高等学校教材

矩陣論

程云鹏 主编

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书共有七章。主要介绍线性空间与线性变换，矩阵范数，矩阵分析，矩阵分解，特征值的估计，广义逆矩阵以及特殊矩阵。内容丰富，文笔流畅易懂，深广度适宜。编者近年来的一些研究成果及有关文献上最新发表的有些文章，也收编于书中。为了便于使用，还编写了习题解答。

本书可作为工科、理科研究生和计算数学及其应用软件专业高年级本科生的教材，也可作为有关计算工作者和工程技术人员的参考书。

高等学校教材

矩 阵 论

主　　编　程云鹏

责任编辑　刘国春

责任校对　郭生儒

*

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路 127 号）

陕西省新华书店发行

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0108-7/O·7(课)

*

开本 850×1168 毫米 1/32　14.75 印张　381 千字

1989 年 6 月第 1 版　1989 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—2000 册　　定价：3.23 元

前　　言

矩阵理论既是学习经典数学的基础，又是一门最有实用价值的数学理论。它不仅是数学的一个重要的分枝，而且业已成为现代各科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具。特别是计算机的广泛应用，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景。例如，系统工程、优化方法以及稳定性理论等，都与矩阵论有着密切的联系，从而馈使矩阵理论近年来在内容上有相当大的更新，非现有教科书所能概括。因此，我们根据各学科研究生学习和科研的需要，编出此书。

本书主编程云鹏教授从事矩阵理论研究工作多年，教学经验丰富。本书大部分内容都来自他编写的《数值代数》教材之中。全书分为七章，其中第一、二、三、四、七章由程云鹏编写；第五章由张凯院编写；第六章由徐仲编写。程经士做了很多编写具体工作。最后由程云鹏统一全书格调。

本书的编写力求做到，资料丰富，论述详尽严谨，文字通俗易懂，便于自学；尽可能满足不同专业工科及理科研究生学习的需要；书中收编了作者近年来所取得的一些科研成果和有关文献上发表的一些文章。全书内容充实，不同专业的研究生可根据需要删减。理科研究生可读完全书，约需80学时。工科修60学时的研究生，除删去第七章外，左上角带“*”号的内容，可酌情取舍一些；修40学时者，除删去上面所要删的内容外，对一些定理的证明，例题的演算，亦可酌情删减。所有删减均不影响教学内容的连贯性。书中各章按节配有适量的习题，以供选用。由于另有习题解答，故而本书未列习题答案。学习过工程数学线性代数课程的读者，均可阅读本书。

在编写过程中，西北工业大学研究生院和应用数学系的领导及同事们，均给我们以很大的鼓励和支持；航空航天工业部631研究所周天孝教授仔细审阅了本书全稿，并给予了很高的评价。编者在此一并深表谢意！

编者的水平有限，错漏和不妥之处，在所难免，殷望批评指正！

编 著 者

1988年春于西北工业大学

符 号 说 明

N_0	正整数集合
$\widetilde{N}_0$	前 n 个正整数集合
$a\in S$	元素 a 属于集合 S
$a\overline{\in} S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1\supset S_2$	集合 S_1 包含集合 S_2
$S_1\cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1\cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
$S_1\oplus S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的直和
$\sigma:\ K\to S$	σ 是集合 K 到集合 S 的映射
$\det A$	矩阵 A 的行列式
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹，A 的主对角元素之和
V^n	n 维线性空间
$\dim V^n$	V^n 的维数
$\bigoplus\limits_{i=1}^{s} V_i$	子空间 V_1, V_2， …， V_s 的直和
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(A_1,\ A_2, \cdots, A_s)$	准对角矩阵
$\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i$	矩阵 A_1， $A_2, \cdots, A_k$ 的直和
$\mathrm{adj}A$	A 的伴随矩阵
R	实线域，实直线
R^n	实 n 维向量空间
$R^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵空间
$R_r^{m\times n}$	所有秩为 r 的实 $m\times n$ 矩阵的集合

C	复数域，复平面
C^n	复 n 维向量空间
$C^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵空间
$C_r^{m\times n}$	所有秩为 r 的复 $m\times n$ 矩阵的集合
e_i	n 维欧氏空间的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个坐标单位向量
$R(A)$	矩阵 A 的值域，A 的列空间
$N(A)$	矩阵 A 的核空间，零空间
$\mathrm{rank}(A)$	A 的秩，$\dim R(A)$
$n(A)$	A 的零度，$\dim N(A)$
$A\sim B$	矩阵 A 相似于矩阵 B
$a\approx b$ 或 $a\doteq b$	数 a 近似等于数 b
$P_m(t)\mid Q_n(t)$	m 次多项式 $P_m(t)$ 整除 n 次多项式 $Q_n(t)$
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
T_0	零变换
T_e	单位变换
J	矩阵的 Jordan 标准形
$J_i(\lambda_i)$	矩阵的第 i 个 Jordan块
(x,y)	向量 x 与向量 y 的内积
$x\perp y$	向量 x 与向量 y 正交（垂直）
$L(x_1,x_2,\cdots,x_s)$	向量 x_1，$x_2,\cdots$，x_s 生成的子空间
$V^\perp$	子空间 V 的正交补
A^T	矩阵 A 的转置
A^* 或 A^H	矩阵 A 的共轭转置
$(A)_{ij}$	矩阵 A 的 $(i,\ j)$ 处的元素
$\Vert A\Vert$	A 的任意范数
$\Vert A\Vert_F$	A 的 Frobenius 范数
$\Vert A\Vert_E$	A 的 Euclid 范数，二范数
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径

$\mathrm{Cond}(A)$	A的条件数
$\|x\|_p$	向量x的$p(1\leqslant p<+\infty)$范数，l_p范数
$\forall x$	任意向量x
$A\geqq 0(x\geqq 0)$	非负矩阵A（或向量x），A（或x）的每个元素都非负
$A\geqslant 0(x\geqslant 0)$	A(向量x)不是零矩阵（向量）的非负矩阵（向量）
$A>0(x>0)$	正矩阵A(向量x)，$A(x)$的每个元素均正
$\|A\|$	A的元素的绝对值构成的矩阵
$A\ll B$	矩阵A劣于矩阵B，或B优于A
T_{ij}	平面$[e_i,e_j]$中的旋转矩阵
$\delta_i=\sqrt{\lambda_i}$	矩阵A的第i个奇异值
λ_i或$\lambda_i(A)$	矩阵A的第i个特征值
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数λ的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数λ的虚部
G_i	矩阵A的第i个Gerschgorin圆
$R_i(A)$或R_i	矩阵A的第i个Gerschgorin圆半径
$R(x)$	矩阵A的Rayleigh商
$\min\limits_{x\neq 0}R(x)$	Rayleigh商$R(x)$在$x\neq 0$的集合上的最小值
$\max\limits_{x\neq 0}R(x)$	Rayleigh商$R(x)$在$x\neq 0$的集合上的最大值
$\min\limits_{V_k}[\max\limits_{\substack{x\in V_k\\ x\neq 0}}R(x)]$	特征值的极小极大原理
$\max\limits_{V_k}[\min\limits_{\substack{x\in V_k\\ x\neq 0}}R(x)]$	特征值的极大极小原理
$A\otimes A$	矩阵A与矩阵B的直积，Kronecker积
$\vec{A}$	矩阵A按行拉直所得到的列向量

$P_{L,M}$	沿着空间M向空间L的投影算子
P_L	正交投影算子和正交投影矩阵
A^+	矩阵A的 Moore-Penrose 广义逆矩阵
$A^{(i,j,\cdots,l)}$	矩阵A的 $\{i, j, \cdots, l\}$-逆
$A\{i, j,\cdots,l\}$	全体 $A^{(i,j,\cdots,l)}$ 逆的集合
$r_k(A)$	残差矩阵序列的第 k 项
$A^{(d)}$	矩阵A的 Drazin 逆
$A^{\#}$	A的群逆
L_{-1}	反周期 Jacobi 矩阵
$A>B$	A与B都是Hermite 矩阵，且 $A-B$ 为正定矩阵
$A\geqslant B$	A与B都是Hermite 矩 阵，且 $A-B$ 为非负定矩阵
$V.L.$稳定	Volterra-Lyapunov 稳定
P_0^+	主子式的值非负，且同阶主子式中至少有一个为正值的矩阵
R_+^n	实 n 维向量空间 R^n 的全体非负向量所构成的子集合
$m(A)$	矩阵A的比较矩阵
$\widetilde{H}_{n+1}$	$n+1$ 阶的 Hankel 矩阵
$\widetilde{\mathfrak{H}}_{n+1}$	$n+1$ 阶的 Hilbert 矩阵
C_n	n 阶循环矩阵
E_n	n 阶幺矩阵
$W(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	n 阶 Vandermonde 矩阵
$W_{m\times n}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	$m\times n$ 拟 Vandermonde 矩阵
$W_i(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	广义 Vandermonde 矩阵
H_{2^n}	2^n 阶 Hadamard 矩阵
W_{2^n}	2^n 阶 Walsh 矩阵

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习现代矩阵论时经常用到的两个极其重要的概念。本章先简要地论述这两个概念及其有关理论；然后再讨论两个特殊的线性空间，这就是 Euclid 空间和酉空间。所有论述是在假定读者已经具备了 n 维向量空间的理论，矩阵的初步运算，线性方程组的理论和二次型（或齐式）的有关知识的基础上进行的。

§1.1　线　性　空　间

一、集合与映射

集合是数学中最基本的概念之一。所谓**集合**是指作为整体看的一堆东西。例如，由一些数（有限个或无限个）组成的集合，叫做**数集合**或**数集**；一个线性代数方程组解的全体组成一个集合，叫做**解集合**；一个已知半径和圆心的开圆内的所有点组成一个集合，叫做**点集合**或**点集**，等等。组成集合的事物叫做这个**集合的元素**。如果用S表示集合，a表示S的元素，我们常用记号

$$a\in S$$

表示a是S的元素，读为a属于S；用记号

$$a\overline{\in}S$$

表示a不是S的元素，读为a不属于S。

因为一个集合是由它的元素组成，所以给出一个集合的方式不外乎是列举出它的全部元素或给出这个集合元素所具有的特征

性质。例如，由数 1，2，3 组成的集合N，我们可记为

$$N=\{1, 2, 3\}$$

这就是用列举出其全部元素的方式；但适合方程$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$的全部点组成的点集$P$，因其元素有无穷多个，不可能全部列举出来，我们就用其元素所具有的特征性质的方式把它记为

$$P=\left\{(u, v)\,\middle|\,\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1\right\}$$

或

$$P=\left\{(u, v):\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1\right\}$$

一般地，设M是具有某些性质的全部元素a所组成的集合，我们把它记为

$$M=\{a \mid a\text{具有的性质}\}$$

一切正整数的集合，叫做正整数集，常记为

$$N_0=\{n \mid n\text{是正整数}\}$$

不包含任何元素的集合称为**空集合**，常记为Φ。例如，一个无解的线性代数方程组的解集合就是一个空集合。空集合在集合运算中所起的作用，类似于数零在数的运算中所起的作用。

如果集合S_1的元素全是集合S_2的元素，即由$a\in S_1$可以推出$a\in S_2$，那么就称S_1为S_2的**子集合**，记为

$$S_1\subset S_2 \quad \text{或} \quad S_2\supset S_1$$

例如，全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合——**整数集**的子集合。我们规定空集合是任一集合的子集合；且按定义，每个集合都是它自身的子集合。我们把集合的这两个特殊子集合，统称为其**当然子集合**或**假子集合**，而把它的其余子集合统称为其**非当然子集合**或**真子集合**。

如果两个集合S_1与S_2含有完全相同的元素，即$a\in S_1$，当且仅当$a\in S_2$，那末我们就称它们**相等**，记为

$$S_1 = S_2$$

显然两个集合 S_1 与 S_2，如果同时满足 $S_1 \subset S_2$ 与 $S_2 \subset S_1$，那末 S_1 和 S_2 相等。

我们把既属于集合 S_1，又属于集合 S_2 的全体元素所组成的集合叫做 S_1 与 S_2 的**交**，记为

$$S_1 \cap S_2 = \{u \mid u \in S_1 \text{ 同时 } u \in S_2\}$$

例如，圆 $(u-1)^2+v^2=1$ 包含的所有点组成的点集与圆 $(u-2)^2+v^2=1$ 包含的所有点组成的点集的交，就是两个圆公共部分所有点组成的点集。两集合的交显然具有下面的关系

$$S_1 \cap S_2 \subset S_1, \quad S_1 \cap S_2 \subset S_2$$

属于集合 S_1，或属于集合 S_2 的全体元素组成的集合，叫做 S_1 与 S_2 的**并**，记为

$$S_1 \cup S_2 = \{u \mid u \in S_1 \text{ 或 } u \in S_2\}$$

两集合 S_1 与 S_2 的并显然满足关系 $S_1 \cup S_2 \supset S_1$，$S_1 \cup S_2 \supset S_2$。

集合 S_1 与集合 S_2 的**和集**是指如下的集合

$$\{u+v \mid u \in S_1, \ v \in S_2\}$$

常用记号 S_1+S_2 来表示，于是有

$$S_1+S_2 = \{u+v \mid u \in S_1, \ v \in S_2\}$$

应该指出，两集合的和集概念不同于它们的并集概念，例如

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2, 3\} + \{2, 3, 4\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

某些数集（含非零的数），如果其中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在该数集中（即数集关于四则运算封闭），那末称该数集为**数域**。例如，实数集关于四则运算封闭，因此它形成一个数域，称其为**实数域**，记为 R；同样，复数集也形成一个数域，称其为**复数域**，记为 C；读者可以验证有理数集形成一个**有理数域**。但奇数集不能形成数域；偶数集也不能形成数域。

下面我们简要介绍矩阵论中关于集合间的映射这一重要概念。

设S与S'是两个集合。所谓集合S到集合S'的一个**映射**或**映照**，是指一个法则（或规则）σ：$S\to S'$，它使S中每一个元素a都有S'中一个确定的元素a'与之对应，记为

$$\sigma(a)=a' \quad 或 \quad a\to a'(=\sigma(a))$$

a'称为a在映射σ下的**象**，而a称为a'在映射σ下的一个**原象**（或**象源**，**前身**）。

S到S自身的映射，有时也称为S到自身的一个**变换**。这种特殊的映射，在矩阵论中也是经常出现的，读者应予注意！

例如，S是数域K① 上全体n阶方阵A的集合，定义

$$\sigma_1(A)=\det A,\quad A\in S$$

则有σ_1：$S\to K$，即σ_1是S到K的一个映射；如果定义

$$\sigma_2(a)=aI,\quad a\in K$$

这里I是n阶单位矩阵，则有σ_2：$K\to S$。

令P_n是所有次数不超过n的实系数多项式的集合，定义

$$\sigma(f(t))=f'(t),\quad f(t)\in P_n$$

σ是P_n到自身的一个映射（实为求导运算），即σ是P_n到自身的一个变换。

又如，对于指数函数$y=e^x$而言，它可视为R到自身的映射；一般地，定义在R上的实函数$y=f(x)$，都可视为R到自身的一种特殊映射。

关于映射，我们还可定义它的运算如下。

设σ_1与σ_2都是集合S到S'的映射，如果对于每个$a\in S$，都有$\sigma_1(a)=\sigma_2(a)$，则称映射σ_1与σ_2**相等**，记为$\sigma_1=\sigma_2$。

设σ，τ依次是集合S到S_1，S_1到S_2的映射，映射的**乘积**

① 数域K表示一般的数域，它可以是R，也可以是C，也可以是其它数域。