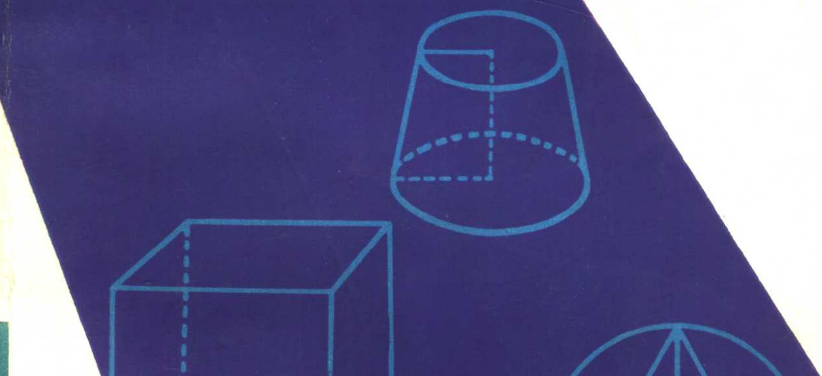
立体几何学习指导

熊大桢 编著



江西人民出版社

立体几何学习指导

熊大桢　编著

江西人民出版社

一九八三年·南昌

立体几何学习指导

熊大桢　编著

江西人民出版社出版

（南昌市第四交通路铁道东路）

江西省新华书店发行　　江西新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 9.125　字数20万

1983年10月第1版　1983年10月第1次印刷

印数1—25,000

统一书号：7110·421　　定价：0.69元

前　　言

《立体几何学习指导》是根据六年制中学高中课本《立体几何》的内容，结合本人多年教学实践编写的。本书从基础知识出发，作了适当充实，内容比较丰富。凡属带有典型性的概念和问题，或列为专节加以阐述，或以例题的形式作了介绍，有的还加分析，指出关键所在。此外，配有一定数量的习题。对于这些习题，有的附有答案或提示，有的写出了整个解题过程，以便读者自学时查对。

本书在编写过程中，参阅了朱德祥和梁绍鸿编的《初等数学复习与研究》立体几何和平面几何部分；初稿承蒙江西师范学院黄贤汶副教授认真审阅，特此致谢。

本书可供在校学生阅读，也可供知识青年自学复习，还可作教师的教学参考。

限于编者的水平，谬误之处在所不免，盼读者给予指正，深为感谢。

编者

一九八二年十二月

目　　录

第一章　直线和平面

一　平　　面

1．平面的定义

在一个面上任取两点连成一条直线，如果这条直线上所有的点都在这个面上，这个面就叫做平面。

2。平面的基本性质

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这个点的一条直线。

公理 3　经过不在同一直线上的三点，确定一个平面。

推论 1　经过一条直线和这条直线外一点，确定一个平面。

推论 2　经过相交两条直线，确定一个平面。

推论 3　经过平行两条直线，确定一个平面。

以上公理 3 和三个推论，就是确定平面位置的条件，即具备这四条中的任一条，都可确定一个平面。

在空间，过直线外一点，作这条直线的平行线，只能作一条。

根据平行线的定义，是同一平面内两条不相交的直线叫做平行线，因此两条平行线必须在同一平面内．现在经过一条直线和这直线外一点，只能确定一个平面．在这平面内过这点作这条直线的平行线，只能作一条．所以在空间过直线外一点，作这条直线的平行线，只能作一条．

例 1　一条直线和三条平行线都相交，求证这四条直线都在同一平面内．

已知．直线 l 和三条平行线 l_1、l_2、l_3 分别相交于 A、B、C（图 1—1）．

求证：这四条直线 l、l_1、l_2、l_3 都在同一平面内．

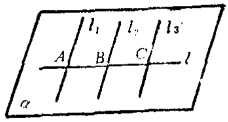


图 1—1

证明：$\because$　$l_1 /\!/ l_2$，$\therefore$　l_1、l_2 确定平面 α．

l 有两点 $A\in\alpha$、$B\in\alpha$，$\therefore$　$l\subset\alpha$．但 $C\in l$，即 $C\in\alpha$．

在 α 内过 C 作 $l_3' /\!/ l_2$，则 l_3' 和 l_3 重合，即 $l_3\subset\alpha$．

因此，l、l_1、l_2、l_3 都在同一平面内．

“设直线 l 和 n 条平行线 l_1、l_2、……l_n 都相交，求证这 $n+1$ 条直线都在同一平面内．”仿此可证．

例 2　四条线段顺次首尾相接，所得的封闭图形，一定是平面图形吗？如不一定是，这些线段最多可确定多少个平面？

解：不一定是平面图形．

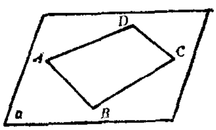


图 1—2

如果 AB、AD 所确定的平面和 CB、CD 所确定的平面重合，它就是平面图形（图 1—2）．如果所确定的平面不重合，就不是平面图形，而是一个

一般的空间四边形（图 1 — 3 ）。在这种情况，四条线段有四个交点，按相交两直线确定一个平面，共可确定四个平面．即平面 ABD、平面 CBD、平面 ABC、平面 ADC。

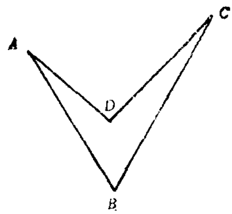


图 1 — 3

例 3　在平面 α 内有 5 个点，在直线 l 上有 4 个点，l 在 α 外，问这些点最多可确定多少（ 1 ）直线；（ 2 ）平面。

解：(1) $c_9^2-c_4^2+1=31$ 或 $c_5^2+c_5^1\cdot c_4^1+1=31$.最多可确定31条直线。

(2) $c_5^2\cdot c_4^1+c_4^4\cdot c_5^1+1=46$。最多可确定46个平面。

例 4　一条直线和两条异面直线都相交，这三条直线共可确定多少平面？

解：要解此题，必须明确如何正确作出图形．而此图形的作法又带有典型性．

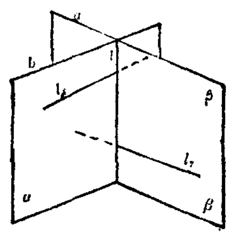


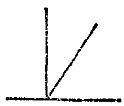
图 1 — 4

如图 1 — 4 ，先作 a 、b 、l 三条相交直线．然后跟着作平行线，得平面 α 、β．在 α 、β 内分别作 l_1、l_2 都和 l 相交，l_1、l_2 就是两条异面直线。

按照“相交两直线确定一个平面”，并结合图形可知这三条直线 l、l_1、l_2 共可确定两个平面。

例 5　两条直线都和第三条直线垂直，这两条直线位置关系如何？

解：　此两条直线可能平行（如图 1 — 5 ），可能相交（如图 1 — 6 ），可能是异面直线（如图 1 — 7 ）。



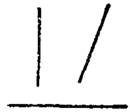


图 1 — 5　　图 1 — 6　　图 1 — 7

例 6　已知 AB、CD 是异面直线，求证：AC 和 BD 是异面直线（图 1 — 8）。

证明：假设 AC 和 BD 不是异面直线，则 AC、BD 在同一平面内，AB、CD 也在同一平面内、这和已知条件 AB、CD 是异面直线矛盾，所以 AC 和 BD 是异面直线。

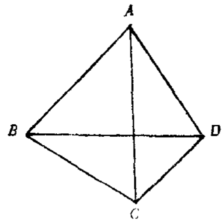


图 1 — 8

二　空间的直线

空间两条不重合的直线位置关系有以下三种：

（1）两条直线相交，（2）两条直线平行，在同一平面内。

（3）两条直线异面，不在同一平面内。

1．两条直线平行

公理　两条直线都和另一条直线平行，则此两直线平行（平行线的传递性）。

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

2．异面直线

（1）两条异面直线所成的角

在空间任取一点，过这点作两条射线分别和这两条异面直线平行，这两条射线所成的角，就表示这两条异面直线所成的角（图1—9）。

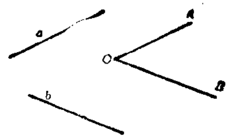


图1—9

在实际应用中，这点就常取在两条异面直线中的一条上。

当两条异面直线所成的角为直角，则说这两条异面直线互相垂直。

注意：空间的两条直线垂直，可以相交，也可以不相交。

（2）两条异面直线间的距离

和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线。而这条公垂线夹在这两条异面直线间的线段长，叫做这两条异面直线间的距离。如下面的例3．

∵ $AB \perp BB_1$，$AB \cap BB_1 = B$．

$B_1C_1 \perp BB_1$，$B_1C_1 \cap BB_1 = B_1$．

∴ BB_1是异面直线 AB 和 B_1C_1的公垂线段．

∵ $|BB_1| = 4$

∴ AB 和 B_1C_1 的距离是4．

注意：两条异面直线之间的距离，常可转化为直线和平面，或平面和平面之间的距离，详见后．

3．三个平面两两相交，一共有三条交线

关于三个平面两两相交的三条交线有下面的定理．

定理1 三个平面两两相交得到三条直线，如果其中有两

条相交于一点，那么第三条也经过这点。

已知：如图1—10，$\alpha\cap\beta=a$，

$\beta\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\gamma=c$，

$a\cap b=O$。

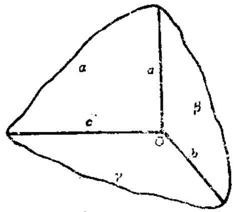


图1—10

求证：$O\in c$。

证明：$\because$ $O\in a$，而$\alpha\cap\beta=a$，

$\therefore$ $O\in\alpha$。$O\in b$，而$\beta\cap\gamma=b$，$\therefore$ $O\in\gamma$。

$\because$ $\alpha\cap\gamma=c$，

$\therefore$ $O\in c$。

定理2 三个平面两两相交得到三条直线，如果其中有两条平行，那么第三条也和它们平行。

已知：如图1—11，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\gamma=c$，$b\parallel c$。

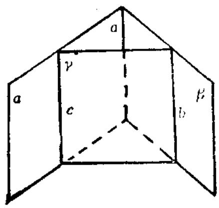


图1—11

求证：$a\parallel b$，$a\parallel c$。

证明：用反证法。

$\because$ $a\subset\beta$,$b\subset\beta$,如果a和b相交，根据定理1，c也和b相交，这和已知条件$b\parallel c$矛盾。

$\therefore$ $a\parallel b$。同理 $a\parallel c$。

例1 求证：空间四边形，两双对边中点连线必定互相平分。

已知：空间四边形$ABCD$，E、F、G、H分别为各边中点（如图1—12）。

求证：EG和HF互相平分。

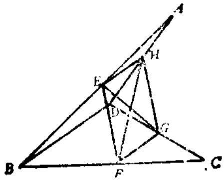


图1—12

证明：$\because$ E、H分别为AB、AD中点 $\therefore$ $EH \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BD$。同理$FG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BD$。$\therefore$ $EH \perp\!\!\!\!= FG$。$\therefore$ EH，

FG 在同一平面内，而且 $EFGH$ 是平行四边形。

所以，EG 和 HF 互相平分。

例 2 一条直线和两条平行线中的一条垂直，也必和另一条垂直。

设：$l_1 /\!/ l_2$，$l \perp l_1$，

求证：$l \perp l_2$

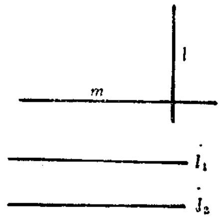


图 1—13

证明：如图 1—13，在 l 上任取一点，过这点作直线 $m /\!/ l_1$，$\because$ $l \perp l_1$，$\therefore$ $l \perp m$。又 $\because$ $l_2 /\!/ l_1$，$\therefore$ $l_2 /\!/ m$，即 l 和 m 所成的角，就是 l 和 l_2 所成的角。$\therefore$ $l \perp l_2$。

注意：此例接触者甚多，一般可作定理用。

例 3 如图 1—14 长方体 $AB=6$，$BC=3$，$B_1B=4$，（1）求 A_1B 和 B_1C 所成的角。（2）证明：在一般情况不作延长线的共顶点的两个面的对角线所成的角必为锐角。

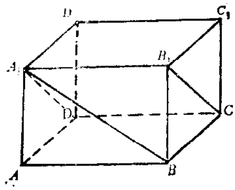


图 1—14

解：（1）连 A_1D（如图 1—14）

则 $\because$ $A_1D /\!/ B_1C$，$\therefore$ $\angle BA_1D$ 即表示 A_1B 和 B_1C 所成的角。$A_1B=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$，$A_1D=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$BD=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$。$\cos DA_1B=\dfrac{A_1B^2+A_1D^2-BD^2}{2A_1B\cdot A_1D}$

$=\dfrac{52+25-45}{2\cdot5\cdot\sqrt{52}}=\dfrac{8\sqrt{13}}{65}$ $\angle DA_1B=\arccos\dfrac{8\sqrt{13}}{65}$ 即是 A_1B 和 B_1C 所成的角。

（2）设 $AB=a$，$BC=b$，$B_1B=c$。则 $A_1B=\sqrt{a^2+c^2}$，$A_1D=\sqrt{b^2+c^2}$，$BD=\sqrt{a^2+b^2}$。$\cos DA_1B=\dfrac{a^2+c^2+b^2+c^2-a^2-b^2}{2\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}$

$=\dfrac{c^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}}>0$，∴ $\angle DA_1B$ 一定是锐角。

例 4　已知两条异面直线 a、b 所成的角为60°，它们的公垂线段为 AA'。如图 1—15，在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $|A'E|=8$，$|AF|=5$，$|EF|=20$。求：(1) 两异面直线 a、b 间的距离；(2) EF 和过 b 而平行于 a 的平面所成的角。

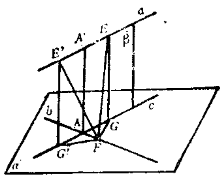


图 1—15

解：设过 b 而平行于 a 的平面为 α，过 a 和 AA' 的平面为 β，则 $\alpha\perp\beta$。$\alpha\cap\beta=c$ 则 $c\parallel a$，即 c 和 b 所成的角为60°。

在 β 内作 $EG\perp C$，则 $EG\perp\alpha$，$EG=AA'$，$EG\perp GF$。$AG=A'E=8$，在 $\triangle GAF$ 中，$GF=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ}=7$，在 $\triangle EFG$ 中，$EG=\sqrt{20^2-7^2}=\sqrt{351}=3\sqrt{39}$，　即 $AA'=3\sqrt{39}$。

$\cos EFG=\dfrac{7}{20}$，$\angle EFG=\arccos\dfrac{7}{20}$。

a、b 之间的距离为 $3\sqrt{39}$，EF 和过 b 而平行于 a 的平面所成角为 $\arccos\dfrac{7}{20}$。

设 E 点落在 A' 点之另一侧命之为 E'，仍用上图即 $A'E'=8$，同样作 $E'G'\perp C$，则 $E'G'\perp\alpha$，$E'G'=AA'$，$E'G'\perp G'F$，$AG'=A'E'=8$，在 $\triangle G'AF$ 中，

$G'F=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos120^\circ}$

$=\sqrt{129}$，$E'G'=\sqrt{20^2-129}$

$=\sqrt{271}$，即 $A'A=\sqrt{271}$。

$\cos E'FG'=\dfrac{\sqrt{129}}{20}$，$\angle E'FG'=\arccos\dfrac{\sqrt{129}}{20}$。

在此种情况 a、b 之间的距离为 $\sqrt{271}$，EF（即 $E'F$）和

过 b 而平行于 a 的平面所成角为 $\arccos\frac{\sqrt{129}}{20}$.

此题即有上述两解.

三　直线和平面

直线和平面之间的位置关系有下列三种:

(1)直线在平面内，有无数个公共点.

(2)直线和平面相交，只有一个公共点.

(3)直线和平面平行，没有公共点.

1. 直线和平面平行

(1)直线和平面平行的定义　一条直线和一个平面没有公共点，就说这直线和这平面平行.

(2)直线和平面平行的判定定理　如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那末这条直线就和这个平面平行.

(3)直线和平面平行的性质定理　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那末这条直线就和交线平行.

2. 直线和平面相交

(1)直线和平面垂直

直线和平面垂直的定义　如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，那末就说这条直线和这平面垂直。

直线和平面垂直的判定定理1　如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那末这条直线就和这平面垂直。(二垂线定理)。

直线和平面垂直的判定定理 2 两条直线平行，如果其中有一条和一个平面垂直，则另一条也和这平面垂直。

推论：过一点而和一条直线垂直的直线，都在过这点而和这条直线垂直的平面内。

直线和平面垂直的性质定理 如果两条直线都和一个平面垂直，那么这两条直线平行。

（2）直线在平面内的射影，直线和平面所成的角。

直线和它在平面内的射影所成的角，叫做这条直线和这平面所成的角。

三垂线定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那末这条直线也和这条斜线垂直。

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么这条直线也和这条斜线在这平面内的射影垂直。

斜线长定理 两条斜线在一个平面内的射影长相等，则这两条斜线长相等。

以上逆命题也成立（证明略）。

例 1 两条斜线在一个平面内的射影中，射影较长的斜线较长。

已知：如图 1—16 OA、OB 分别是 PA、PB 在 α 内的射影，$OA>OB$，

求证：$PA>PB$

证明：在 OA 上取 $OB'=OB$

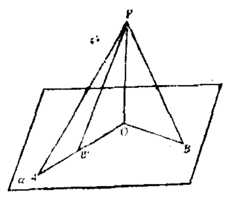


图 1—16

则 $PB'=PB$。但在 $\triangle PAO$ 中，$\angle PB'A>\angle POB'>\angle PB'O>\angle PAB'$ ∴ $PA>PB'$，即 $PA>PB$。

例 2　在一个平面的两条斜线中，斜线较长的，射影也较长.

已知：仍用上图，$PA>PB$.

求证：$OA>OB$.

证明：用穷举法.

在 OA 和 OB 之间只存在三种情况：

如果 $OA=OB$，则 $PA=PB$，与已知条件不合.

如果 $OA<OB$，则 $PA<PB$，与已知条件不合.

如果 $OA>OB$，则 $PA>PB$，与已知条件相合.

故当 $PA>PB$，则 $OA>OB$.

例 3　自一个锐角的顶点，引一条直线和这个角的两边成相等的角，求证这条直线在这个角所在平面的射影是这个角的平分线.

已知：如图 1—17，OA 是 PA 在平面 HAK 内的射影，$\angle PAH=\angle PAK$.

求证：AO 平分 $\angle HAK$.

证明：作 OB、OC 分别垂直于 AK、AH，根据三垂线定理，则 PB PC 分别垂直于 AK、AH. $\because$ 直角$\triangle PAB\cong$直角$\triangle PAC$，$\therefore$ $PB=PC$，$\therefore$ $OB=OC$（斜线相等，射影相等）. $\therefore$ AO 平分 $\angle HAK$.

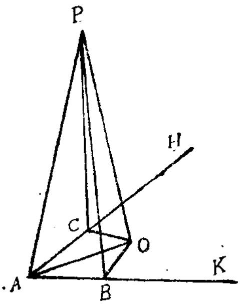


图 1—17

此题带有典型性，在分析其他图形时经常用到.

例 4　已知直角三角形 ABC，两直角边 $AB=6$，$AC=8$，所在平面外有一点 P. P 和 A、B、C 的距离都是13. 求：（1）P 到这三角形所在平面的距离；（2）P 到这三角形各边的