普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

向量及其应用

严士健 主编
张惠英 王中怀
王培甫 张金兰 编著

高等教育出版社

普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

向量及其应用

严士健　主编
张惠英　王申怀
王培甫　张金兰　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是配合《普通高中数学课程标准（实验）》的实施而编写的，侧重于为实施新课程的教师提供与课程标准的理念、处理方法相匹配的数学教学资源，进而向教师提供专业知识、方法的补充资源，目的是帮助教师掌握课程标准中的相关内容，更好地理解和处理新课程的教学。

本书分标准要求、知识结构，教学建议、教学案例及点评等栏目，内容包括：向量产生的历史背景与教育价值、平面向量、空间向量、向量方法在数学诸分科及物理中的应用、向量知识的深化与提高。

本书既可作为教师的培训用书，也可作为教师日常教学的参考书，希望还能成为教师自我开发教学资源、提高自己的数学专业水平的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

向量及其应用/张惠英等编著．—北京：高等教育出版社，2005.9

（普通高中新课程数学教学研究与资源丛书/严士健主编）

ISBN 7-04-017635-1

Ⅰ．向…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093100 号

策划编辑	张忠月	**责任编辑**	董达英	**封面设计**	张申申
责任绘图	尹　莉	**版式设计**	王艳红	**责任校对**	王　超
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京民族印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 9 月第 1 版
印　　张	12.5	**印　　次**	2005 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	14.90 元

物料号　17635-00

总　序

《普通高中数学课程标准》(以下简称《标准》)颁布以后，不少教师反映，其中有些内容在以往高中课程中没有，或者处理方法有所不同。希望得到一些帮助，以更好地实施标准。为了满足这种要求，高等教育出版社组织编写、出版了这套丛书。丛书按照内容的不同改变，分册进行讨论。首先就《标准》设置的“算法”、“统计与概率”、“向量”、“导数及其应用”、“推理与证明”5部分内容编写了《算法初步》、《统计与概率》、《向量及其应用》、《微积分》和《推理与证明》各册。

各册的框架依作者的写作风格和内容的情况不尽相同，但总的想法是一方面针对具体的内容，就标准的要求进行论述、分析并提出一些建议，以求有助于老师们实施标准的有关部分；另一方面，对相关的知识和方法进行一些适当的拓展和提升，列举一些进一步的教学资源，为老师们进一步学习和研究相关问题、提高数学修养提供资料和帮助。

《标准》所涉及内容的增加和改变，大致上是考虑到数学及其应用在当代的发展及趋势，作为现代化社会成员所需要理解或掌握的一些数学内容，或者是需要感受的一些数学观念。这些内容和观念，对高中学生的未来发展有重要的意义。《标准》同时要求有关内容的处理要适合高中学生的认知水平；着重数学知识和方法，但要反映与相应课外内容的联系。我们努力在各册中尽量反映这种意图，为此在下面对有关问题作一些解释，希望有助于老师们和有关读者理解各册的写作意图。

计算机技术是20世纪后期以来，对技术、社会生产和生活以及科学研究最有影响的技术之一，数学在它的发明和开发中起着关键的作用。但是在我国的社会舆论和实践中，人们似乎忽略了这一重要联系，以至影响了它在社会发展——特别是高新技术的开发——中发挥更大的作用。所以如何使广大社会成员了解、重视并且初步掌握这一联系，应该是数学教育的重要任务之一。我们体会这是《标准》设置算法的基本理由。因此它所要求的算法教学，不像计算机专业课程那样，单纯地介绍计算机所需要的算法、语言及其程序，而是首先帮助同学通过实例将他(她)们熟悉的数学中的算法转化为用计算机语言表述的算法，从而理解计算机算法中的一些概念、基本结构、计算机流程框图和伪代码的背景，有条件的学校可以上机作初步的计算实习。然后在后续的教学中，在凡是有可能的地方，结合并应用算法进行数学教学。这样可以帮助同学了解计算机的

算法与数学中算法的渊源，理解计算机技术与数学的关系，感受数学在计算机技术中的作用；逐步学会应用计算机帮助解决数学的计算问题，同时也有助于加强同学的逻辑严密性。《算法初步》的前半部分就是按照这种想法提供了比较丰富的实例供老师们参考，阐述了算法的数学背景，提供了一些教学建议；后半部分在这个基础上，结合前面的论述，对计算机中的算法作了比较全面的讨论，并介绍了一些进一步的教学资源。

统计与概率是20世纪以来蓬勃发展的两门数学学科。统计是一门具有新特色的独立应用数学，它从日常生活到高新技术领域都有广泛的应用。虽然它以概率论作为数学基础，但是它与数学的其他分支有本质的不同，处理问题的出发点是归纳的。概率论则是描绘和研究随机（偶然）现象的学科，在中学阶段，它能够帮助学生拓宽数学视野，知道其具有广泛的应用前景，也有助于深入解释统计的方法。由于它们具有广泛的应用性和具有处理随机现象的特性，早在20世纪七、八十年代，国际上已经普遍在中学引进了统计与概率的教学内容。我国几经周折，近几年在高中教学中也引入了这部分内容，这当然是一个可喜的进步。但是人们习惯于大学中的处理方法，将概率作为统计的数学基础，而更多地注意数学的系统性，忽略统计的直接应用、直观本质等教学原则。这样既不利于学生掌握统计与概率的本质及其应用的思想和方法，又大大增加了学生的学习难度。所以《标准》强调统计要帮助学生通过案例体会从合理收集、整理数据到分析数据、提取信息、做出决策的全过程，学会应用一些实际可用的方法。对于统计中的概念（如“总体”、“样本”等）应结合实例作说明，而不追求数学的定义。概率教学则是要帮助同学通过实例认识随机现象和理解概率的意义，适当地对统计的结果作一些概率解释。对于统计与概率的教学都要注意帮助同学体会统计、概率处理随机性问题与其他数学课程内容处理确定性问题的差别。《统计与概率》一书一方面通过实例努力体现这些，另一方面，阐述这些直观性处理与从数学角度讲述统计概率之间的联系，希望老师掌握直观性处理的分寸——实际应用性和科学性兼备。最后提供一些进一步的教学资源。

向量在高中引入与否，在新大纲的制定中已经有过多次讨论。不少人更多地从向量处理立体几何问题是否比综合法更简单出发，来反对在高中引入向量。的确，用向量处理立体几何问题是否比综合法简单随问题而异，不能一概而论。但是向量不仅仅能解决立体几何问题，它还是一个重要的数学工具。我们知道解析几何是用代数方法来研究几何的一种有效方法，它是通过坐标来沟通几何与代数的。向量有类似之处，它既是几何的，又是代数的，是沟通几何与代数的另一有效桥梁。而且它有显著的物理背景，近代几何和理论物理的研究进展表明，它在某些方面有自己的重要而独到的作用。因此在处理高中几何问题的有关部分时，引进向量，既可以在初等几何方面多一个工具，更重要的是通过处理

初等几何，初步掌握向量这一工具，为学生以后的发展作了铺垫。《向量及其应用》这一分册前半部分论述了向量的发展历史、教育价值和基本知识，通过实例说明向量在几何、不等式及物理学中的应用，对教学提出一些建议，为老师实施《标准》的有关部分提供参考。最后对向量在数学中的进一步应用作了介绍，提供了一些教学资源，帮助老师理解向量在数学中的作用，也为有关的数学文化教学内容提供资料。

导数是刻画函数变化的快慢程度的一个一般概念，因此它和函数一样，所反映的原型在客观世界中是无处不在的。高中的学生，不论他（她）将来是否进入高等学校，都应该学习导数及其应用的内容，并应用它考察和理解实际现象中的变化。必要时，可以求助于数学和其他自然科学去解决问题。这是作为现代社会成员的一项科学文化素质要求，应该是高中阶段学习导数及其应用的首要目标。为了在很少的课时内达到上述要求，《标准》强调通过丰富实例由平均变化率过渡到瞬时变化率的途径（从极限的观点看，实际上是直接从函数的差商的极限开始讨论），来理解导数概念的实质、客观背景和应用的广泛性以及导数的初步计算。这样做可以避免传统的微积分由极限讲起的数学教学过程。从极限讲起需要较多的课时才能使学生理解，以致以往在中学微积分的教学设置中，学生既没有充分理解导数和积分及其应用的实质，数学上也不能达到掌握微积分初步的要求。大学的高等数学老师认为与其让他们“炒夹生饭”，还不如在中学不学微积分。现在的处理能够兼顾两者：既可以帮助学生理解导数及其应用的实质，又将系统讲授微积分的任务留给大学阶段，而且前者有助于后者的系统学习。在《微积分》中，前一部分先沿着《标准》的思路通过相当丰富的实例进行分析，提出一些有关教学的建议；然后在后一部分再引进极限概念加以延伸，说明引进极限概念的必要性并不在导数概念的引入，而在于对导数的进一步研究。至于极限的其他应用，例如级数等，本册则不可能涉及。本册还简单介绍了微积分的发展史以及在微积分发展中做出重要贡献的数学家的小传，希望有助于老师们了解微积分的历史发展过程及其对文化发展的意义，同时也便于老师们帮助同学了解微积分对推动社会进步的作用。

《推理与证明》是这次高中数学课程新增内容之一。我们体会这部分内容的设置首先在于帮助同学在学习数学十多年以后，对于数学课程中所经历的思考和推理方式作一次梳理和小结。这些思考方式虽然同学们常常使用，但是在多数情况下，运用并不自觉，一旦遇到比较复杂的情况或者是需要运用数学之外的情况，就可能不能发挥推理的作用。数学中经常使用的表达方法是演绎（包括计算），这是数学给予学生的一种最重要的训练，也是数学在教育中能够处于重要地位的根据之一。但是如何想出这些方法并不是使用演绎的思考方式，而是应用了直观考察、借助以往的经验类比和归纳等合情推理的方法。不论是合情推

理，还是演绎推理方式在学生今后的成长和发展中都是经常用到的。特别是将来打算学习文科的学生，演绎推理方法对他们仍然需要。而社会上对于各种思考方式的区别与联系相对来说比较模糊，因此应明确地认清什么是合情推理、演绎推理，还有什么是“事实证明”等，应用各种思考方式来做出适当的结论；知道一些结论是在什么情况下做出的，因而对可靠性的程度都会有一个适当的判断。其次，通过一些实例，也有助于加强同学们使用推理与论证的训练。我们也不希望将本书写成解题的思考方法手册。考虑到这一部分内容几乎完全是新的，所以本册的写作原则是在可能的条件下多提供一些适合中学生理解程度的例子，或者提示一下那些例子经过适当简化或变动就可以为中学生所理解，并且说明这些例子对同学理解各种推理的作用，从而实际上也是和高中教师一起讨论如何教学，帮助他们进行教学的准备。我们想对这本书，目前不一定需要像其他各书一样，具体地、比较详细地讨论教学建议。

以上概略地介绍了我们对《标准》的相关内容的认识和撰写各册的一些想法。我们也知道进行良好的教学是一门艺术，增进教师的修养是多方面、多途径的。认真地说，我们只是就《标准》新增加的或改变处理的一些内容和老师们进行交流、讨论，向老师们提供一些实例、资料、看法和想法，供老师们参考。我们最大的希望只是我们的写作能够有助于老师们根据实际的教学环境进行创造性的处理，根据自己的条件有效提高，以适应新一轮的教学改革的过程。

丛书各册虽然不同于各专业书籍的写法，但是它们对内容背景的阐述，以及由实例抽象到一般概念和方法的论述过程，对有关专业的读者对专门内容的理解同样有参考价值。因为我认为这种过程是理解专门内容的实质所必需的，而现在很多专门书籍常常忽视这一点。

借丛书出版之际，说了以上一大篇意见，意在有助于使用此书，不全面和不妥当之处肯定会有的，希望大家批评指正。

严士健

2005 年 5 月于北京师范大学

前　言

目前我国基础教育正在飞速发展，九年义务教育基本普及，课程改革逐步深入，特别是根据《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称《标准》)编写的教材已经由多家出版社推出，并从2004年起在山东，广东等省已经开始实验性试用，因此如何搞好新教材的教学工作，尤其是如何提高《标准》中规定的一些新内容的教学质量已经成为广大高中数学教师的迫切愿望。本书正是在这个背景下编写的。

本书主要由四部分组成：第一部分，向量基础知识的介绍与分析。这部分内容是以《标准》中的要求为依据编写的，其中包括向量产生的历史背景与教育价值；平面向量和空间向量的知识结构(第一章；第二章§2.1和第三章§3.1)。第二部分，向量教学建议及向量教学案例与点评(第二章§2.2～2.3和第三章§3.2～3.3)这部分内容是根据教学第一线工作教师的实践经验编写成的。我们力求做到使教学案例能反映《标准》中的基本理念并适合学生的接受能力，让点评能对中学数学教师有所帮助与启发。第三部分，向量方法的应用，其中包括向量在几何(包括平面几何，立体几何和解析几何)，代数(包括三角)和物理中的应用(第四章)。这部分内容主要是通过大量的例题由浅入深逐步呈现的。同时对每一例题给出了"思路分析"与"评述"，对部分例题还给出了不同的解法与"探索"。我们尽量做到解题思路自然清晰，分析恰当到位，探索具有启发性。第四部分，向量知识的深化与提高(第五章)。这部分内容并非是《标准》中的要求，其中§5.4和§5.5的内容已超出中学教学的范畴。编写这部分内容的目的是：1. 向中学数学教师提供进一步学习有关向量知识的材料，同时进一步提高中学数学教师对向量的认识；2. 使向量知识与理论完备化，为此介绍了向量的向量积与混合积。同时也使向量能在其他学科得到更有效的应用。

中学数学教师应该既是教学实践者，又是教学研究者，数学教师要有扎实的有关数学教学的专业知识，同时又要能掌握和运用现代教育、教学的理念，我们就是希望能够在这两方面为中学数学教师提供一些切实的帮助和启发而编写此书的，我们力求做到与时俱进，符合数学教育改革的大方向。但是由于编者的水平有限，本书毕竟还不成熟，特别是我们还没有得到广大中学数学教师意见和想法，心中不免忐忑不安，由于时间仓促，疏漏错误在所难免，希望广大读者斧正。

编　者

2005.5

目 录

第一章

向量产生、发展的历史背景与教育价值

- 向量产生的历史背景
- 向量教学的教育价值

在数学或物理学中有许多量，如长度、面积、温度、质量等，这些量在它的单位选定后，用一个数值就可完全确定，这样的量称为数量或标量. 但是还有许多量，如位移、速度、力、电场强度等，这些量除了有大小外，还有方向. 我们把这种既有大小又有方向的量叫做向量，“大小”与“方向”古来有之，但是把它们结合起来，看作一个整体，却是一种新的想法.

早在二千多年前，古希腊著名科学家亚里士多德在他的力学研究中发现，作用在物体同一点上的两个力，其结果并不是两个力大小的直接相加，而是遵循着一种“平行四边形法则”，即设有两个力 F_1 与 F_2 同时作用在物体的 O 点，以 O 为始端画两条线段，设$\overline{OF_1}$与$\overline{OF_2}$，使$\overline{OF_1}$与$\overline{OF_2}$的方向分别是力 F_1 与 F_2 的方向，$\overline{OF_1}$与$\overline{OF_2}$的长度等于力 F_1 与 F_2 的大小(按适当的比例)，然后，以 OF_1，OF_2 为邻边，作平行四边形 OF_1FF_2，那么以 O 为始端的对角线$\overline{OF}$表示的就是力 F_1 与 F_2 合成力的方向和大小，这就是著名的“平行四边形法则”，也是最早提出的向量加法.

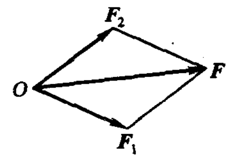

图 1-1

亚里士多德是运用向量知识的一位先行者，但是，当时的学者们并没有由此而大规模的去研究向量，使它形成一门学科，而只是作为一个闪光的个案记入历史，这是为什么呢？回答应该是当时社会的发展还没有到达要求“向量”形成一门学科的时候，社会的发展是推动数学学科产生与发展的动力，下面我们本着这一思路，对向量的产生作一些历史的回顾.

§1.1 向量产生的历史背景

向量的概念萌芽于二千多年前，但是向量理论的建立却是十九世纪前后的事，十九世纪正是欧洲进入和深化工业革命的时代，大功率的蒸汽动力机，快速运转的多轴纺车，以及随之而来的有关科学技术的研究，使“力”、“速度”、“加速度”、“位移”等这些既含有“大小”又含有“方向”要素的量的使用率越来越高，显然在这样的条件下，如果向量只有阿基米德的“平行四边形法则”(德国学者施提文(1548—1620)在他的静力学研究中应用了这个法则，而意大利著名科学家伽利略(1564—1642)则清楚地叙述了这个法则)，则已经远不能满足当时科技发展的需要了，关于向量理论的数学探讨已是一件议事日程上的事情了.

在向量理论建立的过程中，有几件事、有几个人是必须提到的.

1. 复数的几何表示(或几何解释)

自 1545 年意大利的数学家卡当在他的著作《大术》中首次提出形如 5+

$\sqrt{-15}$,$5-\sqrt{-15}$这样的数,用现代的写法就是:$5\pm\sqrt{15}\mathrm{i}(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$.在当时大家无法接受这样的数,因为在那个时代人们认为负数是没有平方根的,所以就对形如 $5\pm\sqrt{15}\mathrm{i}$ 这样的数取了一个名字,叫"虚数"(Imaginary number),即虚幻之数.

1797 年挪威数学家维塞尔(1745—1818)提出了对复数的一个几何解说.

他在平面上自点 O 作两条实数轴 Ox 与 Oy,从而建立了一个坐标平面,对应于每一个虚数 $z=a+b\mathrm{i}$(设允许 $b=0$,则 $a+0\mathrm{i}=a$ 就是实数,从而 $a+b\mathrm{i}$ 包括一切实数与虚数,统称为复数)与坐标平面上的点 $Z(a,b)$成一一对应.称 $Z(a,b)$点为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的对应点.称以 O 为始点 Z 为终点的有向线段(即向量)$\overrightarrow{OZ}$为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的对应向量.关于这方面的工作除维塞尔外还有瑞士的阿工(1808 年提出)和著名的德国数学家高斯(1831 年),高斯进一步把上面所建立的坐标平面称为复平面,至此,我们可以明确地表述,任意一个复数都可以与复平面上一个点或一个向量(以 O 为起点)成一一对应.这就是所谓的复数的几何表示.

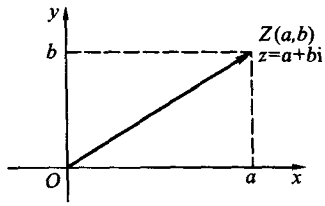

图 1-2

复数的几何表示的发现在数学史上是一件不朽的大事,因为第一,它使虚幻的数有了着落,有了实际的模型,从此不再虚幻.第二,由于平面向量和复数成一一对应,从而向量(有向线段)就可以借助复数进行加、减、乘、除四则运算,而且这些运算都有清晰的几何意义(如加法符合平行四边形法则,乘法相当于对向量作旋转及伸缩长度的几何变换,这对建立平面向量理论提供了一个十分理想的模式.

2. 哈密顿的复数规范化与寻找"三维复数"的工作

在上面所讲的复数的向量表示的基础上,英国著名数学家、物理学家哈密顿(1805—1865)进一步对复数进行规范化,他把复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$直接写为$(a,b)$,$c+d\mathrm{i}$ 写为(c,d),它把这个令人难解的 i 去掉了,而且定义了它们的四则运算:

加减法 $(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$;

乘　法 $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$;

除　法 $(a,b)\div(c,d)=\left(\dfrac{ac+bc}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

可以证明在这样的定义下,复数的上述运算符合数的有关代数运算律.

由上可见用向量来解说复数使复数走向实际;用复数来描述向量,又让向量代数化,而且这些运算都符合代数运算的运算法则,所以用复数来描述向量是建

立平面向量理论的一种理想选择，但是复数能描述的向量只能是 2 维的，而人类生存的空间是 3 维的，对此，复数是无能为力的，于是为了建立空间向量的理论，人们就转向去找“3 维复数”，在人们的头脑里，希望找到的 3 维复数应该有下面这种形式；

$$z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}, a, b, c\in \mathbf{R}.$$

i 与 j 类似于 2 维复数中的虚部单位. 而且它们可以定义加、减、乘、除，且四则运算符合代数中的运算法则.

但对于这项工作，哈密顿没有成功，他发现这种“3 维复数”必须有 4 个分量，而且乘法也不再有交换律. 终于在 1843 年哈密顿发现了“四元数”.“四元数”具有形式

$$a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}, a, b, c, d\in \mathbf{R}$$

称 a 为四元数的数量部分，称 $b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 为四元数的向量部分，其中 i, j, k 起着复数中 i 的作用，在做乘法时有 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1, \mathrm{ij}=\mathrm{k}, \mathrm{jk}=\mathrm{i}, \mathrm{ki}=\mathrm{j}, \mathrm{ji}=-\mathrm{k}, \mathrm{kj}=-\mathrm{i}, \mathrm{ik}=-\mathrm{j}$.

哈密顿证明了这种四元数有很多与复数类似的性质，在运算上除乘法交换律外，其他的运算律依然保持，哈密顿本人对四元数寄予极大的热情. 他认为四元数将在物理学方面获得应用. 尽管四元数的发现引起了很多学者的关注，然而由于四元数对物理学等研究并不方便，因此不少学者对四元数持消极的态度，人们继续在寻找更符合物理学需要的方法，在这方面应首推当时最著名的数学物理学家之一麦克斯韦(1831—1870)，他是电磁理论的发现者. 他的做法是把四元数中的数量部分与向量部分分开来作为各自的实体处理，他把从四元数的向量部分独立出来的实体发展成为更符合物理学需要的更简便的数学工具，这就是 3 维向量.

3. 3 维向量分析的产生

麦克斯韦把向量作为实体从哈密顿的四元数中分离出来时，还是把向量看作四元数的向量部分来叙述的. 真正把向量作为一门独立的数学分支进行研究，是由美国的吉布斯(1839—1903)和英国人亥维赛(1850—1925)分别建立的，他们的思路基本上是一致的，即把向量 $\boldsymbol{v}$ 写成

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}, a, b, c \text{ 是实数}.$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴上的单位向量，称 a, b, c 是向量 $\boldsymbol{v}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，规定两个向量相等就是它们的对应分量相等，两个向量的和与差就是它们对应分量的和与差等，与现行教科书上向量的线性运算法则一致. 另外，根据物理学的需要定义了两种向量的乘法.

一种是根据物理学中力、位移与功的关系，定义了向量与向量的数量积，即若两向量

$$\boldsymbol{v}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{v}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

则 $$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}).$$

按多项式乘积的法则展开,并且令

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

有 $$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

称 $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$ 为向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的数量积或内积、点积. 根据向量的数量积的定义,在一恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下,物体作直线运动,它的位移向量是 $\boldsymbol{S}$,那么力对物体所做的功

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}.$$

另一种向量的乘法向量积,定义为:

$$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}).$$

按多项式乘积法则展开,然后令

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}.,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j},$$

从而有 $$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

向量积也称外积、叉积.

从物理学上来说,设一物体能绕点 O 旋转,A 是其上一点,$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,力 $\boldsymbol{F}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$ 作用于 A 点,则力 F 对于点 O 产生的力矩(向量)就是

$$\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

其中 $|\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}|$ 等于以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 为邻边的平行四边形的面积,$\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}$ 的方向就是同时垂直于向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 且 $\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{F}$,$\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}$ 成右手系.

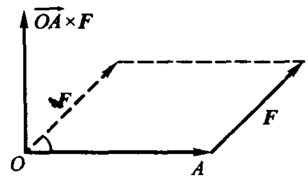

图 1-3

至此,我们可以清楚地看出,向量的知识从萌芽,发展与探索,理论的建立无一不是受到社会生产需要的推动和取舍,当然,向量理论的建立,也大大促进了相关科技的发展.

4. 由 3 维向量到 n 维向量

上面所讲的大都是基于空间物理学,力学、电磁学的需要而对向量进行的探讨和理论的建立. 但与此同时,有些人却从另一个角度在关注向量,如德国数学家格拉斯曼(1809—1877),他认为既然 3 个有序的实数组 (a_1,a_2,a_3) 可以表示一个向量,那 4 个有序实数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 呢? n 个有序实数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 呢? 于是他就大胆地提出了 n 维向量(超复数)的概念,并模仿空间向量,建立起相关的理论.

n 维向量是由 n 个有序实数构成的一个实数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

分别称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 维向量 $\boldsymbol{a}$ 的 n 个分量,两个向量相等就是它们的对应

分量相等，n 维向量的加法、减法，数乘向量等线性运算与空间向量的线性运算一致，所欠缺的是 n 维向量当 $n>3$ 时不能用有向线段来表示.

格拉斯曼还定义了两个 n 维向量的两种乘积，数量积和向量积.

例如两向量的数量积是这样定义的：

如 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n).$$

类似地还定义了向量的长度、和两个向量之间的夹角等：

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}.$$

关于 n 维向量的长度的定义的合理性是毋庸置疑的，对于两个 n 维向量的夹角应考虑到 $|\cos\theta|\leqslant 1$，即

$$\frac{|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\leqslant 1.$$

上面这个不等式就是著名的柯西不等式，当 $n\leqslant 3$ 时，我们可以利用向量与几何知识，轻易地证明它. 当 $n\geqslant 4$ 时，我们又可反过来用纯代数的方法证明它成立①，从而说明了 n 维向量间夹角的上述定义的合理性，此事也说明了数学中几何与代数的和谐与统一性.

向量从 3 维到 n 维的推广是一种思维上的类比推广，当时人们对它的具体应用尚不甚了解，但随着人们对向量空间认识的深刻化，n 维向量的应用也就越来越广泛，如众所周知的爱因斯坦的相对论中把空间(3 个坐标)与时间(1 维坐标)统一成 4 维的时空，即用描述所在的空间的三个数再加上当时的时间，用这四个数来刻画一个状态，因此，四维时空实际上就是一个四维空间，这就是说，人们认识到需要用 n 个数的有序实数组来刻画一种状态的就可以看成是一个 n 维空间，又如我们要刻画导弹在某一时刻的飞行状态，需要三个描写位置的数，三个描写速度的数，三个描写导弹旋转的数，共九个数才能表达导弹此时的运动状态，即

① 关于 n 维柯西不等式的证法很多，下面是利用柯西-拉格朗日不等式对本不等式的一个证明：

因为 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$

$$=\sum_{i<j}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant 0,$$

所以 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$，

等号成立的条件是 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$.

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z,v_x,v_y,x_z,w_x,w_y,w_z).$$

其中 x,y,z 表示空间位置,v_x,v_y,v_z 及 w_x,w_y,w_z 分别表示各方向的速率与角速率.这种写法表示的是导弹的一种状态,因此,我们可以说导弹的每一个状态对应于9维向量空间的一个向量,或者说对应于9维空间的一个"点".在统计物理学中,这样的用途也很多,如在盛气体的一个封闭容器内,假定气体由 m 个分子组成,这里每一个分子都在容器内运动,确定一个气体分子位置需要 x,y,z 三个坐标,确定速度又需要三个分速度 u,v,w,从而确定一个气体分子的状态需6个参数,因此确定整个容器中的气体在某时刻的状态需要 $6m$ 个参数,我们可以把它看作 $6m$ 维空间的一个向量(或一个点),从而我们可以用 n 维向量的理论来研究它们.

在当今市场经济的社会里,n 维向量在商品交易中也获得广泛的应用.

如某超市经营1000种商品,可按某一种顺序编号,然后把这一千种商品的单价排列起来,构成了一个1000维向量,如

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_{1000}),$$

然后把顾客购买的商品数量也按此次序排列起来(未购的一律记为零),也构成一个1000维向量.

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_{1000}),$$

那么,顾客应向超市付款额就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{1000}\cdot b_{1000}.$$

因此,我们只要把相应运算程序制成电脑软件,通过运行这些软件,就会使超市运作有今天这样的快捷.

再比如,某一航空公司要招聘一批人员,对体格提出10项数字要求,这10个数字按一定顺序排好,就是一个10维向量,如记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_{10}).$$

然后,要求每位应聘人员去体检,把10项结果也按同样顺序排列起来,也组成一个10维向量,记为

$$\boldsymbol{b}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{i10}).\text{(}i\text{ 表示应招人员的编码.)}$$

那么,我们可以用

$$\boldsymbol{d}_i=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}_i|=\sqrt{(a_1-b_{i1})^2+(a_2-b_{i2})^2+\cdots+(a_{10}-b_{i10})^2}$$

来表示第 i 号应聘者的条件与公司要的条件的差距,显然这个数字越小,应聘者就越接近公司的要求.

总之,只要能用 n 个有序实数组就可以确定某事物的一种状态的,都可以理解成为 n 维空间的一个向量,或称为 n 维向量空间的一个点,然后可以用 n 维向量空间的理论去研究它们,这就是 n 维向量的用处,以 n 维向量的理论为基础的数学学科"线性代数"已是当今高校理工科系的必修课程.