初中三年级

几何问答

JI HE WEN DA

江苏少年儿童出版社

初中三年级

儿何问答

王永建　　　　主编
张名振　赵嘉福　编写

江苏少年儿童出版社

初中三年级
几何问答

王永健 主编
张名振 赵嘉福 编写

江苏少年儿童出版社出版

江苏省新华书店发行 淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 3.5 字数 80,000

1985 年 7 月第 1 版 1985 年 7 月第 1 次印刷

印 数 1-210,000 册

书号：R7352·085 定价：0.52 元

目　录

第六章　相 似 形

1．本章学习哪些内容？

答：本章学习的主要内容是相似三角形的判定与性质和直角三角形中成比例的线段．学习相似形必须先学习线段的比和成比例的线段等基础知识，然后证得平行线分线段成比例定理，这是相似形理论中的基本定理，它的推论是证明判定三角形相似的预备定理的主要根据，由“预备定理”可证得三角形相似的三条判定定理．学习直角三角形中成比例的线段，首先要掌握点和线段在直线上的正射影．

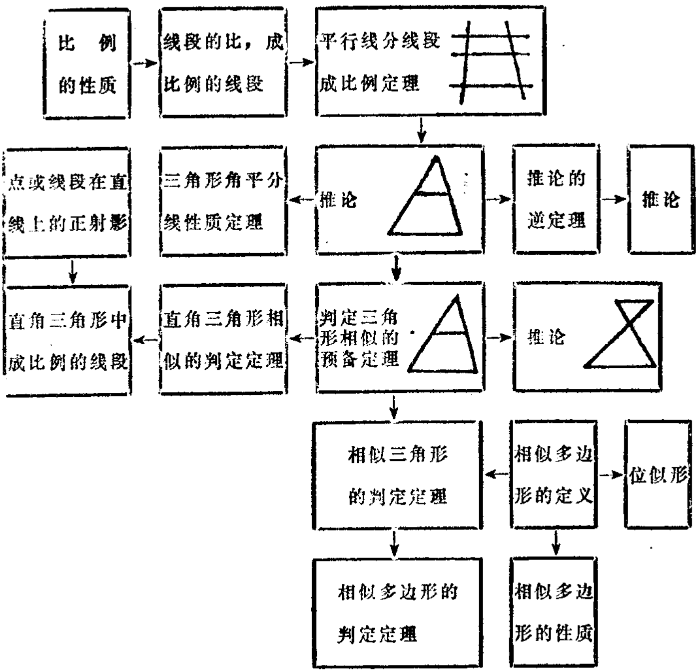

图 6-1

几何知识的系统性很强，基础知识之间、定理之间是有序地联系在一起的。本章主要内容之间的联系可以用图6-1来反映。其中“↓”和“→”的正向表示由甲知识（或甲定理）可以得到乙知识（或证得乙定理成立）；“→”的逆向表示学习乙知识（或证明乙定理）需要用到甲知识（或甲定理）。

2．怎样度量一条线段？

答：度量线段需要有量具。常用的量具有米尺、市尺。米尺有木制的直尺、皮卷尺、钢卷尺，还有用于大范围内测量的测绳。米尺的主单位是米（用英文 metre 的头一个字母m表示），这是国际公制长度单位，比米大的单位有十米、百米、公里(千米)，比米小的单位有分米、厘米、毫米、丝米、忽米、微米，相邻单位间的进率都是10．1959年6月25日，国务院发布了《统一计量制度的命令》，其中规定：国际公制为我国的基本计量制度。

用量具度量线段就得到一个量数，这是一个正实数．为什么是个正实数呢？我们以米作度量单位举例说明．线段 AB 用1米的长度单位来度量，量3次剩余 CB（图6-2），3就是量数的整数部分，CB 不足1米就用1米的十分之一（即分米）作为长度单位度量，得到一个量数，例如7，这是十分位上的数字．这时就可能有两种情况出现，一种是恰好量尽无剩余，那么量数就是3.7；另一种是量不尽，仍有剩余，可再用十分之一分米（即厘米）作为长度单位继续度量，如此继续下去，如进行到有限次时出现无剩余，则所得的量数就是一个正的有理数，如无限地进行下去，总有剩余，这时如得到无限不循环小数，量数即为正的无理数，如得到无限循环

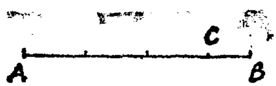

图6-2

小数，则量数为正有理数，因此，线段的量数总是一个正实数。

线段的量数是不带单位的，对于同一条线段，长度单位不同所得到的量数也不同，它不表示线段的长度。量数后面加上单位就表示线段的长度了，"量数"和"长度"是两个不同的概念，不能混淆。如果你说绳子的长度是8，人们听了会感到莫名其妙，因为是8米还是8寸不清楚。

同一条线段的长度由于所用的长度单位不同，所得到的量数不同，但加上单位以后它们就相等了，因为可以通过单位之间的换算关系互相转化。

3．"线段的比"与"成比例的线段"一样吗？

答：这是两个既有联系又有区别的概念。所谓"线段的比"是用同一个长度单位度量两条线段所得量数的比。特别要注意"同一个长度单位"这几个字，用不同的长度单位度量线段所得的量数之比不叫做这两条线段的比。因为线段的量数是正实数，所以"线段的比"就是两个正实数之比，比值仍然是正实数。例如线段$AB=3.5$尺，$CD=7$尺，那么$AB:CD=3.5:7=1:2=0.5$。

符号"："叫做比号，3.5叫做比的前项，7叫做比的后项，0.5叫做比值。比还可以用分式表示，$\frac{AB}{CD}=\frac{3.5}{7}=\frac{1}{2}=0.5$。由分式的基本性质可知，分子和分母的单位正好约去，因此，比值是个不带单位的数。如果改用寸或米作为长度单位来度量线段AB和CD，所得的比值仍然是0.5，这就是说两条线段的比与所采用的长度单位是没有关系的，只要两条线段用同一个长度单位来度量，比值是不会改变的。还要注意"线段的比"是对两条线段而言的，一条线段、三条

线段都不能讲它们的比。

成比例的线段是指四条线段中某两条线段的比等于另两条线段的比，四条线段中可以有两条线段相同。可见．称为成比例的线段必须是四条或三条，两条或五条线段都不能成比例。

4．怎样确定比例的内、外项和第四比例项？

答：比例的内、外项和第四比例项是由项在比例式中的位置来确定的，而项的位置不是一成不变的，例如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，式中的a、d叫做比例外项，b、c叫做比例内项，d叫做线段a、b、c的第四比例项。由更比定理得$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$，这时线段a成了线段d、b、c的第四比例项了。再用反比定理得$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$，这时线段c叫做线段b、d、a的第四比例项，线段b、c是外项，a、d是内项。由此可见，所谓比例的内、外项，第四比例项不是绝对的，而是相对的，可变的。在有关线段成比例的计算题和作图题中，常常把未知线段放在第四比例项的位置．

5．怎样证明关于比例的定理？

答：比例定理的证明，课本用了两个常用的证明方法，第一个方法是“+1或-1”法，如合、分比定理就是用此法证明的．我们知道等式的性质：等式两边加（或减）同一个数（或式子），等式仍然成立。

由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Longrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$得到了一个新的比例式，其中两个比的前项分别是前项与后项的和（或差）。在证明有关比例的等式时常常用这个方法来制造新

的比例式，从而使要证明的问题获解。

第二个方法是证明等比定理时，设比值为 k 的方法，它可以使比的前项用比的后项与 k 的乘积来表示，使问题得到解决。当已知条件含有连比的式子时，一般设比值为常数 k，进而达到消元的目的。

例如，已知 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$　求 $\frac{x+y+z}{x-y-z}$

解：设 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}=k$

则　$x=4k$，$y=5k$，$z=6k$

$$\therefore\quad \frac{x+y+z}{x-y-z}=\frac{4k+5k+6k}{4k-5k-6k}=\frac{15k}{-7k}=-\frac{15}{7}.$$

6．怎样证明"平行线分线段成比例定理"？

答：课本对于这个定理的证明依据是平行线等分线段定理，还要用到两条线段的比是用同一长度单位度量这两条线段所得量数的比。量数是正实数，两个正实数的比仍然是正实数。定理的证明过程分量数是有理数和无理数的情况进行，而对无理数的情况要用到极限的知识，因此在目前是不可能严格证明的。现在我们介绍一种应用面积定理的证明方法。

已知：如图 6-3，平行线 l_1、l_2、l_3 分别截直线 a 和 b 于 A、B、C 和 D、E、F。

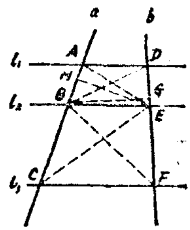

图 6-3

求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

证明：连结 AE、CE、BD、BF，

作 $EH\perp a$，H 是垂足，

作 $BG\perp b$，G 是垂足。

$$\because \quad S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BED},$$
$$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BFE},$$
$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BFE}}$$
$$\because \quad S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}EH\cdot AB,\ S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}BG\cdot DE,$$
$$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}EH\cdot BC,\ S_{\triangle BFE}=\frac{1}{2}BG\cdot EF,$$
$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{\frac{1}{2}EH\cdot AB}{\frac{1}{2}EH\cdot BC},\ \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BFE}}=\frac{\frac{1}{2}BG\cdot DE}{\frac{1}{2}BG\cdot EF}.$$
$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

这种证法用到“等底等高的三角形面积相等”，“高相同的两个三角形面积之比等于它们底边之比”，证明过程简捷且严密。

对本定理的结论$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$运用更比定理或反比定理可得到不同的表达形式：$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，$\frac{EF}{BC}=\frac{DE}{AB}$，$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{DE}$，这些比例式中的的任意两个式子都是等价的，任何一个都可以作为本定理的结论。

定理的结论说“所得的四条线段对应成比例”，怎样理解“对应”的含义呢？要借助于图形的直观。直线 a 上的线段 AB，在直线 b 上的对应线段是 DE，a 上的 BC 在 b 上的对应线段是 EF，反之亦然。对应线段是夹在相同的两条行平线之间的线段。这些成对的对应线段在比例式中或横向对

应，如$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$；或纵向对应，如$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$。掌握了对应关系就可以根据需要写出本定理的结论（比例式）。

7．怎样得到“平行线分线段成比例定理”的推论？

答：一个定理的推论也是一个定理，它的作用一点不比定理本身小，有时推论的应用还比定理更多些，我们绝不可忽视推论，更不能把推论看得比定理低一等。推论是由某个定理经过推导而得出的结论，是在定理的证明过程中得到的“附产品”。

平行线分线段成比例定理的推论是定理的图形变化成图6-4，直线b、直线a和直线l_1相交于A点，ACF成三角形，直线l_2平行于$\triangle ACF$的一边CF，截其他两边AC、AF于B、E两点，所得线段对应成比例：

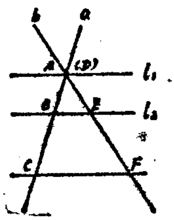

图 6-4

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}\text{或}\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$$

这就是推论的前半截：“平行于三角形一边的直线截其他两边，所得线段对应成比例。”对上列两个比例式运用合比定理，得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{EF}\text{或}\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AE}.$$

这就得到推论的后半截：“其中的一边和这边上截得的线段以及另一边和另一边上截得的对应线段成比例。”这个推论的文字较多，叙述和记忆比较困难，克服这个难点的办法是理解三条平行线截得哪四条线段，这四条线段是怎样对应的，再借助于图形的直观，寓图于脑，边思考图形边叙述，就不难正确地表达这个推论了。

如图 6-5，推论可以用符号简捷地表达出来：

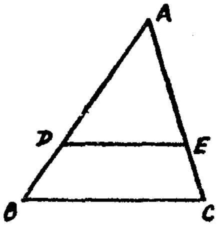

图 6-5

$$\triangle ABC\text{ 中 } DE\parallel BC\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}\\[2mm]\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}\\[2mm]\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}\\[2mm]\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}\end{cases}$$

这四个比例式是等价的，由其中任意一个比例式成立可以推得其余三个比例式同时成立。当我们正确理解了“对应线段”的含义后，这个推论可以简要地表述为：“平行于三角形一边的直线截其他两边，截得的对应线段成比例。”

8. 什么叫做同一法？

答：同一法是一种间接证法。论证一个命题能否应用同一法，取决于这个命题是否符合同一原理。如果一个命题的条件和结论都是唯一存在的，它们所指的概念是同一概念时，这个命题一定和它的某一个逆命题等效，称此命题符合同一原理。当一个命题符合同一原理又不容易直接证明时，就可以应用同一法证明它的逆命题为真，只要逆命题正确，这个命题就正确了。

例如课本上的定理：如果一条直线截三角形的两边所得的线段对应成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。这是由四条线段成比例欲推出两条直线平行，用已有的证明平行线的方法不能解决问题，所以采用同一法来证明。首先检查它是否符合同一原理。如图 6-6，使

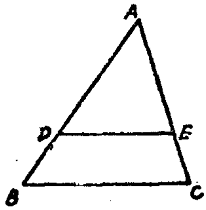

图 6-6

命题的条件$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$成立的直线$DE$是唯一的，命题的结论是$DE\parallel BC$，这里的$DE$与条件中的$DE$是同一条直线，符合同一原理。

用同一法证明时，一般分下面四个步骤：

（1）作出符合命题结论的图形；

（2）证明所作图形符合命题的条件；

（3）根据唯一性，确定所作图形就是原命题的图形；

（4）由于所作图形具有原命题的结论的性质，所以原命题的结论成立。

请读者对照这四个步骤分析课本上述定理的证明过程。

对于一个命题的条件和结论都"唯一存在"应当有正确的理解，不要把命题的条件和结论只包含一个条件，误认为是一个符合同一原理的命题。"唯一存在"是指具有某种性质的图形而言，即条件和结论所指的概念是同一个概念。例如"等腰三角形顶角的平分线是底边上的中线和高。"如图6-7，这个命题的条件有两项：（1）$\triangle ABC$的$AB=AC$；（2）AD平分$\angle BAC$，结论也有两项：（1）$AD\perp BC$；（2）AD平分BC。因为等腰三角形顶角的平分线，即条件（2）是唯一存在的，底边上的中线和高也都是唯一存在的，所以命题符合同一原理。取一项结论与条件（2）交换得到的两个逆命题都与原命题同真假。因此，这个命题可用同一法证明，请读者试证。

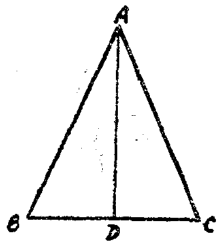

图 6-7

怎样证明两个图形是同一个，要依赖于原命题的条件，

也就是要证明所作的图形符合原命题条件，实际上是证明了原命题的逆命题成立。由于原命题的条件与结论是唯一的，所以逆命题成立，原命题也成立。

同一法也是一种间接证法，实质上是证明了原命题的逆命题成立，而反证法是证明逆否命题成立。**凡能用同一法证明的命题都能用反证法证明，反之则不然。**

9．"三角形内角平分线性质定理"的证法是怎样想到的？

答：三角形有三条内角平分线，每一条角平分线都具有这个性质，即如图 6-8，在$\triangle ABC$中，AD、BE、CF是三条角平分线，那么

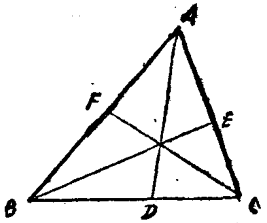

图 6-8

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB},$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}.$$

证明这个定理，只要证明其中的一个比例式成立，其余两个比例式同法可证。

这个定理的证明关键在于如何想到添作这条辅助线："过点C作$CE\parallel DA$，交BA的延长线于E（图 6-9）。"课本上是这样分析的，为了证明$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，我们先作出$BD$、$DC$、$BA$的第四比例项$AE$，再证明$AC=AE$就可以了。为什么

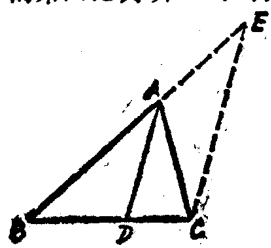

图 6-9

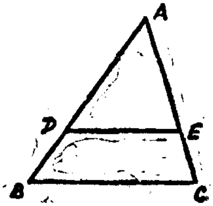

图 6-10

想到作第四比例项呢？又是根据平行线分线段成比例定理的推论，由图 6-10 这个基本图形可知，四条线段 AD、DB、AE、EC 分别在两条直线 AB、AC 上，由此可见，要得到四条线段成比例，就需要这四条线段分布在两条相交直线上，且要有过线段端点的平行线，因而想到课本上添作辅助线的方法。根据这样的分析，当然也可以过 B 点作 AD 的平行线 BF，与 CA 的延长线交于 F，如图6-11。证法与课本是一样的，只是添辅助线的方法不同。

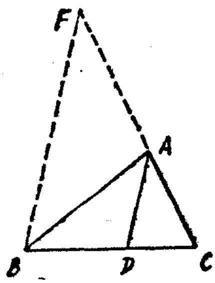

图 6-11

现在介绍证明本定理的另外两种方法。对照基本图形(图 5-10)，在本定理已知的$\triangle ABC$中，要证明$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$BD$ 与 DC 在三角形的同一边 BC 上，另两条线段是三角形的另外两边，若过 D 点作 $DG \parallel AC$，交 AB 于 G(图 6-12)，则得到$\frac{BD}{DC}=\frac{BG}{GA}$，如能证明$\frac{BG}{GA}=\frac{AB}{AC}$问题就解决了。

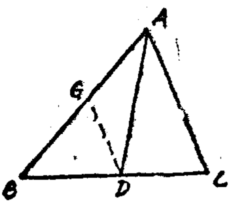

图 6-12

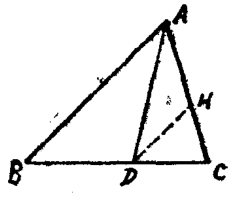

图 6-13

由 $DG \parallel AC$ 及 AD 平分 $\angle BAC$ 容易推得 $DG=AG$，则得

$\frac{BG}{GA}=\frac{BG}{GD}$，根据相似三角形的预备定理，由 $DG \parallel AC$ 得 $\triangle GBD \backsim \triangle ABC$，则 $\frac{BG}{GD}=\frac{AB}{AC}$，定理得证。也可以过 D 作 $DH \parallel AB$，交 AC 于 H（图 6-13），这实质是同一种证明方法，仅仅是辅助线的画法不同。

第三种证法是对照三角形相似的基本图形（图 6-14）想到这样添作辅助线：过 C 点作 $CL \parallel AB$，交 AD 的延长线于 L（图 6-15），得 $\triangle ABD \backsim \triangle DLC$，$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{CL}$，$\because \triangle ALC$ 是等腰三角形，$\therefore CL=AC$，定理得证。也可以过 B 点作 AC 的平行线，同样使定理得证。

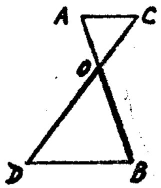

图 6-14

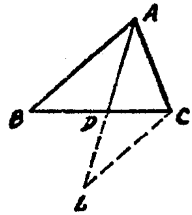

图 6-15

这两种方法都要用到相似三角形的判定和性质定理。归纳这个定理的三种证法（六种添作辅助线的方法）使我们得到一个启发，把需要证明的命题的图形与已学过的定理的基本图形进行比较，通过添作辅助线"搭桥"，使命题的图形向基本图形靠拢，从而应用已学过的定理使命题得证，这种分析思考的方法有利于寻求辅助线的作法和找到命题的正确证法。

10．三角形内角平分线性质定理有没有逆定理？

答：平行线分线段成比例定理及其推论告诉我们由平行

线可推得四条线段成比例，它们的逆定理则是由四条线段成比例可得到两直线平行．三角形内角平分线定理是由三角形的内角平分线得到四条线段成比例．它的逆命题应该是在三角形中，由四条线段成比例得到三角形的角平分线，即用来判定三角形的角平分线，这个逆命题是课本中的一道习题：

如图 6-16，$\triangle ABC$中，D为BC边上的一点，已知：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$．

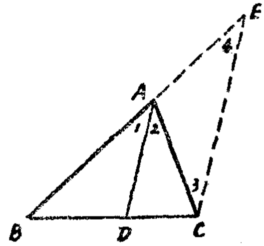

图 6-16

求证：AD平分$\angle BAC$．

分析：要证AD平分$\angle BAC$，就是要证$\angle 1=\angle 2$，用过去证角相等的办法，如全等三角形的性质，角平分线的有关定理是不能解决这个新问题的，因为命题的条件是四条线段成比例，成比例的线段与平行线有关，平行线与角相等有关，再对照基本图形（图 6-10）从而想到作平行线，过C点作$CE\parallel AB$，交BA的延长线于E，则$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$，$\because\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\therefore AE=AC$，则$\angle 3=\angle 4$，容易推得$\angle 1=\angle 2$．

以上证明中添作辅助线的方法与原命题相同，但证明的根据截然不同．这道习题有三种证法，辅助线有六种添法，请读者自证．

还可以用"同一法"证明这个题目．首先检查命题的条件与结论所指的对象是否唯一，$\triangle ABC$中，因为三边的长度是确定的，$\frac{AB}{AC}$的比值是确定的，所以使$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$的$D$点