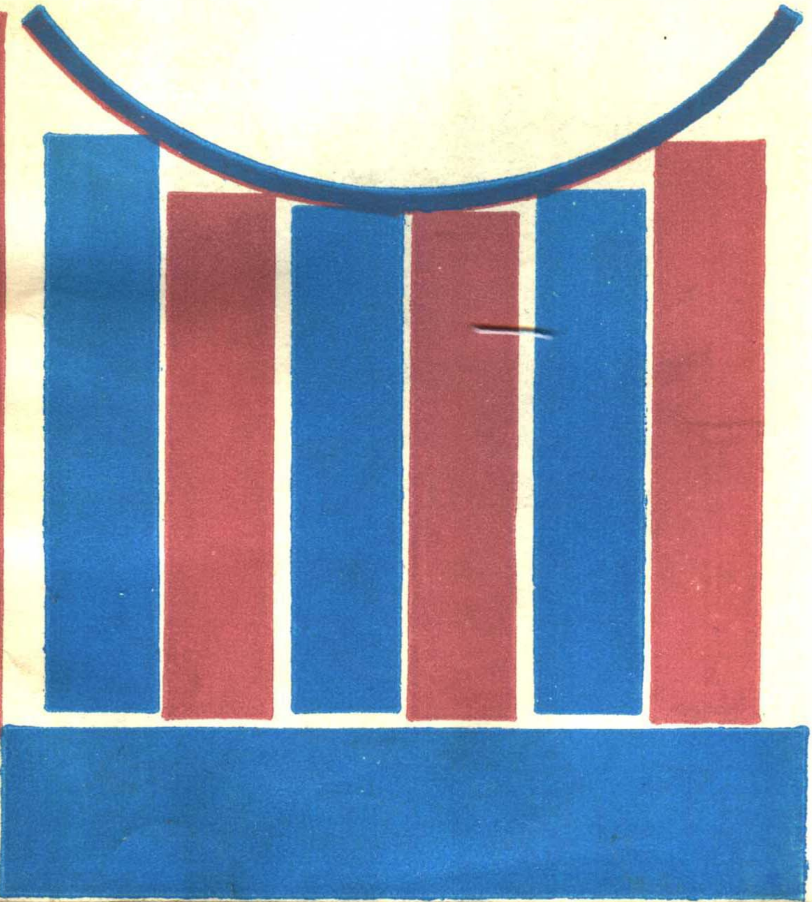
中学理科学习指导丛书

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

高三微积分初步

辅导与练习



编 者

北京市石油学院附中　　薛文叙
北京市矿院附中　　李公月
北京市清华附中　　孔令颐
北京市123中　　陈 颖
北京市海淀区教师进修学校　　张士充　汪惟葆

责任编辑　夏树人

高三微积分初步辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
新华书店重庆发行所发行
重庆印制一厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：7.75　字数：170千
1985年7月第一版　　1985年7月第一次印刷
印数 1—564,800

书号：7114·305　　定价：0.84元

内容提要

本书是配合高三微积分初步教材编写的。书中对每一章的知识结构及结合知识可进行的思维训练进行了分析；对重点、难点进行了较详细的讲解；把习题归类，并注意介绍解题的方法和规律；每章最后还附有一份自我检查题，为学生练习和检查自己的学习情况提供了资料。

前　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过教学实践，我们认识到：中学数学的学习和练习应做到以下几点：

（1）只有把知识的结构分析清楚，知识才易于学生理解、记忆和运用，从而使学生掌握知识的整体；

（2）打好基础，是学生学好全部知识的前提，在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一；

（3）引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识、提高解题能力的有效途径；

（4）对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引申的能力，这不但是可以的，而且是应该的；

（5）知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

(1) 结构分析：有些章分析比较简单，可以在学习开始时看；有些则分析得较深入，可以在学完全章后再看.

(2) 重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容；说明难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法、解题技巧，促进哪些能力的增长.

(3) 各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律.

(4) 启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法等，以适当启发学生对所学知识作更深入的思考.

(5) 习题和自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、有一定综合性、用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题.

本书尽量做到以上各项中的要求，体现紧密配合教材，又不重复教材内容的原则．但是，限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给以批评和指正.

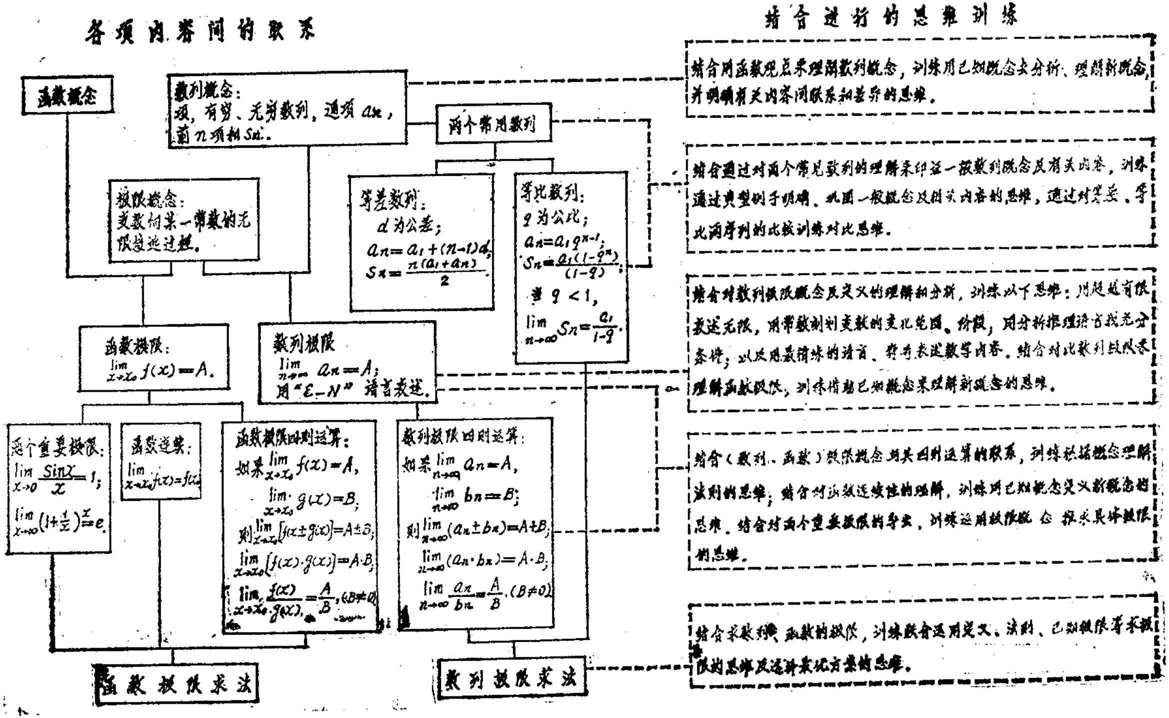
北京市海淀区教师进修学校

1985 年 3 月

目　　录

第一章　极限和连续

一、结构分析



［说明］

（1）本章中“数列极限概念、定义、证明、四则运算等及有关定理、知识”与“函数极限概念、四则运算、有关定理等及函数的连续性与其有关知识”各自成一结构体系；但两体系中，关于数列极限与函数极限的相应内容，可对比之处很多。特别是书中对函数极限的各方面只叙述结果；所以运用对比思维，借助对数列极限各方面的理解来理解函数极限的各方面就很重要。对比中要分清异、同，看到差别和联系才有助于理解。

（2）本章中学习者初次接触到运用逻辑语言表述无限过程的思维，这种思维训练要在以后几章中继续进行。

（3）本章中引进的概念较多，因此，明确各概念间的逻辑关系是一种重要的思维训练；同时，运用概念、定义作出证明，推导出法则、定理的思维训练也很重要（这算是较高要求）；因为正是在这些证明、推导中，概念、定义通过被运用而被掌握，各概念之间的关系也得到明确。所以最好要动手去推证，学会书上的推证。

二、重点、难点分析

从这一章起，中学数学就进入了学习微积分初步知识阶段。

微积分学是高等数学的基础，它在学习其它自然科学和许多社会科学以及掌握现代生产技术等方面有着极为广泛的应用。

开始学习微积分学首先应该注意到，微积分学，一般是以

极限为基本工具研究函数的微分与积分理论与应用的一门数学学科。这就是说，微积分学与初等数学的研究方法有些不同，它增加了为同学们所熟悉的加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算根本不同的极限运算作为基本工具。它研究的对象虽然还是函数，但因为研究函数的方法，发生了质的变化，使得先前一些不能解决的数学问题有了解决的可能。

这一章介绍了极限的概念、极限的运算、函数的连续性等微积分学的基础知识。

极限和连续两个概念、求极限的方法是这一章的重点，其中极限概念又是难点。学习这一章，除了要把这些基本概念和有关知识学好，还要掌握用极限来研究问题的思想方法。

下面就这些内容进行一些简要的分析。

1. 极限概念

极限概念是微积分中最基本最重要的概念。微积分中几乎所有的基本概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来定义的。

函数在变化过程中，由于自变量的变化方式有两大类：以离散方式、跳跃地进行变化或连续地进行变化。极限也分为两种类型；数列的极限和函数的极限。从历史上看，研究数列的极限要早，并且前者又是后者的基础。我们先分析数列的极限。

（1）数列的极限

这部分知识有两个要点：数列极限的用“ε—N”语言表述的定义，数列极限的几何意义。

数列极限的教与学是中学数学教学的大难题之一。难在什么地方？一是难在研究的问题由“有限”发展到“无限”；二是难在要用静态的极限定义描述动态的极限过程；三是难在要使同学们从思维的具体性过渡到思维的抽象性。为了突破难点，在学习过程中，要注意以下几点：

①明确“数列的极限”是表述“无限”思想的一个崭新的课题。

数列的极限的观念起源于解决“有限”与“无限”的矛盾问题。人们认识自然界是从“有限”开始，随着生产和科学的发展，又要求大量地解决“无限”的问题。例如人们研究数列时，前 n 项的情况可以一项项地观察，但是当 n 无限增大，即项数无限增多时，数列的情况无法逐项观察出，只能根据有限项的情况去判断。这是和初等数学完全不同的一种崭新的方法，就是“极限方法”。但是由于初学者不熟悉这种方法，在研究数列时，还想追究或找出无限项 a_1，a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1}，…，a_{n+m}，…的“尽头”或“最后”一项。这就会对极限概念的理解走入歧途；因无限是没有尽头或最后的。这种想法来自考虑有限的思想习惯的束缚。

②数列极限的概念和定义

“数列$\{a_n\}$的极限是 A” 这个概念可以粗略的解释为：“当序数 n 无限增大时，变量 a_n 无限接近于常数 A。”这里我们对用语“无限接近”解释一下：接近是说 a_n 在数轴上所对应的点与 A 所对应点之间，有一个不大的确定的距离，若从数值关系上看，如有 $|a_n-A|<0.01$，即是对一个具体的接近（程度）的表述；无限接近，则既不是一个具体的接近，也不是一系列有限多次（不论怎样多）越来越近的接

近，而是由无限多次具体接近所构成的一个特定的过程。正是因为对这个过程尚未确切说明，所以上述概念是粗略的。（这里，我们没用课本中“无限趋近”的说法，是因为我们感觉，无限趋近、趋近、趋向易于相混。课本后面的叙述中，常用趋近代替无限趋近，与定义中说的“趋近”的意义不同。为了避免发生混淆，我们认为定义中的“趋近”改为“接近”为宜。）总之，接近是过程的一个环节，无限接近、趋向都表述全过程。

书上定义的实质，就是用“ε-N”语言把这个无限接近过程，联系着作为它的条件的另一过程——序数n无限增大的过程，来作出确切的表述。为突出要点可将书上定义简括如下：

任意给定$\varepsilon>0$，如果总存在自然数N，使得当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，就说数列$\{a_n\}$的极限是A。

这个定义还可以用记号表示为：

$$\begin{array}{c} |a_n-A|<\varepsilon \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ n>N \end{array}$$

怎样理解这个定义呢？我们体会，简述定义共有四小段话。首末两小段：“任意给定$\varepsilon>0$，…，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”表明$\{a_n\}$的项与A要多接近有多接近，确切地说，就是达到超越任意提出的（一切有限）接近要求的程度。从而表述了无限（即超越一切有限）接近的确切含意。中间两段话：“如果总存在自然数N，使得当$n>N$时，…”，则是说明上述无限接近过程与其条件，“n无限增大”过程的具体联系：当n在其增大过程中到达由某一N划分的阶段，

$n>N$ 后，能保证 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，即保证$\{a_n\}$对A的接近超越由给定的 ε 而提出的接近要求；同时由于 ε 是任意给定的，所以$|a_n-A|<\varepsilon$就更代表超越任意提出的接近要求，即是无限接近，如果对任意给定的 ε 总存在保证上述要求的 N，则说明$\{a_n\}$对A 的无限接近是有保证的，即$\{a_n\}$以 A 为极限。

以上是对定义的主要思想内容的分析．为精确地理解这些思想，还须要对关键字词和符号作仔细的分析．首先$|a_n-A|<\varepsilon$ 中的“$<$”号，表述前面分析中超越一词，若改用“$=$”则表述达到而并未超越，不超越（一切）有限，就不是无限．其次，“不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”中的恒字，是指对于一切a_{N+1}，a_{N+2}，…，等，不等式都无例外的成立，这才叫做$\{a_n\}$对A 的接近．再次“任意给定$\varepsilon>0$，如果总存在自然数N，…”两句话中，“任意给定”与“总存在”相呼应，是说明对任意提出的接近要求都有相应的N作保证，才使得$\{a_n\}$对A的无限接近成立．

要再深入一步理解定义，还要对定义中的常数ε、N，和变数 n、a_n 及它们之间的一切关系进行分析．

1° ε 是常数，又是任意常数．它是常数，才能通过它提出具体的接近要求；它又是任意常数，才又能通过它提出任意的接近要求．

2° N 是常数，又是与ε相应的常数．是先给定ε，然后看相应的N是否存在．那么对于可以任意给定的 ε，就须看是否总有相应的N存在．

3° 常数 ε 与变数 a_n 通过不等式$|a_n-A|<\varepsilon$ 相联系，ε起了限定$\{a_n\}$与A 的接近程度的作用；常数 N 与变数 n通过不

等式$n>N$相联系，N起了限定n的取值范围，从而划分a_n变化阶段的作用；于是，把联系两个常数和两个变数的两个不等式再联系起来，“当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”就表明由N划出的a_n的变化阶段，来保证由预先给定的ε提出的，$\{a_n\}$对A的接近要求的超越。由于N起的是保证作用，所以对于给定的ε，它不是唯一的；例如，如N能保证不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，显然$N+1$，$N+2$，…，等也都能满足保证该不等式成立的要求。

此外，关于用绝对值不等式$|a_n-A|<\varepsilon$表述$\{a_n\}$对A接近的含意，可参看下面对极限概念作几何解释的部分。

③极限的几何意义

用几何形象来描绘“当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”的含义有助于对它的理解。这句话的描述是：不论开区间$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$多么“小”，一旦取定后，数列$a_n$除有限项$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_N$，外，其余的一切项$a_{N+1}$，$a_{N+2}$，…，$a_{N+m}$，…，全部进入区间，而与变数$a_n$在$A$附近的变化情况无关。如图1—1所示：

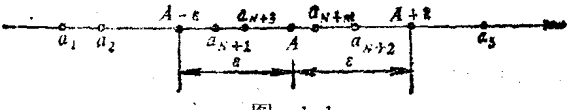


图 1-1

形象地说，我们把$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$比作一个在$A$处任意缩小的口袋，数列$\{a_n\}$的尾巴$a_{N+1}$，$a_{N+2}$，…，$a_{N+m}$，…全部跑进这小口袋不再出来。如果把这种情形称为数列最终地在开区间$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$内，那么$a_n\to A$的几何特征是：不论正数$\varepsilon$如何小，$\{a_n\}$必最终地在开区间$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$内。

④发散数列的两种重要情况。

课本中指出：有极限的数列叫做收敛数列。但是实际情况，还有许多数列没有极限。没有极限的数列叫发散数列。如数列$\{n\}$和$\{n^2\}$都是无限增大而不趋近于任何常数的发散数列。还有一种情况，如数列$\{1+(-1)^n\}$永远在2和0间反复跳动。它的奇数项若单看作一个数列（常数数列）可认为有极限0；偶数项单看作一个数列有极限2，而原数列却没有极限而为发散的。

（2）函数的极限

由于自变数的变化过程的不同，存在着两种不同类型的函数极限。一种是当自变量x的绝对值无限增大，即$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限。另一种类型是x无限接近于常数x_0，即当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限。对这两种类型的函数极限，都未给出精确定义，只要求结合图形和实例，对比数列极限，有个正确的直观的理解。

2. 极限的四则运算法则

运用法则时应注意之点，对数列和函数极限是一样的。以下是数列极限运算法则：

如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么，

Ⅰ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$；

Ⅱ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$；

Ⅲ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$ $(b_n\neq0,\ B\neq0)$。

举例说明在使用时特别要注意各个法则的条件。

（1）“两数列和、差或积的极限等于各数列极限的和、差或积”，只有当两数列各自都有极限时才能成立：如 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-1}$ 就是错误的，因为当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{n-1}$ 的极限都不存在，就不能用法则。正确的作法是 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0.$$

（2）极限的运算法则，仅可以推广到有限个数列。下面又是一个同学们经常出现的错误。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+0+\cdots+0=0.$$

由于当 $n\to\infty$ 时，和 $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$ 有无限多项，上式中第二步是把法则用于无限多项和了。正确作法是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

同样，积的极限运算法则，也是仅可推广到有限个数列