

30310

应用模糊数学与系统

●曹炳元 著



科学出版社

www.sciencep.com

应用模糊数学与系统

曹炳元 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

模糊数学是近三十年发展起来的一门崭新的边缘学科,它不仅扩充了经典数学的内容,而且在人工智能、信息处理、自动控制、系统分析、预测预报和经济管理等科技领域中有广泛的应用.本书包括模糊集合,模糊代数,模糊微积分,模糊规划与模糊图论,模糊概率,模糊多元分析,模糊逻辑与模糊推理,模糊系统与模糊控制,模糊数学与系统的应用实例.全书贯彻“少而精”和“循序渐进”的原则,力求内容新颖,论述深入浅出,系统性和适应性强.

本书可作为高等院校数学系研究生及高年级本科生的选修课教材或参考书,亦可作为具有大专文化程度的工程技术人员的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用模糊数学与系统/曹炳元著. —北京:科学出版社, 2005

ISBN 7-03-015258-1

I. 应… II. 曹… III. ①模糊数学②模糊系统 IV. ①O159 ②N94

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第039230号

责任编辑:林 鹏 范庆奎/责任校对:朱光光

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年10月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005年10月第一次印刷 印张: 17 1/4

印数: 1—3 000 字数: 327 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

从 1965 年起, 模糊数学经历了 40 年的风风雨雨, 渡过了襁褓期.

一门学科是真科学而不是伪科学, 能自立于世界各学科之林, 首先要有其科学思想的丰富与科学方法的革新. 众所周知, 概率论由于它早期与赌博等活动关系过于密切, 因而曾受到某些不应有的责难, 被斥之为“来路不正”. 只有在 A. H. Koomopob(1903)的工作之后, 数学大家庭才最后接受了这个历史比其他成员悠久得多的分支. 微积分理论在整个 18 世纪对于运算的研究具有一种特殊的痛苦, 由其基础的含糊性导致的矛盾异常尖锐. 然而纯粹分析领域及其应用领域的一个接一个的光辉发现, 即使一时还没有牢固的理论基础的微积分, 它的强大的生命力却在其应用的成就中体现出来, 为世人所公认. 模糊数学虽然发展还很成熟, 但它是一项开创性的工作, 其意义首先在于它的科学方法论的意义. 马克思认为: 一种科学只有当它成功地利用了数学的时候, 才能达到完善的地步. 然而, 有许多的领域被视为数学的禁区. 例如, 没有哪一把尺子或哪一架天秤能测量出顾客对某种商品的满意程度. 人脑具有一种模糊测量的天赋本领, 即使像“身高”这样可精确测量的物理量, 人脑也往往使用诸如“高个子”、“中等个儿”等测量词语. 因为侦探凭着罪犯是“高个子, 大胡子, 穿着一条黄色的裤子”这些模糊信息, 比告诉他精确的高度、胡子的根数以及裤子的色度更容易在人群中抓到要抓的罪犯. 近代科学的发展, 愈来愈多地要求向那些模糊的、传统数学很少问津的领域进军. L. A. Zadeh (1921~, 美国数学家, 控制论专家)充分领悟到了精确与模糊这一对立统一规律, 提出了模糊数学的核心思想, 就是用数学手段来仿效人脑的思维, 建立对复杂事物进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制和模糊决策的本领. 模糊数学这种崭新的思想, 固然代表了与传统数学不同的另一种倾向, 但绝不意味着是对精确化努力的一种否定. 从某种意义上说, 它使精确化能在更一般的框架下得以展现, 即从模糊性中寻找确定性的信息.

目前, 模糊数学研究方兴未艾. 模糊集理论进一步丰富了经典数学的理论宝库, 为人们处理模糊信息提供了众多巧妙的方法. 现在, 一种中介数学——模糊数学的公理化基础已在建立, 正接受实践的检验并进一步得到完善. 模糊数学的应用极其广泛, 已在各个学科领域取得了一个又一个新的成果.

模糊数学在工程与信息系统中的应用,将具有广阔的前景.自“中美双边模糊方法和现代决策在电力系统中的应用学术讨论会”于1984年7月在北京召开以来,模糊数学在电力系统中的应用已有了一些可喜的进展.然而,在我国仍然有许多“处女地”亟待用模糊数学去开拓.2005年,国际模糊系统协会(IFSA)将在北京召开第11届大会,这是我国模糊界乃至科学界的一件大事.为了适应科学技术发展的需要,使模糊集理论在我国生根、开花、结果,在研究生、本专科生中开设模糊数学选修课是非常必要的.针对当前我国各高校减学时、厚基础、宽口径的特点,为高校理工科与管理类研究生及应用数学系的大学本科生编写了这本教材.若去掉部分章节及定理证明部分,本书亦可作为理工科与管理类大学生的选修课教材,同时,也可供工程技术人员及高等院校教师参考.

本书的应用实例均具特色,它们一部分是作者本人的科研成果,一部分取自国内外其他著作.世界著名模糊控制论专家、日本大阪电气通信大学水本雅晴教授来华讲学的手稿使本书的编写受益匪浅.

最后诚挚的感谢国家自然科学基金委对作者研究工作的两次资助(1997.1~1999.12, No. 79670012 和 2003.1~2005.12, No. 70271047),感谢广州大学出版项目基金的全力资助.同时,特别感谢广州大学科研处、数学和信息科学学院对本书出版的鼎力相助.作者的硕士生周雪刚打印了全书书稿,硕士生周雪刚、朱章遐、谷秋鹏和谭云峰做完了书中全部习题并给出了答案,博士生杨吉会协助作者查找了很多史料.他们与硕士生仇海全、侯勇超一起,校对了全书书稿.汕头大学数学系2000级学生提出了很多有益的建议.在此对他们为本书所做的大量工作一并加以谢忱.

值得指出的是:1994年,我的良师益友,著名的模糊系统与数学专家,国防科技大学原政委汪浩少将在他六十大寿时,欣然为本书的前身《经济数学教程》写下了热情洋溢的评语,并担任该册书的顾问.该书第二篇——线性规划与模糊数学,经使用后修订,将模糊数学部分单独作为本册《应用模糊数学与系统》再版.值此再版之际,作者再次向汪浩教授致谢.

由于作者才疏学浅,书中一定存在许多缺点与错误,恳请读者批评指正.

作者

2004年5月

目 录

前言

第 1 章 模糊集合	1
1.1 模糊子集.....	1
1.2 模糊集的运算	5
1.3 模糊集的分解定理和表现定理	8
1.4 凸模糊集.....	14
1.5 模糊集的模糊性指标及第二类模型识别方法	15
1.6 模糊集在模型识别中的应用——第一类模型识别法	20
1.7 隶属函数的确定	21
1.8* 高型模糊集	28
习题一	31
第 2 章 模糊代数	34
2.1 模糊关系.....	34
2.2 模糊矩阵与模糊向量.....	39
2.3 模糊映射与模糊变换.....	46
2.4 扩展原理.....	49
2.5 区间数及其运算.....	52
2.6 模糊数及其扩展运算.....	56
2.7 模糊综合评价	66
2.8 模糊关系方程	73
2.9 模糊投入产出数学模型.....	81
习题二	91
第 3 章 模糊微积分	94
3.1 模糊函数.....	94
3.2 模糊微分学	98

3.3	模糊积分学(I)——模糊值函数的积分	101
3.4*	模糊测度与模糊积分(II)	104
3.5*	II 型模糊积分的计算及应用	109
	习题三	112
第 4 章	模糊规划与模糊图论	114
4.1	模糊限制下的条件极值与模糊决策	114
4.2	模糊规划	117
4.3	模糊线性规划的迭代解法	119
4.4	模糊线性规划的 Zimmermann 算法	124
4.5	多目标模糊线性规划	131
4.6*	具有 L - R 系数的线性规划及其图解法	135
4.7*	模糊图论	140
	习题四	144
第 5 章	模糊概率	147
5.1	模糊事件的概率	147
5.2	语言值的概率	151
	习题五	157
第 6 章	模糊多元分析	158
6.1	模糊统计法	158
6.2	模糊线性回归分析	161
6.3	模糊聚类分析	165
	习题六	173
第 7 章	模糊逻辑与模糊推理	174
7.1	模糊逻辑公式	174
7.2	模糊逻辑函数及其分解与合成	177
7.3	模糊逻辑函数的范式的求法与极小化	181
7.4	模糊推理	185
	习题七	190

第 8 章 模糊系统与模糊控制	192
8.1 模糊系统.....	192
8.2 模糊序贯决策过程.....	195
8.3 模糊控制系统.....	200
8.4 模糊控制规则的调整.....	207
习题八.....	214
第 9 章 模糊数学与系统的应用实例	216
9.1 水电站建造方案的优化抉择和坝型优选.....	216
9.2 典型日负荷图的计算机模糊模拟.....	219
9.3 用模糊关系方程法估计氙灯的光谱辐亮度.....	228
9.4 基于模糊控制的模糊洗衣机.....	231
9.5 回采工作面的模糊聚类分析.....	238
9.6 模糊专家系统在经济管理中的应用.....	242
习题九.....	244
习题答案	245
参考文献	263
附录	265

第1章 模糊集合

本章提出了模糊 (fuzzy) 集合的定义与性质, 介绍了模糊数学的三大支柱中的两个: 分解定理和表现定理. 介绍了模糊优化的基础——凸模糊集的概念以及应用广泛的两种识别方法, 探讨了非常棘手的隶属函数的确定问题. 最后考虑了高型模糊集 (曹炳元 2002).

1.1 模糊子集

为了给出模糊集合的概念, 首先给出模糊集论的一个基础概念——论域. 所谓论域是指我们所涉及到的对象的全体, 是一个普通的集合, 通常用大写英文字母 X 、 Y 、 Z 等表示. 以下我们给出模糊子集的数学描述.

定义 1.1.1 所谓集合 X 的一个模糊子集 $\tilde{A}$, 它是集合

$$\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x) | x \in X\},$$

其中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 中的一个确定的数, 称为点 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度. 在区间 $[0, 1]$ 上定义的这个函数

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\cdot) \text{ 或 } \mu_{\tilde{A}}(\cdot) : X &\longrightarrow [0, 1], \\ x &\longmapsto \mu_{\tilde{A}}(x) \end{aligned}$$

称为模糊子集 $\tilde{A}$ 的隶属函数.

在不致误解的情况下, 模糊子集 $\tilde{A}$ 和它的隶属函数 $\tilde{A}(x)$ 将不加区分. 同时, 模糊子集也常简称为模糊集.

由模糊集的定义 1.1.1, 显然有以下几个结论:

(1) 模糊集的概念是经典集合概念的推广.

若以 $\mathcal{F}(X)$ 表示 X 上模糊集的全体, 即

$$\mathcal{F}(X) = \{\tilde{A} | \tilde{A} \text{ 是 } X \text{ 上的模糊集}\},$$

则 $P(X) \subset \mathcal{F}(X)$, 其中 $P(X)$ 是 X 上的幂集合, 即

$$P(X) = \{A | A \text{ 是 } X \text{ 的普通子集}\}.$$

这就是说, 若模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数只取 0 与 1 两个值时, $\tilde{A}$ 便蜕化为一个 X 的普通子集.

(2) 隶属函数的概念是特征函数概念的推广.

当 $A \in P(X)$ 是 X 的普通子集时, 那么 A 的特征函数是

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ (} x \text{ 对 } A \text{ 的隶属度为 1)}, \\ 0, & x \notin A \text{ (} x \text{ 对 } A \text{ 的隶属度为 0)}. \end{cases}$$

这就意味着在模糊集合论中, 模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度 $\tilde{A}(x)$ 越是接近 1, 那么 x 属于 $\tilde{A}$ 的程度就越大; 反之, $\tilde{A}(x)$ 越是接近 0, 那么 x 属于 $\tilde{A}$ 的程度也就越小. 如果 $\tilde{A}(x)$ 的值域是 $\{0, 1\}$ 时, 则模糊集 $\tilde{A}$ 就是普通集合 A , 而隶属函数 $\tilde{A}(x)$ 就是特征函数 $\chi_A(x)$.

(3) 我们称 $\mathcal{F}(X) \setminus P(X)$ 中的模糊集为真模糊集.

以下列出模糊集的几种表示法:

1° Zadeh(模糊集合的创始人) 的表示法 (Zadeh 1965).

若集合 X 为有限集, 设论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则模糊集为

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{A}(x_i)}{x_i},$$

这里符号 “ Σ ” 不再是数字的和, $\tilde{A}(x_i)/x_i$ 也不是分数, 它只有符号意义, 只表示点 x_i 对模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度是 $\tilde{A}(x_i)$.

若集合 X 为无限集, 此时 X 上的一个模糊集为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\tilde{A}(x)}{x}.$$

同样, 符号 “ $\int$ ” 不再是积分, 只有无穷逻辑和的意义. 而 $\tilde{A}(x)/x$ 的意义和有限情况是一致的.

2° 论域 X 为有限集时, 按定义 1.1.1 的表示法为

$$\tilde{A} = \{(\tilde{A}(x_1), x_1), (\tilde{A}(x_2), x_2), \dots, (\tilde{A}(x_n), x_n)\}.$$

3° 论域 X 为有限集时, 按向量形式的表示法为

$$\tilde{A} = (\tilde{A}(x_1), \tilde{A}(x_2), \dots, \tilde{A}(x_n)).$$

值得注意的是: X 和 $\emptyset$ 也可看作 X 的模糊集, 若隶属函数 $\tilde{A}(x) \equiv 1$ 和 $\tilde{A}(x) \equiv 0$ 时, 则 $\tilde{A}$ 分别为全集 X 和空集 $\emptyset$.

隶属度为 1 的元素肯定属于这个模糊集, 隶属度为 0 的元素肯定不属于这个模糊集. 而在 $(0,1)$ 内的隶属函数值, 形成了不分明边界, 所以也把模糊集称为不分明子集 (fuzzy subset).

对一个模糊事物用模糊集去描述时, 它的隶属函数的取法是关键. 现在我们给出三类基本的隶属函数:

(1) 偏小型 (戒上型, 如图 1.1.1)

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} [1 + (a(x-c))^b]^{-1}, & \text{当 } x \geq c \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x < c \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $c \in X$ 是任一点, $a > 0, b > 0$ 是两个参数.

(2) 偏大型 (戒下型, 如图 1.1.2)

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq c \text{ 时,} \\ [1 + (a(x-c))^{-b}]^{-1}, & \text{当 } x > c \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $c \in X$ 是任一点, $a > 0, b > 0$ 是两个参数.

(3) 正态型 (中间型, 如图 1.1.3)

$$\tilde{A}(x) = \exp \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right],$$

$a \in X$ 为任一值, $b > 0$ 是参数.

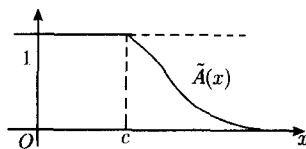


图 1.1.1

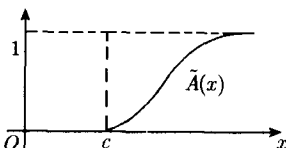


图 1.1.2

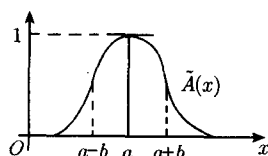


图 1.1.3

显然, 型 1, 2 是对偶的, 其意义一目了然; 型 3 是模糊集 $\tilde{A}$ “充分接近 a 的数集”, 那么这个 $\tilde{A}$ 的隶属函数据此定义为中间型.

例 1.1.1 设 $X \subseteq R^+$ (非负实数集). 以年龄为论域, 取 $X = [0, 120]$, Zadeh 给出的“年老” $\tilde{O}$ 和“年轻” $\tilde{Y}$ 这两个模糊集的隶属函数分别为

$$\tilde{O}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 50, \\ \left[1 + \left(\frac{x-50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1}, & 50 < x \leq 100, \\ 1, & x > 100. \end{cases}$$

$$\tilde{Y}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 25, \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2 \right]^{-1}, & 25 < x \leq 100, \\ 0, & x > 100. \end{cases}$$

如果某人的年龄是 28 岁, 则他属于“年轻人”和“老年人”的隶属度分别为

$$\left[1 + \left(\frac{28-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} = 0.735 \quad \text{和} \quad 0.$$

如果某人的年龄是 55 岁, 则他属于“年轻人”和“老年人”的隶属度分别为

$$\left[1 + \left(\frac{55-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} = 0.027 \quad \text{和} \quad \left[1 + \left(\frac{55-50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1} = 0.5.$$

例 1.1.2 考察某商店商品销售利润的经济效益. 以论域 $X = [0, k]$ 表示该商品销售利润额的范围: 最小利润额为 0, 最大利润额为 k , 其隶属函数

$$\tilde{A}(x) = \exp \left[- \left(\frac{x}{n} - m \right)^2 \right], \quad x \in [0, k],$$

表示利润额为 x 时经济效益好的程度. 其中常数 n 表示同期商品销售额, 常数 m 表示销售利润效益最好时刻的利润率. 例如取 $m = 0.2$, $n = 100$, 则当 $x = 30$ 时, 可算得 $\tilde{A}(30) = e^{-0.01} \approx 0.549$, 即说该商店此时商品销售利润的经济效益好的程度是 0.549.

根据上述三种类型的隶属函数, 就可以对某个具体的对象 x 算出其隶属度. 在精度要求不高时, 为简便计, 可采取评判法确定隶属度.

例 1.1.3 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, 这四个元素要组成一个小数的集合. 显然, 元素 1 是标准的小数, 应属于这个集合, 隶属度为 1; 元素 4 不是小数, 应不属于这个集合, 隶属度为 0. 元素 2 “也还小”或算作“八成小”, 隶属度为 0.8; 元素 3 只能是“勉强小”, 或者算作“二成小”, 隶属度为 0.2. 把小数这个模糊集写成 $\tilde{A}$, 其元素仍为 1, 2, 3, 4, 同时给出元素在 $\tilde{A}$ 中的隶属度, 用 Zadeh 的表示法为

$$\tilde{A} = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0}{4}.$$

用序偶表示法为

$$\tilde{A} = \{(1, 1), (0.8, 2), (0.2, 3), (0, 4)\}.$$

用向量表示法简捷地表示为

$$\tilde{A} = (1, 0.8, 0.2, 0).$$

1.2 模糊集的运算

由于模糊集的隶属函数相当于分明子集特征函数的值域从 $\{0, 1\}$ 扩张到 $[0, 1]$, 因此, 类似于用特征函数来表达分明子集之间的关系, 有

定义 1.2.1 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 若对任何 $x \in X$, 有

包含: $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \iff \tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$;

相等: $\tilde{A} = \tilde{B} \iff \tilde{A}(x) = \tilde{B}(x)$.

由定义 1.2.1, $\tilde{A} = \tilde{B} \iff \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ 且 } \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. 这就是说, 包含关系是模糊幂集 $\mathcal{F}(X)$ 上具有下述性质的二元关系, 即

- (1) $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}$ (自反性);
- (2) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ 且 } \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \implies \tilde{A} = \tilde{B}$ (对称性);
- (3) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ 且 } \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \implies \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$ (传递性).

因此, $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ 是一个偏序集, 因为关系 “ $\subseteq$ ” 构成 $\mathcal{F}(X)$ 上的一个序关系. 由于 $\phi, X \in \mathcal{F}(X)$, 故 $\mathcal{F}(X)$ 具有最大元 X 及最小元 ϕ .

定义 1.2.2 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 则我们定义

并: $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, 其隶属函数为 $(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$;

交: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, 其隶属函数为 $(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x) = \min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$;

余(补): $\tilde{A}^c$, 其隶属函数为 $\tilde{A}^c(x) = 1 - \tilde{A}(x)$.

他们的图像分别如图 1.2.1~ 图 1.2.3 所示:

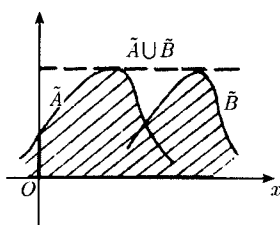


图 1.2.1

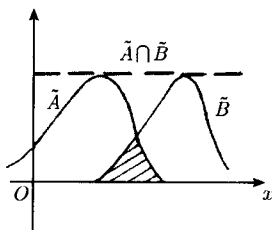


图 1.2.2

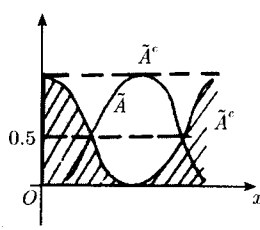


图 1.2.3

与分明集的并、交和余运算相比较, 我们立即发现, 模糊集运算正是分明集运算的平行定义, $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ 是既包含 $\tilde{A}$ 又包含 $\tilde{B}$ 的最小模糊集, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 是既包含于 $\tilde{A}$ 又包含于 $\tilde{B}$ 的最大模糊集.

按论域 X 为有限或无限的两种情况, 模糊集 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的并、交和余的计算公式可分别为

(1) 论域为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 且 $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{A}(x_i)}{x_i}$, $\tilde{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{B}(x_i)}{x_i}$, 则

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{A}(x_i) \vee \tilde{B}(x_i)}{x_i}, \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{A}(x_i) \wedge \tilde{B}(x_i)}{x_i}, \quad \tilde{A}^c = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \tilde{A}(x_i)}{x_i}.$$

(2) X 为无限集, 且 $\tilde{A} = \int_{x \in X} \tilde{A}(x)/x$, $\tilde{B} = \int_{x \in X} \tilde{B}(x)/x$, 则

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \int_{x \in X} \tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)/x, \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = \int_{x \in X} \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)/x,$$

$$\tilde{A}^c = \int_{x \in X} (1 - \tilde{A}(x))/x.$$

例 1.2.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\tilde{A} = \frac{1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0}{x_4}$, $\tilde{B} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0}{x_4}$, 则

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{1 \vee 0}{x_1} + \frac{0.8 \vee 0.2}{x_2} + \frac{0.2 \vee 0.8}{x_3} + \frac{0 \vee 0}{x_4} = \frac{1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0}{x_4},$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{1 \wedge 0}{x_1} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{x_2} + \frac{0.2 \wedge 0.8}{x_3} + \frac{0 \wedge 0}{x_4} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0}{x_4},$$

$$\tilde{A}^c = \frac{1-1}{x_1} + \frac{1-0.8}{x_2} + \frac{1-0.2}{x_3} + \frac{1-0}{x_4} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{1}{x_4}.$$

例 1.2.2 计算 1.1 节中例 1.1.1 的模糊集 $\tilde{Y}$ 与 $\tilde{O}$ 的并、交和余. 由定义

$$\begin{aligned} \tilde{Y} \cup \tilde{O} &= \int_{x \in X} \tilde{Y}(x) \vee \tilde{O}(x)/x = \int_{0 \leq x \leq 25} \frac{1}{x} + \int_{25 < x \leq x^*} \left[1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} / x \\ &\quad + \int_{x^* < x \leq 100} \left[1 + \left(\frac{x-50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1} / x + \int_{x > 100} \frac{1}{x}, \text{ 其中 } x^* \approx 51, \end{aligned}$$

$$\tilde{Y} \cap \tilde{O} = \int_{50 < x \leq x^*} \left[1 + \left(\frac{x-50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1} / x + \int_{x^* < x \leq 100} \left[1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} / x,$$

$$\tilde{O}^c = \int_{0 \leq x \leq 50} \frac{1}{x} + \int_{50 < x \leq 100} 1 - \left[1 + \left(\frac{x-50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1} / x,$$

$$\tilde{Y}^c = \int_{25 \leq x \leq 100} 1 - \left[1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} / x + \int_{x > 100} \frac{1}{x}.$$

模糊集的并、交运算, 可以推广到任意多个模糊集合上去.

定义 1.2.3 设 T 为指标集, $\tilde{A}_t \in \mathcal{F}(X)$ ($t \in T$), 则

$$\left(\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t \right) (x) = \bigvee_{t \in T} \tilde{A}_t(x) = \sup_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad x \in X,$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t \right) (x) = \bigwedge_{t \in T} \tilde{A}_t(x) = \inf_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad x \in X.$$

显然有 $\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t, \bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t \in \mathcal{F}(X)$. 特别地, 当 T 为有限集时,

$$\left(\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t \right) (x) = \max_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad x \in X,$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t \right) (x) = \min_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad x \in X.$$

定理 1.2.1 $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap, c)$ 满足以下性质:

- (1) 幂等律: $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$;
- (2) 交换律: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$;
- (3) 结合律: $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}), (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$;
- (4) 吸收律: $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{A} = \tilde{A}, (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{A} = \tilde{A}$;
- (5) 分配律: $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C} = (\tilde{A} \cap \tilde{C}) \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}),$
 $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C} = (\tilde{A} \cup \tilde{C}) \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})$;
- (6) 0-1 律: $\tilde{A} \cap X = \tilde{A}, \tilde{A} \cap \phi = \phi; \tilde{A} \cup X = X, \tilde{A} \cup \phi = \tilde{A}$;
- (7) 复原律: $(\tilde{A}^c)^c = \tilde{A}$;
- (8) 对偶律: $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c, (\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c$.

证明 以性质 (8) 为例证明, 其余可直接验证得到.

由 $\forall x \in X$, 有

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c(x) &= 1 - (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = 1 - \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\} \\ &= \min\{1 - \tilde{A}(x), 1 - \tilde{B}(x)\} \\ &= \min\{\tilde{A}^c(x), \tilde{B}^c(x)\} = (\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c)(x). \end{aligned}$$

所以

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c.$$

同理可证

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c.$$

我们指出, 模糊集合不再满足互余律. 即一般情况下, 有

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq X, \tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \phi. \text{ 但有 } \tilde{A} \cup \tilde{A}^c \geq \frac{1}{2}, \tilde{A} \cap \tilde{A}^c \leq \frac{1}{2}.$$

例 1.2.3 若 $\tilde{A}(x) \equiv 0.5, \tilde{A}^c(x) \equiv 0.5$, 则

$$(\tilde{A} \cup \tilde{A}^c)(x) = \max\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 1,$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{A}^c)(x) = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 0.$$

此外, 我们还考虑模糊集运算的其他定义.

定义 1.2.4 对 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 定义其并、交运算的一般形式为

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \triangleq \tilde{A}(x) \vee^* \tilde{B}(x), (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \triangleq \tilde{A}(x) \wedge^* \tilde{B}(x).$$

这里 $\vee^*, \wedge^*$ 是 $[0, 1]$ 的二元运算, 简称为模糊算子, 取为

I. 最大乘积算子 $(\vee, \cdot)$

$$\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}, \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x) \text{ 表示普通实数乘法.}$$

II. 有界和与积算子 $(\oplus, \odot)$

$$\tilde{A}(x) \oplus \tilde{B}(x) \triangleq \min\{\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x), 1\}, \tilde{A} \odot \tilde{B} \triangleq \max\{0, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - 1\}.$$

III. 概率和与积算子 $(\hat{+}, \cdot)$

$$\tilde{A}(x) \hat{+} \tilde{B}(x) \triangleq \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x), \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x) \text{ 表示普通实数乘法.}$$

用初等计算方法可以验证: 算子 I 满足算子 $(\vee, \wedge)$ 所满足的算律, 而算子 II, III 则不满足幂等律, 吸收律和分配律.

1.3 模糊集的分解定理和表现定理

模糊集合的分解定理给出了模糊集合与经典集合之间的关系, 它是联系普通集和模糊集的桥梁. 本节先引进 λ -截集的概念, 再讨论模糊集的分解定理, 最后略述表现定理.

1.3.1 λ -截集

定义 1.3.1 设 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$, 对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 记

$$(\tilde{A})_\lambda = A_\lambda = \{x | \tilde{A}(x) \geq \lambda\},$$

称 A_λ 为 $\tilde{A}$ 的 λ -截集, λ 称为置信水平. 又记

$$(\tilde{A})_{\lambda^+} = A_{\lambda^+} = \{x | \tilde{A}(x) > \lambda\},$$

称 A_λ 为 $\tilde{A}$ 的 λ -强截集. 称

$$(\tilde{A})_0 = \{x | \tilde{A}(x) > 0\} = \text{supp } \tilde{A}$$

为 $\tilde{A}$ 的支集. 若该支集 $\text{supp } \tilde{A} = \{x\}$ 为单点集, 则称 $\tilde{A}$ 为 X 上的一个模糊点.

A_λ 的直观意义是, 若 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度达到或超过水平 λ 者就算作合格成员, 而这些合格成员的全体便构成 A_λ , 它是 X 的一个经典子集.

例 1.3.1 设 $\tilde{A} = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{1}{x_5}$, 则

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \text{ 时, } & A_1 = \{x_5\}, & A_1 &= \phi, \\ \lambda = 0.9 \text{ 时, } & A_{0.9} = \{x_4, x_5\}, & A_{0.9} &= \{x_5\}, \\ \lambda = 0.7 \text{ 时, } & A_{0.7} = \{x_2, x_4, x_5\}, & A_{0.7} &= \{x_4, x_5\}, \\ \lambda = 0.5 \text{ 时, } & A_{0.5} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, & A_{0.5} &= \{x_2, x_4, x_5\}, \\ \lambda = 0 \text{ 时, } & A_0 = X, & A_0 &= \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \end{aligned}$$

截集具有下列性质:

性质 1.3.1 (1) $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$;

(2) $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$.

证明 仅证 (1), (2) 可类似地证明.

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda &= \{x | (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \geq \lambda\} = \{x | \tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x) \geq \lambda\} \\ &= \{x | \tilde{A}(x) \geq \lambda\} \cup \{x | \tilde{B}(x) \geq \lambda\} = A_\lambda \cup B_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda &= \{x | (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \geq \lambda\} = \{x | \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x) \geq \lambda\} \\ &= \{x | \tilde{A}(x) \geq \lambda\} \cap \{x | \tilde{B}(x) \geq \lambda\} = A_\lambda \cap B_\lambda. \end{aligned}$$

性质 1.3.2 (1) $\left(\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda \supseteq \bigcup_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $\left(\bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $(\tilde{A}^c)_\lambda = (A_{1-\lambda})^c$;

(2) $\left(\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda = \bigcup_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $\left(\bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda \subseteq \bigcap_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $(\tilde{A}^c)_\lambda = (A_{1-\lambda})^c$.

性质 1.3.2 的证明很简单, 读者自证.

必须指出: (1) 中第一式和 (2) 中第二式不能换为等式.

例 1.3.2 令 $\tilde{A}_n(x) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right)(x) \equiv \frac{1}{2}$, 于是

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right)_{0.5} = X.$$