

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}.$$

由此可以看到该二元函数表示以原点为中心，以 R 为半径的上半球面. 其定义域为在 xOy 平面上以原点为圆心，以 R 为半径的闭圆域，也就是该上半球面在 xOy 平面上的投影。

***定义 2** 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一个点集，若存在某种对应法则 $\boldsymbol{f}$，对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，都有确定的 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$ 与之对应，则称 $\boldsymbol{f}$ 为 D 到 $\mathbf{R}^m$ 的一个 n 元向量函数. 记为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

称 D 为定义域，$\boldsymbol{f}(D)$为值域；$\boldsymbol{x}$ 为自变量，它是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量；$\boldsymbol{y}$ 为因变量，它是 $\mathbf{R}^m$ 中的向量。

显然一个 n 元向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$对应于 m 个 n 元数值函数

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \qquad\vdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases}$$

为了方便运算，经常将 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$表示成向量形式，即

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\f_2(\boldsymbol{x})\\\vdots\\f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2,\cdots x_n)\\f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{pmatrix},$$

其中
$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}.$$

在上式中，

$n=1,m=1$ 时，f 是一元数值函数；$n=1,m>1$ 时，f 是一元向量函数；

$n>1,m=1$ 时，f 是 n 元数值函数；$n>1,m>1$ 时，f 是 n 元向量函数.

例如，在空间解析几何中，空间曲线的参数方程：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

就可以看成从$[\alpha,\beta](\subset\mathbf{R})$到 $\mathbf{R}^3$ 的一元向量函数

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t),\qquad t\in[\alpha,\beta],$$

其中 $\boldsymbol{f}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in\mathbf{R}^3$.

三、多元函数的极限

1. 二重极限

极限方法同样是研究多元函数变化规律的基本方法. 多元函数的极限概念与一元函数的极限概念相似，只是自变量的变化过程复杂了.

定义 3　设函数 $f(x,y)$在开区域(或闭区域)D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A\quad 或\quad \lim_{P\to P_0}f(x,y)=A,$$

或
$$f(x,y)\to A\quad(\rho\to 0),$$

这里 $\rho=|PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限，称二元函数的极限为二重极限.

例 4　设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$，证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

证　因为$\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant1$，所以

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\sqrt{y^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|<\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0.$$

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x)=A$ 的定义中，包含了 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式可以是任意的，P 既可以沿任何直线也可以沿任何曲线趋于 P_0 时，均有 $f(x)$ 趋于 A；反之，若 P 以任何方式趋于 P_0 时，$f(x)$ 均趋于 A，则表明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x)=A$. 但需要特别注意：若 P 以某一特殊方式趋于 P_0，有 $f(x)$ 趋于 A，还不能由此断定函数的极限存在.

例 5 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的性质.

解 当 (x,y) 沿 x 轴和 y 轴变化时，都有 $f(x,y)=0$. 因而当 (x,y) 沿 x 轴和 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}f(x,y)=0,$$

但当 (x,y) 沿其他直线 $y=kx(k\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，却有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

这个极限值与直线 $y=kx$ 的斜率 k 有关，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

二重极限的四则运算法则、夹逼定理等均与一元函数相似.

例 6 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{y}\sin xy=0$.

证 利用极限的四则运算法则有：

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{y}\sin xy&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\cdot\frac{\sin xy}{xy}\right)\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}=0\times 1=0.\end{aligned}$$

例 7 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

解 因为 $(x^2+y^2)^{xy}=e^{xy\ln(x^2+y^2)}$，而

$$0<|xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$

令 $t=x^2+y^2$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$t\to0^+$，故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to0^+}t\ln t=0.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\ln(x^2+y^2)=0,$$

则
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{xy}=\mathrm{e}^0=1.$$

***2. 二次极限**

相对于二重极限，还有另一种极限过程，即自变量以某种顺序相继各自趋于某个值。以二元函数为例可以分成如下两种情况：

(1) $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 是先关于 x（暂时固定某个 $y\neq y_0$）取极限，然后再关于 y 取极限的结果；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 是先关于 y（暂时固定某个 $x\neq x_0$）取极限，然后再关于 x 取极限的结果.

称此类极限为二次极限或累次极限.

那么二次极限与二重极限有怎样的关系呢？

先看几个例子.

例 8　设

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y},$$

求 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

解
$$\varphi(y)=\lim_{x\to0}f(x,y)=\frac{y(y-1)}{y}=y-1,$$

$$\lim_{y\to0}\varphi(y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=-1;$$

$$\psi(x)=\lim_{y\to0}f(x,y)=\frac{x(x+1)}{x}=x+1,$$

$$\lim_{x\to0}\psi(x)=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=1,$$

并且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

此例说明，即使两个二次极限都存在，它们的值也可以不相等.

例 9　设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 及 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$.

解
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

而 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$，$\lim\limits_{x\to0}y\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在. 因此 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在. 同样 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 也不存在.

此例说明，即使二重极限存在，两个二次极限也可以不存在.

对于函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点(0,0)进行分析还可以发现，两个二次极限存在且相等，但二重极限不存在.

由此总结出下面的定理.

定理 1 设

(1) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$；

(2) 对任意 $y\in Y, y\neq y_0$，存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$，则二次极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

证 由条件(1)知，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta(x\in X)$，$|y-y_0|<\delta(y\in Y)$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时，总有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

固定 y，$0<|y-y_0|<\delta$，令 $x\to x_0$，得

$$|\varphi(y)-A|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A.$$

因此
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

由此定理可知，不可能出现二重极限与二次极限都存在但彼此不等的情况.

四、多元函数的连续性

有了二元函数极限的概念，就不难定义二元函数的连续性.

定义 4 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域) D 内的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 内的连续函数.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称 P_0 为 $f(x,y)$ 的间断点.

例 10 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y\text{ 任意},\\ 0, & x=0, y\text{ 任意}.\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在点(0,0)处的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时，$|f(x,y)|=\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x+y|$；当 $x=0$ 时，$|f(x,y)|=0$. 不论 x,y 为何值，都有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com