

高等学校教材

矩陣論

程云鵬 主編

$$\text{Cond}(A) = \|AA^T\|$$

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书共有七章。主要介绍线性空间与线性变换, 矩阵范数, 矩阵分析, 矩阵分解, 特征值的估计, 广义逆矩阵以及特殊矩阵。内容丰富, 文笔流畅易懂, 深广度适宜。编者近年来的一些研究成果及有关文献上最新发表的有些文章, 也收编于书中。为了便于使用, 还编写了习题解答。

本书可作为工科、理科研究生和计算数学及其应用软件专业高年级本科生的教材, 也可作为有关计算工作者和工程技术人员的参考书。

高等学校教材

矩 阵 论

主 编 程云鹏

责任编辑 刘国春

责任校对 郭生儒

*

西北工业大学出版社出版

(西安市友谊西路 127 号)

陕西省新华书店发行

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0108-7/O·7(课)

*

开本 850×1168 毫米 1/32 14.75 印张 381 千字

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—2000 册 定价: 3.23 元

前 言

矩阵理论既是学习经典数学的基础，又是一门最有实用价值的数学理论。它不仅是数学的一个重要的分枝，而且业已成为现代各科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具。特别是计算机的广泛应用，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景。例如，系统工程、优化方法以及稳定性理论等，都与矩阵论有着密切的联系，从而促使矩阵理论近年来在内容上有相当大的更新，非现有教科书所能概括。因此，我们根据各学科研究生学习和科研的需要，编出此书。

本书主编程云鹏教授从事矩阵理论研究工作多年，教学经验丰富。本书大部分内容都来自他编写的《数值代数》教材之中。全书分为七章，其中第一、二、三、四、七章由程云鹏编写，第五章由张凯院编写，第六章由徐仲编写。程经士做了很多编写具体工作。最后由程云鹏统一全书格调。

本书的编写力求做到，资料丰富，论述详尽严谨，文字通俗易懂，便于自学；尽可能满足不同专业工科及理科研究生学习的需要；书中收编了作者近年来所取得的一些科研成果和有关文献上发表的一些文章。全书内容充实，不同专业的研究生可根据需要删减。理科研究生可读完全书，约需 80 学时。工科修 60 学时的研究生，除删去第七章外，左上角带“*”号的内容，可酌情取舍一些；修 40 学时者，除删去上面所要删的内容外，对一些定理的证明，例题的演算，亦可酌情删减。所有删减均不影响教学内容的连贯性。书中各章按节配有适量的习题，以供选用。由于另有习题解答，故而本书未列习题答案。学习过工程数学线性代数课程的读者，均可阅读本书。

在编写过程中，西北工业大学研究生院和应用数学系的领导及同事们，均给我们以很大的鼓励和支持；航空航天工业部 631 研究所周天孝教授仔细审阅了本书全稿，并给予了很高的评价。编者在此一并深表谢意！

编者的水平有限，错漏和不妥之处，在所难免，殷望批评指正！

编 著 者

1988年春于西北工业大学

符号说明

N_0	正整数集合
$\tilde{N}_0$	前 n 个正整数集合
$a \in S$	元素 a 属于集合 S
$a \notin S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1 \supset S_2$	集合 S_1 包含集合 S_2
$S_1 \cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1 \cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
$S_1 \oplus S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的直和
$\sigma: K \rightarrow S$	σ 是集合 K 到集合 S 的映射
$\det A$	矩阵 A 的行列式
$\text{tr} A$	矩阵 A 的迹, A 的主对角元素之和
V^n	n 维线性空间
$\dim V^n$	V^n 的维数
$\bigoplus_{i=1}^s V_i$	子空间 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 的直和
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$	准对角矩阵
$\bigoplus_{i=1}^k A_i$	矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 的直和
$\text{adj} A$	A 的伴随矩阵
R	实线域, 实直线
R^n	实 n 维向量空间
$R^{m \times n}$	实 $m \times n$ 矩阵空间
$R_r^{m \times n}$	所有秩为 r 的实 $m \times n$ 矩阵的集合

C	复数域, 复平面
C^n	复 n 维向量空间
$C^{m \times n}$	复 $m \times n$ 矩阵空间
$C_r^{m \times n}$	所有秩为 r 的复 $m \times n$ 矩阵的集合
e_i	n 维欧氏空间的第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 个坐标单位向量
$R(A)$	矩阵 A 的值域, A 的列空间
$N(A)$	矩阵 A 的核空间, 零空间
$\text{rank}(A)$	A 的秩, $\dim R(A)$
$n(A)$	A 的零度, $\dim N(A)$
$A \sim B$	矩阵 A 相似于矩阵 B
$a \approx b$ 或 $a \doteq b$	数 a 近似等于数 b
$P_m(t) Q_n(t)$	m 次多项式 $P_m(t)$ 整除 n 次多项式 $Q_n(t)$
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
T_0	零变换
T_e	单位变换
J	矩阵的 Jordan 标准形
$J_i(\lambda_i)$	矩阵的第 i 个 Jordan 块
(x, y)	向量 x 与向量 y 的内积
$x \perp y$	向量 x 与向量 y 正交 (垂直)
$L(x_1, x_2, \dots, x_s)$	向量 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 生成的子空间
$V^\perp$	子空间 V 的正交补
A^T	矩阵 A 的转置
A^* 或 A^H	矩阵 A 的共轭转置
$(A)_{ij}$	矩阵 A 的 (i, j) 处的元素
$\ A\ $	A 的任意范数
$\ A\ _F$	A 的 Frobenius 范数
$\ A\ _E$	A 的 Euclid 范数, 二范数
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径

$\text{Cond}(A)$	A 的条件数
$\ x\ _p$	向量 x 的 p ($1 \leq p < +\infty$) 范数, l_p 范数
$\forall x$	任意向量 x
$A \geq 0 (x \geq 0)$	非负矩阵 A (或向量 x), A (或 x) 的每个元素都非负
$A \geq 0 (x \geq 0)$	A (向量 x) 不是零矩阵 (向量) 的非负矩阵 (向量)
$A > 0 (x > 0)$	正矩阵 A (向量 x), $A(x)$ 的每个元素均正
$ A $	A 的元素的绝对值构成的矩阵
$A \ll B$	矩阵 A 劣于矩阵 B , 或 B 优于 A
T_{ij}	平面 $[e_i, e_j]$ 中的旋转矩阵
$\delta_i = \sqrt{\lambda_i}$	矩阵 A 的第 i 个奇异值
λ_i 或 $\lambda_i(A)$	矩阵 A 的第 i 个特征值
$\text{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\text{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
G_i	矩阵 A 的第 i 个 Gerschgorin 圆
$R_i(A)$ 或 R_i	矩阵 A 的第 i 个 Gerschgorin 圆半径
$R(x)$	矩阵 A 的 Rayleigh 商
$\min_{x \neq 0} R(x)$	Rayleigh 商 $R(x)$ 在 $x \neq 0$ 的集合上的最小值
$\max_{x \neq 0} R(x)$	Rayleigh 商 $R(x)$ 在 $x \neq 0$ 的集合上的最大值
$\min_{V_k} [\max_{x \in V_k} R(x)]$ $x \neq 0$	特征值的极小极大原理
$\max_{V_k} [\min_{x \in V_k} R(x)]$ $x \neq 0$	特征值的极大极小原理
$A \otimes A$	矩阵 A 与矩阵 B 的直积, Kronecker 积
$\bar{A}$	矩阵 A 按行拉直所得到的列向量

$P_{L,M}$	沿着空间 M 向空间 L 的投影算子
P_L	正交投影算子和正交投影矩阵
A^+	矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵
$A^{(i,j,\dots,l)}$	矩阵 A 的 $\{i, j, \dots, l\}$ -逆
$A\{i, j, \dots, l\}$	全体 $A^{(i,j,\dots,l)}$ 逆的集合
$r_k(A)$	残差矩阵序列的第 k 项
$A^{(d)}$	矩阵 A 的 Drazin 逆
A^*	A 的群逆
L_{-1}	反周期 Jacobi 矩阵
$A > B$	A 与 B 都是 Hermite 矩阵, 且 $A-B$ 为正定矩阵
$A \geq B$	A 与 B 都是 Hermite 矩阵, 且 $A-B$ 为非负定矩阵
$V.L.$ 稳定	Volterra-Lyapunov 稳定
P_0^+	主子式的值非负, 且同阶主子式中至少有一个为正值的矩阵
R_+^n	实 n 维向量空间 R^n 的全体非负向量所构成的子集合
$m(A)$	矩阵 A 的比较矩阵
$\tilde{H}_{n+1}$	$n+1$ 阶的 Hankel 矩阵
$\tilde{H}_{n+1}$	$n+1$ 阶的 Hilbert 矩阵
C_n	n 阶循环矩阵
E_n	n 阶幺矩阵
$W(a_1, a_2, \dots, a_n)$	n 阶 Vandermonde 矩阵
$W_{m \times n}(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$m \times n$ 拟 Vandermonde 矩阵
$W_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$	广义 Vandermonde 矩阵
H_{2^n}	2^n 阶 Hadamard 矩阵
W_{2^n}	2^n 阶 Walsh 矩阵

目 录

第一章 线性空间与线性变换 1

§ 1.1 线性空间 1

- 一、集合与映射 二、线性空间及其性质 三、线性空间的基与坐标 四、基变换与坐标变换 五、线性子空间 六、子空间的交与和

习题 1-1 24

§ 1.2 线性变换及其矩阵 26

- 一、线性变换及其运算 二、线性变换的矩阵表示 三、特征值与特征向量 四、对角矩阵 五、不变子空间 六、Jordan标准形介绍

习题 1-2 76

§ 1.3 两个特殊的线性空间 80

- 一、Euclid 空间的定义与性质 二、正交性 三、正交变换与正交矩阵 四、酉空间介绍 五、对称变换与对称矩阵

习题 1-3 110

参考文献 113

第二章 范数理论及其应用 114

§ 2.1 向量范数及其性质 114

- 一、向量范数的概念及 l_p 范数 二、 n 维线性空间 V^n 上的向量范数的等价性

习题 2-1 126

§ 2.2 矩阵的范数	127
一、矩阵范数的定义与性质 二、几种常用的矩阵范数	
习题 2-2	140
§ 2.3 范数的一些应用	140
*一、矩阵的非奇异性条件 *二、近似逆矩阵的误差	
——逆矩阵的摄动 三、矩阵的谱半径及其性质	
习题 2-3	146
参考文献	147
第三章 矩阵分析及其应用	148
§ 3.1 矩阵序列	148
习题 3-1	155
§ 3.2 矩阵级数	156
§ 3.3 矩阵函数	164
一、矩阵函数 e^A , $\sin A$, $\cos A$ 的定义与性质 二、矩	
阵函数值的求法 *三、矩阵函数的另一定义	
习题 3-3	178
§ 3.4 矩阵的微分和积分	178
一、矩阵 $A(t)$ 的导数与积分 *二、其它微分概念	
习题 3-4	188
* § 3.5 矩阵函数的一些应用	189
一、一阶线性常系数齐次微分方程组 二、一阶线性	
常系数非齐次微分方程组	
习题 3-5	195
参考文献	196
第四章 矩阵分解	197
§ 4.1 Gauss 消去法与矩阵的三角分解	197
一、Gauss 消去法的矩阵表现 二、矩阵的三角(LU)	
分解 三、其它三角分解及其算法 四、分块矩阵	

的拟 LU 与拟 LDU 分解	
习题 4-1	216
§ 4.2 矩阵的 QR 分解	218
一、初等反射矩阵 二、矩阵的 QR (正交三角) 分解	
*三、化矩阵与 Hessenberg 矩阵相似——矩阵分解为正交 矩阵与 Hessenberg 矩阵之积	
习题 4-2	245
§ 4.3 矩阵的满秩分解	247
习题 4-3	251
* § 4.4 矩阵的奇异值分解	251
一、矩阵的正交对角分解 二、矩阵的奇异值与奇异值 分解 三、矩阵正交相抵的概念	
习题 4-4	260
参考文献	261
第五章 特征值的估计及对称矩阵的极性	262
§ 5.1 特征值的估计	262
一、特征值的界 二、特征值的包含区域 *三、扰动 理论中的特征值估计	
习题 5-1	290
§ 5.2 广义特征值问题	291
一、广义特征值问题的等价形式 二、特征向量的共轭性	
习题 5-2	293
§ 5.3 对称矩阵特征值的极性	294
一、实对称矩阵的 Rayleigh 商的极性 二、广义特征值 的极小极大原理 *三、矩阵奇异值的极小极大性质	
习题 5-3	305
* § 5.4 矩阵的直积	306
一、直积的概念 二、直积的性质 三、直积的应用举例	
习题 5-4	313

参考文献	313
------------	-----

第六章 广义逆矩阵 315

§ 6.1 引言	315
----------------	-----

习题 6-1	315
--------------	-----

§ 6.2 投影矩阵	316
------------------	-----

一、投影算子与投影矩阵 二、正交投影算子与正交投影矩阵

习题 6-2	321
--------------	-----

§ 6.3 广义逆矩阵的存在、性质及构造方法	322
------------------------------	-----

一、Penrose 的广义逆矩阵定义 二、广义逆矩阵的性质及构造方法 三、Moore-Penrose 逆的等价定义

习题 6-3	332
--------------	-----

§ 6.4 广义逆矩阵的计方法	333
-----------------------	-----

一、利用 Hermite 标准形计算矩阵的 $\{1\}$ -逆和 $\{1,2\}$ -逆
 二、利用满秩分解求广义逆矩阵 *三、计算 A^+ 的 Zlobec 公式 *四、Greville 方法 *五、一些特殊分块矩阵的广义逆矩阵 *六、计算一类实 Hessenberg 矩阵的广义逆 *七、计算 A^+ 的迭代方法

习题 6-4	359
--------------	-----

§ 6.5 广义逆矩阵与线性方程组的求解	360
----------------------------	-----

一、线性方程组的相容性、通解与广义 $\{1\}$ -逆
 二、相容线性方程组的极小范数解与广义 $\{1, 4\}$ -逆
 三、矛盾方程组的最小二乘解与广义 $\{1, 3\}$ -逆
 四、矛盾方程组的极小范数最小二乘解与广义逆矩阵 A^+
 五、矩阵方程 $AXB=D$ 的极小范数最小二乘解

习题 6-5	370
--------------	-----

* § 6.6 约束广义逆和加权广义逆	371
---------------------------	-----

一、约束广义逆 二、加权广义逆

习题 6-6	377
--------------	-----

§ 6.7 Drazin 广义逆	377
一、方阵的指标 二、Drazin 逆 三、Drazin 逆的 谱性质 四、Drazin 逆的计算方法 五、Drazin 逆 的特例——群逆	
习题 6-7	387
参考文献	387

*第七章 若干特殊矩阵类介绍 389

§ 7.1 正定矩阵与正稳定矩阵 391

一、正定矩阵及一些矩阵不等式 二、正稳定矩阵

习题 7-1 402

§ 7.2 对角占优矩阵 403

一、强对角占优与不可约对角占优矩阵 二、具非零元
素链对角占优矩阵 三、拟对角占优矩阵 四、半强
对角占优矩阵 五、块对角占优矩阵

习题 7-2 411

§ 7.3 单调型矩阵 411

一、单调型矩阵与逆非负矩阵 二、矩阵的正则分裂
及弱正则分裂

习题 7-3 416

§ 7.4 M 矩阵与广义 M 矩阵 416

一、40 个充要条件介绍 二、 M 矩阵 三、广义 M 矩阵

习题 7-4 428

§ 7.5 Toeplitz 矩阵及其有关矩阵 429

一、Toeplitz 矩阵与 Hankel 矩阵等 二、循环矩阵
三、其它特殊的 T 矩阵

§ 7.6 其它特殊矩阵 440

一、Vandermonde 矩阵 二、Hilbert 矩阵
三、Hadamard 矩阵与 Walsh 矩阵

参考文献 455

第一章 线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习现代矩阵论时经常用到的两个极其重要的概念。本章先简要地论述这两个概念及其有关理论；然后再讨论两个特殊的线性空间，这就是 Euclid 空间和酉空间。所有论述是在假定读者已经具备了 n 维向量空间的理论，矩阵的初步运算，线性方程组的理论和二次型（或齐式）的有关知识的基础上进行的。

§ 1.1 线 性 空 间

一、集合与映射

集合是数学中最基本的概念之一。所谓**集合**是指作为整体看的一堆东西。例如，由一些数（有限个或无限个）组成的集合，叫做**数集合**或**数集**；一个线性代数方程组解的全体组成一个集合，叫做**解集合**；一个已知半径和圆心的开圆内的所有点组成一个集合，叫做**点集合**或**点集**，等等。组成集合的事物叫做这个**集合的元素**。如果用 S 表示集合， α 表示 S 的元素，我们常用记号

$$\alpha \in S$$

表示 α 是 S 的元素，读为 α 属于 S ，用记号

$$\alpha \notin S$$

表示 α 不是 S 的元素，读为 α 不属于 S 。

因为一个集合是由它的元素组成，所以给出一个集合的方式不外乎是列举出它的全部元素或给出这个集合元素所具有的特征

性质。例如，由数 1, 2, 3 组成的集合 N ，我们可记为

$$N = \{1, 2, 3\}$$

这就是用列举出其全部元素的方式；但适合方程 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$

的全部点组成的点集 P ，因其元素有无穷多个，不可能全部列举出来，我们就用其元素所具有的特征性质的方式把它记为

$$P = \left\{ (u, v) \mid \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \right\}$$

或
$$P = \left\{ (u, v) : \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \right\}$$

一般地，设 M 是具有某些性质的全部元素 a 所组成的集合，我们把它记为

$$M = \{a \mid a \text{ 具有的性质}\}$$

一切正整数的集合，叫做正整数集，常记为

$$N_0 = \{n \mid n \text{ 是正整数}\}$$

不包含任何元素的集合称为**空集合**，常记为 Φ 。例如，一个无解的线性代数方程组的解集合就是一个空集合。空集合在集合运算中所起的作用，类似于数零在数的运算中所起的作用。

如果集合 S_1 的元素全是集合 S_2 的元素，即由 $a \in S_1$ 可以推出 $a \in S_2$ ，那么就称 S_1 为 S_2 的**子集合**，记为

$$S_1 \subset S_2 \quad \text{或} \quad S_2 \supset S_1$$

例如，全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合——**整数集**的子集合。我们规定空集合是任一集合的子集合；且按定义，每个集合都是它自身的子集合。我们把集合的这两个特殊子集合，统称为其**当然子集合**或**假子集合**，而把它的其余子集合统称为其**非当然子集合**或**真子集合**。

如果两个集合 S_1 与 S_2 含有完全相同的元素，即 $a \in S_1$ ，当且仅当 $a \in S_2$ ，那末我们就称它们**相等**，记为

$$S_1 = S_2$$

显然两个集合 S_1 与 S_2 ，如果同时满足 $S_1 \subset S_2$ 与 $S_2 \subset S_1$ ，那末 S_1 和 S_2 相等。

我们把既属于集合 S_1 ，又属于集合 S_2 的全体元素所组成的集合叫做 S_1 与 S_2 的**交**，记为

$$S_1 \cap S_2 = \{u \mid u \in S_1 \text{ 同时 } u \in S_2\}$$

例如，圆 $(u-1)^2 + v^2 = 1$ 包含的所有点组成的点集与圆 $(u-2)^2 + v^2 = 1$ 包含的所有点组成的点集的交，就是两个圆公共部分所有点组成的点集。两集合的交显然具有下面的关系

$$S_1 \cap S_2 \subset S_1, S_1 \cap S_2 \subset S_2$$

属于集合 S_1 ，或属于集合 S_2 的全体元素组成的集合，叫做 S_1 与 S_2 的**并**，记为

$$S_1 \cup S_2 = \{u \mid u \in S_1 \text{ 或 } u \in S_2\}$$

两集合 S_1 与 S_2 的并显然满足关系 $S_1 \cup S_2 \supset S_1, S_1 \cup S_2 \supset S_2$ 。

集合 S_1 与集合 S_2 的**和集**是指如下的集合

$$\{u+v \mid u \in S_1, v \in S_2\}$$

常用记号 $S_1 + S_2$ 来表示，于是有

$$S_1 + S_2 = \{u+v \mid u \in S_1, v \in S_2\}$$

应该指出，两集合的和集概念不同于它们的并集概念，例如

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2, 3\} + \{2, 3, 4\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

某些数集（含非零的数），如果其中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在该数集中（即数集关于四则运算封闭），那末称该数集为**数域**。例如，实数集关于四则运算封闭，因此它形成一个数域，称其为**实数域**，记为 R ；同样，复数集也形成一个数域，称其为**复数域**，记为 C ；读者可以验证有理数集形成一个**有理数域**。但奇数集不能形成数域；偶数集也不能形成数域。

下面我们简要介绍矩阵论中关于集合间的映射这一重要概念。

设 S 与 S' 是两个集合。所谓集合 S 到集合 S' 的一个**映射**或**映照**，是指一个法则（或规则） $\sigma: S \rightarrow S'$ ，它使 S 中每一个元素 a 都有 S' 中一个确定的元素 a' 与之对应，记为

$$\sigma(a) = a' \quad \text{或} \quad a \rightarrow a' (= \sigma(a))$$

a' 称为 a 在映射 σ 下的**象**，而 a 称为 a' 在映射 σ 下的一个**原象**（或**象源**，**前身**）。

S 到 S 自身的映射，有时也称为 S 到自身的一个**变换**。这种特殊的映射，在矩阵论中也是经常出现的，读者应予以注意！

例如， S 是数域 K ①上全体 n 阶方阵 A 的集合，定义

$$\sigma_1(A) = \det A, \quad A \in S$$

则有 $\sigma_1: S \rightarrow K$ ，即 σ_1 是 S 到 K 的一个映射；如果定义

$$\sigma_2(a) = aI, \quad a \in K$$

这里 I 是 n 阶单位矩阵，则有 $\sigma_2: K \rightarrow S$ 。

令 P_n 是所有次数不超过 n 的实系数多项式的集合，定义

$$\sigma(f(t)) = f'(t), \quad f(t) \in P_n$$

σ 是 P_n 到自身的一个映射（实为求导运算），即 σ 是 P_n 到自身的一个变换。

又如，对于指数函数 $y = e^x$ 而言，它可视为 R 到自身的映射；一般地，定义在 R 上的实函数 $y = f(x)$ ，都可视为 R 到自身的一种特殊映射。

关于映射，我们还可定义它的运算如下。

设 σ_1 与 σ_2 都是集合 S 到 S' 的映射，如果对于每个 $a \in S$ ，都有 $\sigma_1(a) = \sigma_2(a)$ ，则称映射 σ_1 与 σ_2 **相等**，记为 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。

设 σ, τ 依次是集合 S 到 S_1 ， S_1 到 S_2 的映射，映射的**乘积**

① 数域 K 表示一般的数域，它可以是 R ，也可以是 C ，也可以是其它数域。