中学数学课程
重点提示与分析

高中一年级用

陈继仁　主编

学　苑　出　版　社

中学数学课程
重点提示与分析

高中一年级　用

陈继仁　主编

王笃君　傅以伟　王汉华　编

学　苑　出　版　社

中学数学课程重点提示与分析 高中一年级用

学 苑 出 版 社 出 版
（北京西四颁赏胡同四号）
地 质 胶 印 厂 印 刷
新 华 书 店 首 都 发 行 所 发 行
开本：787×1092 1/32 印张：5.875 字数：131 千字
1989 年 4 月第 1 版 1989 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—11,800 册

书号：ISBN 7-80060-141-2/G·76 定价：2.25 元

前　　言

为了帮助在校中学生学好各科基础知识，使学生对所学的知识加深理解，启发学生积极思考，我们编写了这套《中学各科课程重点提示与分析》，它是中学在校学生的一套系列课外读物。

这套课外读物是根据国家教委全日制中学各科教学大纲和人民教育出版社新修订的教材，并参考部分省市的教材而编写的。

本书按照基本课程的顺序，对书中的重点进行了深人的分析，并对疑难点做了针对性的提示。以提示、分析的方法，帮助学生加深对课程的理解，每章之后都有一定数量的思考题和答案。

本书由陈继仁主编。王笃君、傅以伟、王汉华、陈继仁参加编写。

编　者

1988 年 12 月

目　　录

一、集合与函数

(一)知识结构

本章主要内容是介绍了集合的概念,集合之间的关系,映射、一一映射、逆映射的概念,在这基础上进一步阐述函数、反函数概念,函数单调性、奇偶性。并具体研究了幂函数、指数函数和对数函数的定义、图象和性质。同时介绍了简单的指数方程和对数方程的解法

(二)重点提示与分析

这章重点包括四部分

其一、集合表示法、集合的关系、映射、一一映射、逆映射的概念、运用映射的观点阐述函数与反函数的概念。

其二、函数单调性、奇偶性的定义　运用定义证明函数单调性、奇偶性、并能求单调区间。

其三、幂、指、对函数定义、图象、性质。

其四、指数方程、对数方程的解法。

1.集合与映射:一组对象的全体就形成一个集合、集合中每一个对象就叫做集合一个元素,若 a 是集合中的元素就说 a 属于集合,若 a 不是集合中的元素,就说成是这元素不属于这集合。属于用"∈"表示,不属于用∉表示。

元素在集合中是个关键问题　它象一条线似的贯穿于集合与映射问题的始终,在集合的表示法中,将集合中的元素一一列举出来的表示法叫列举法,将集合中的元素的属性描述出来的表示法叫描述法,两种方法的区别是对集合中的元素

刻画方式不同，而有集合关系中，若集合 A 的元素都属于集合 B，那么 A 叫做 B 的子集；集合 C 与集合 D 公共元素组成的集合是 C 与 D 的交集；集合 C 与集合 D 中所有元素组成的集合叫做 C 与 D 的并集；不属于集合 C 而属于全集 I 的元素组成的集合叫做 C 的补集；由上述集合的几种关系的定义来看，都是用元素来确定的，所以在学习集合一章，要紧紧围绕元素这个中心来记忆定义、性质，来分析问题。

映射是两集合 A 与 B 中的元素一种对应方式，两给定集合 A、B 按照对应法则 f，在集合 A 中的任一个元素在 B 中都有唯一的元素与它对应，这样的对应（包括集合 A、B 对应法则 f）就是从 A 到 B 的映射；集合 B 中的元素叫做集合 A 中的元素的象，A 中的元素叫原象；如果集合 B 中的每个元素在集合 A 中都有原象，这样的映射叫做从 A 到 B 上的映射，如果 B 中的元素至少有一个元素在 A 中没有原象，这样的映射叫做 A 到 B 内的映射；一一映射是 A 到 B 的映射满足 A 中的元素不同时，在 B 中的象也不同，且 B 中的每个元素在 A 中都有原象，这样的映射叫从 A 到 B 的一一映射；如果集合 A 到 B 是一一映射，对于集合 B 中的每个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样得到的映射就是 $f: A\to B$ 的逆映射，表示成 $f^{-1}: B\to A$。很明显映射 $f: A\to B$ 与映射 $f^{-1}: B\to A$ 是互为逆映射的。

例： 全集 $I=Z$，$A=\{x=2k+1,\ k\in z\}$，$B=\{x\,|\,x=4k+1,\ k\in z\}$，$C=\{x\,|\,x=4k-1,\ k\in z\}$

求 A 与 B 的关系； A 与 $B\cup C$ 的关系；

$\overline{A}\cup C$ 与 $\overline{B}$ 关系

解： A 是奇数集合，A 中元素被 4 除时余数是 1 或 3；B 中元素是被 4 除，余数为 1 的整数，$\therefore B\subset A$，也可设集合 A

中元素 $x=2k+1$ 中的 $k=2m(m\in z)$ 则 $x=4m+1$ 与 B 中元素相同，∵K 也可是奇数，∴B⊂A.

C 集合中元素是被 4 除余数是 3 的整数，∴$C\cup B=A$

全集为整数集合∴$\overline{A}$ 是偶数集，$\overline{A}\cup C$ 是由偶数及被 4 除余数为 3 的奇数为元素组成的集合；$\overline{B}$ 是由被 4 除余数为 3 的奇数和偶数为元素组成的集合.∴$\overline{A}\cup C=\overline{B}$

例： 全集 $I=R$，$A=\{x\mid x^2-4<0\}$ $B=\{x\mid x^2-3x>0\}$

求 $A\cup B$ $A\cap B$ $\overline{A}\cap B$

分析：求一元不等式形式的集合的并集和交集用数轴来解较直观.

解： $A=\{x\mid x^2-4<0\}=\{x\mid -2<x<2\}$

$B=\{x\mid x^2-3x>0\}=\{x\mid x>3$ 或 $x<0\}$

这两个集合表示在数轴上：

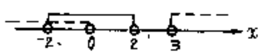

图 1—1

实线所复盖的实数是集合 A 的元素，虚线所复盖的实数是集合 B 的元素 并要注意 $O\in A$，$-2\in B$ ∴可得，$A\cup B=\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$；而 $A\cap B$ 则是实线与虚线共同复盖的实数，∴$A\cap B=\{x\mid -2<x<0\}$；

$\overline{A}=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$ 画数轴可得出，$\overline{A}\cap B=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$。

例： 假设 $x\in A$，$y\in B$ 下列各对应是否为映射；是否为一一映射

(1) f_1：$x\to y=2x+1$ $A=B=Z$

(2) $f_2: x \to y = 2x^2$　　$A = B = R$

(3) $f_3: x \to y = \frac{1}{x}$　　$A = B = R$

(4) $f_4: x \to y = x - 5$　　$A = B = N$

(5) $f_5: x \to y = \sqrt{x}$　　$A = R^+$，$B = R$

(6) $f_6: x \to y^2 = x$　　$A = R^+$；$B = R$

解:

(1)根据对应法则 f_1，A 中的每个元素在 B 中都有唯一的元素与它对应，∴ f_1 是从 A 到 B 的映射，但 B 中的偶数元素在 A 中没有原象，所以不是一一映射。

(2)根据对应法则 f_2　A 中每个元素在 B 中都有唯一的象　∴ $f_2: A \to B$ 是映射，但 A 中的元素取 x_1 与 $-x_1$ 时在 B 中有相同的象，所以不是一一映射。

(3)根据对应法则 f_3　集合 A 中元素 O 在 B 中没有对应元素，∴不是映射。

(4)根据对应法则 f_4，集合 A 中元素 1、2、3、4、5 在集合 B 中没有对应元素∴不是映射。

(5)根据对应法则 f_5　集合 A 中每个元素在 B 中都有唯一元素与它对应，∴是映射。但 B 中负实数在 A 中没原象，∴不是一一映射。

(6)根据对应法则 $f_6: x \to y^2 = x$ 即 $y = \pm\sqrt{x}$，在 A 中除元素 O 以外，其它元素在 B 中都有两个不同元素与其对应 ∴ f_6 不是映射。

例：集合 $A = \{x | x \in R\}$　集合 $B = \{x | x \in R\}$，映射 $f: A \to B$，的对应法则是一次函数，且 A 中的元素 1.4 与 B 中 -2，7 分别相对应　求：映射 $f: A \to B$，并说明它是否为一一映射；若是一一映射求出它的逆映射。

解:设映射 $f:A\to B$ 为 $f:x\to y=kx+b(k\neq 0\quad k,b\in$ 常数),把

$$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$$

代入 $y=kx+b$ 可求得

$$\begin{cases}k=3\\b=-5\end{cases}$$

$\therefore f:A\to B$ 是 $f:x\to y=3x-5$。

根据对应法则 f,在 A 中每个元素 $x\in R$ 在 B 中都有唯一的象 $y\in R$ $\therefore f:x\to y=3x-5$ 是映射。又$\because$ x 不同时 B 中的象不同,且 B 中每个元素 y 在 A 中都有原象 $\therefore f:x\to y=3x-5$ 是一一映射 它的逆映射是 $f^{-1}:y\to x=\dfrac{y+5}{3}$ 其中 $y\in R,x\in R$。

2. 函数定义和性质

(1)函数的定义:在一个变化过程中有两变量 x,y,对于 x 在某个范围内的每一个确定的值,按照对应法则,y 都有唯一的值与它对应,那么 y 就叫做 x 的函数 记成 $y=f(x)$,x 叫做自变量,自变量 x 的取值范围叫做函数 y 的定义域,和 x 相对应的 y 值叫做函数值,函数值所组成的集合叫做值域。

由映射观点来看函数,当集合 X、Y 都是非空集合 且集合 Y 中每个元素在集合 X 中都有原象 x,这样的映射 $f:X\to Y$ 就是由定义域 X 到值域 Y 上的函数。$\therefore$函数是一种从 X 集合到 Y 集合上的映射的特殊集合(它是数集到数集上的映

射）。

一个函数是由三部分组成的：定义域、值域和对应法则这三部分相同的函数是相同的函数。

(2)定义域及求法：

考虑函数定义域时应首先注意研究对象，在实际应用题中要根据具体问题来确定函数的定义域。

如果研究的只是抽象的函数关系的解析式，并不是实际问题也没有特殊规定，这时常见的求定义域的方法有下列一些情况

①当函数是整式时，它的定义域是一切实数，如 $y=3x+4$ $y=2x^2+3x-1$ 等。

②当函数解析式是分式时，它的定义域是分母不等于0，例如：$y=\frac{x+3}{x-1}$ 定义域是 $x\neq 1$ 的实数。

③当函数解析式是偶次根式时，它的定义域是被开方式应非负（即是大于或等于零）例如 $y=\sqrt[4]{x-1}$ 定义域是 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$ 的实数。

④当函数解析式是对数式时，它的定义域是真数大于零，底数大于零且不等于1，例如：$y=\log_x(x-3)$，定义域是

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x-3>0 \end{cases}$$

即 $x>3$ 的实数。

⑤当函数解析式是正切或余切函数时，若是 $y=tgx$，$y=secx$ 定义域是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in z)$ 若是 $y=ctgx$，$y=csex$ 定义域是 $x\neq k\pi$ $(k\in Z)$

⑥当函数解析式是反正弦或反余弦函数时，$y=are\ sinx$，或

$y=\text{arc}\cos x$ 定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的实数。

⑦当函数解析式是 $y=x^0$ 其定义域是 $x\neq 0$

当函数解析式是负指数或是分母是偶数的分指数时可按照分式或偶次根式的方法求定义域。

若解析式是由几个简单函数式子组成的或是几个简单函数式复合而成的，求定义域时一般是用解不等式组的方法来解决。

例： 求下列函数的定义域

(1)$y=\sqrt{|x-2|-3}+\dfrac{1}{\sqrt{7-3x}}$ (2)$y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x+2}}+\dfrac{\lg(5-x)}{x-3}$

(3)$y=\text{arc}\sin\dfrac{2|x|}{1+x^2}$ (4) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$

解：

(1) $\begin{cases}|x-2|-3\geqslant 0\\ 7-3x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 5\\ x<\dfrac{7}{3}\end{cases}$

定义域是 $x\leqslant -1$ 的实数。

(2)$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ x+2\neq 0\\ x-3\neq 0\\ 5-x>0\end{cases}$ 定义域是 $2\leqslant x<5$ 且 $x\neq 3$ 的实数

(3) $-1 \leqslant \frac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$ $\because \frac{2|x|}{1+x^2} \geqslant 0$

$\therefore$ 只解$\frac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$

即 $\frac{1+x^2-2|x|}{1+x^2} \geqslant 0$ $\frac{(|x|-1)^2}{1+x^2} \geqslant 0$

解是一切实数

∴定义域是一切实数

(4) $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ |x|-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x|>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x<0 \end{cases}$ 解是 $x<0$

且 $x \neq -1$ ∴定义域是 $x<0$ 且 $x \neq -1$ 的实数。

(3)关于函数符号“f”的几个问题

①函数值的求法

函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 时的函数值用 $f(x_0)$ 来表示即用 x_0 代换原来函数式中的 x，x_0 应属于定义域。

例： 已知 $f(x)=3x+2$,求 $f(0)$ $f(-2)$ $f[f(x)]$

解： $f(0)=3\times 0+2=2$

$f(-2)=3(-2)+2=-4$

$f[f(x)]=3f(x)+2=3(3x+2)+2=9x+8$

②已知 $f[\varphi(x)]$求 $f(x)$类型题的一般解法

例： 已知 $f(\frac{1}{x})=x^2+3$ 求 $f(x)$

解： 利用换元法可解 设 $\frac{1}{x}=t$ $(t\neq 0)$则 $x=\frac{1}{t}$

$f(t)=(\frac{1}{t})^2+3$ $\therefore f(t)=\frac{1}{t^2}+3=\frac{3t^2+1}{t^2}$

即 $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}$

还可以利用构造法　$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{\frac{1}{x^2}}+3=\frac{1}{(\frac{1}{x})^2}+3$

$\therefore f(t)=\frac{1}{t^2}+3=\frac{3t^2+1}{t^2}$

$\therefore f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}$

③关于函数符号 f 表示的运算

已知　$f(x+y)=f(x)+f(y)$对任意实数 x、y 都成立，求证：(1)$f(0)=0$　(2)$f(-x)=-f(x)$　(3)$f(2x)=2f(x)$　(4)$f(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}f(x)$

证明：

(1)$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$　$\therefore f(0)=2f(0)$

$\therefore f(0)=0$

(2)$f(x-x)=f(0)=0, f(x-x)=f(x)+f(-x)$,

$\therefore f(x)+f(-x)=0$　即 $f(-x)=-f(x)$

(3)$f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

(4)$f(x)=f(2\cdot\frac{1}{2}x)=2f(\frac{1}{2}x)$　$\therefore f(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}f(x)$

例：　各举一例使其满足下列函数 f(x)的条件

$x\in R$,(1)　$f(x)=-f(-x)$　　(2)　$f(x+1)=f(x)+3$

(3)　$f(x+1)=3f(x)$　　(4)　$f(x)+f(-x)=2$

解：

(1)$f(x)=-f(-x)$　就是　$f(-x)=-f(x)$　$\therefore f(x)$是奇函数，例如 $y=3x$。

(2)$f(x+1)=f(x)+3$　$x\in R$. $\therefore f(x+1)-f(x)=3$. 当 $x\in N$ 时，可看成是 $a_{n+1}-a_n=3$　则 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，$\because N\subset R\therefore$可以举 $y=3x+b$ 为例；

(3)$f(x+1)=3f(x), x\subset R$；当 $x\in N$ 时，可看 f(x)是 a_n

(数列的第 n 项)则 $f(x+1)=a_{n+1}$.那么原式可看成 $a_{n+1}=3a_n$ ∴$\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列。∴f(x)可举 $y=c\cdot 3^{x-1}$ 为例;

(4)∵函数 g(x)为奇函数 则 $g(x)+g(-x)=0$; 设 $f(x)=g(x)+1$ 必有 $f(x)+f(-x)=g(x)+g(-x)+1+1=2$,∴可以举 f(x)等于一个奇函数加上 1。∴$f(x)=\sin x+1$ 为例即可;

(4)值域的一些求法

求函数的值域是较困难的问题,在中学数学中;求函数值域

①求反函数的定义域

由函数 $y=f(x)$解得反函数 $x=f^{-1}(y)$,求 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域,也就确定了 $y=f(x)$的值域。这种方法常用于分子、分母为一次整式的分式函数。

例: 求 $y=\dfrac{x+3}{x-5}$的值域。

解: $xy-5y=x+3$, $x(y-1)=5y+3$ ∴ $x=\dfrac{5y+3}{y-1}$ ∵$x=\dfrac{5y+3}{y-1}$定义域是 $y\neq 1$ ∴原函数的值域是 $y\neq 1$;这样的分式求值域还可用将分式分成常数加上一个只有分母含有自变量的分式,再求值域。∵ $y=\dfrac{x+3}{x-5}=\dfrac{x-5}{x-5}+\dfrac{8}{x-5}=1+\dfrac{8}{x-5}$ ∵$\dfrac{8}{x-5}\neq 0$ ∴$1+\dfrac{8}{x-5}\neq 1$.

∴值域是 $y\neq 1$, 由这种方法可以推得 $y=\dfrac{mx+a}{nx+b}$ (m、n、a、b 是常数,且 m,n 不是 o),则函数值域是;$y\neq\dfrac{m}{n}$。

②利用换元的方法。

求 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域。

解:设 $\sqrt{1-2x}=t\quad t\geqslant 0\quad 1-2x=t^2\quad x=\frac{1-t^2}{2}$

原函数可化成 $y=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$ 当 $t=1$ 时 y 最大值是 1, $\therefore y\leqslant 1$, $\therefore$ 函数值域是 $y\leqslant 1$。

若原题改成 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 求值域,可用 $y-x=\sqrt{2x-1}$, $\therefore y-x\geqslant 0$ $\therefore$ 定义域是 $x\geqslant\frac{1}{2}$。 $\therefore$ 值域是 $y\geqslant\frac{1}{2}$

求 $y=\sqrt{x^2+4}$ 值域

解: 设 $x^2+4=t$, $\therefore t\geqslant 4\quad y=\sqrt{t}\quad\therefore y\geqslant 2$

说明:当复合函数中含有二次函数时,往往给解题带来困难,设二次函数为 t,可达到化整为零的目的,使解题思路清晰。

③利用判别式求值域

它主要用来求二次函数的值域,例如求 $y=ax^2+bx+c$ 的值域,把原来函数化成 $ax^2+bx+c-y=0$ $\because x$ 是实数,$\therefore$ 关于 x 的二次方程必有实数根,$\therefore b^2-4ac+4ay\geqslant 0$。因此,当 $a>0$ 时,$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$;而当 $a<0$ 时,$y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$。

④利用函数图象求值域

这种方法是根据函数的单调性、极值。定义域等性质确定函数的图象。然后根据图象确定函数的值域。

例: 求 $y=\frac{1}{1-x^2}$ 的值域

解: 讨论图象,根据定义域可知 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

在定义域各部分讨论函数的性质

当 $x<-1$ 时，y 由 0（不包括 0）减少到负无穷；

当 $-1<x<1$ 时，y 由正无穷减少到 1，又由 1 增加到正无穷；

当 $x>1$ 时，y 由负无穷增加到 0；

根据以上的讨论画出图象。如下

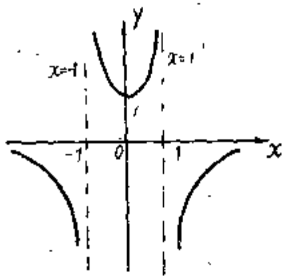

图 1—2

在画图象时，找出图象渐近线，对完成图象草图很重要的，它的方法是，由定义域可知 $x\neq\pm1$，那么就可得出，$x=1$ 和 $x=-1$，两直线是图象的渐近线，又可观察出 $y\neq0$，那么 $y=0$ 必是渐近线。

根据图象可看出值域是 $y\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$；

(5)函数的性质

①单调性

在定义域内某一个区间上，如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1,x_2 且当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 那么函数 $f(x)$ 在这个区间的是增函数；如果对于定义域内某一区间内任意的 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在这区间上是减函数；

这是函数单调性的定义，要注意到函数单调性是说在一