ZhXShX

中学数学丛书

江　志　邱应麟

指数与对数

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

指数与对数

江　志　　邱应麟

湖北教育出版社

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》。本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

指数与对数

江　志　邱应麟

*

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 5.75印张 1插页 130,000字

1986年6月第1版　1986年6月第1次印刷

印数：1—4,800

统一书号：7306·233　　定 价：0.89元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前　言

本书根据中学数学教学大纲中规定的指数、常用对数、实数集、指数函数与对数函数等章规定的教学内容，以指数函数和对数函数为线索展开，着力阐明知识的系统性，发掘知识的内在联系，特别注意启发引导读者深入到知识的形成过程中去，以期达到开发读者智力，培养读者创造性工作能力的目的。全书共分五章，各章均配有适量的例题和一定数量的习题，书末附有习题的答案和提示。希望通过本书的学习，使读者对于指数和指数函数、对数和对数函数、集合和映射、方程的同解性和解法等方面，在理论上有较深入地认识，在解题技巧上有一定程度的提高。全书以初中、高中学生为主要对象，也可供初高中教师作教学上的参考，还可作在职职工的自学用书。在语言文字上力求通俗易懂，使中等程度的在校中学生能阅读。愿望是良好的，水平是有限的，缺点错误在所难免，希望得到各方面的批评指正。

编　者

一九八二年九月三十日

目　　录

第一章　指数概念的普遍化

§1　实数集

我们先讨论数概念的普遍化．这是为了使初学者能领会指数概念普遍化的基本思想，明确将指数概念逐步扩充的需要，同时，由于本书所讨论的对象，如指数、幂、对数等都是实数，指数函数、对数函数的定义域和值域分别都是实数集或实数集的子集．所以，作为本书的读者对实数集应有所认识．我们也只将数的概念扩充到实数为止．并且，这里叙述的仅是数概念扩充的基本思想和结论，并没有真正地叙述严格的实数理论．

由于生活、生产和科研的需要以及数的自身矛盾的运动，数的概念逐渐扩张．人类首先认识到的是正整数，即自然数．在正整数集合中，加法与乘法总可以实施．也就是说，对正整数进行加、乘运算后，得到的数仍是正整数．并且，正整数的加、乘运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律．任意两个正整数都可以比较大小，1是最小的正整数，没有最大的正整数．

在正整数集中，减法不是永远可以实施的．例如2减2及2减3所得的差就不是正整数了．为了使减法通行无阻，数的概念必须扩张．同时，为了表示没有量和具有相反意义的量，必须引进新数——零和负数．把正整数、零、负整数合并在一起，构成整数集．

当数的概念由正整数扩充到整数之后，旧有的矛盾解决了，

减法总可以实施，可以用数表示没有量或具有相反意义的量；在扩大的数集中引进了新的元素——零和负整数；在正整数集中成立的那些运算律，在整数集中仍然成立，任意两个整数都可以比较大小；在整数集中没有最大的数；在扩大的数集中也有一些新的性质，如在整数集中没有最小的数。在以后数的扩充中也遵循着这些原则。

在整数集中，除法不是永远可以实施的，整数不能表示部分量。为了解决这些矛盾，人们又引进了分数。把整数、分数合并在一起构成有理数集，有理数集解决了旧有的矛盾，并可以证明有理数集保持着整数集的基本性质。现把有理数集的基本性质归纳如下：

设a、b、c是任意三个有理数。

1. 有关顺序性.

〈1〉 三分律　$a=b$，$a>b$，$a<b$三者之中有一个且只有一个成立；

〈2〉 传递性　若$a>b$，$b>c$，则$a>c$；

〈3〉 稠密性　若$a>b$，则至少存在一个有理数d，使$a>d>b$。

2. 有关加法运算律.

〈1〉 交换律　$a+b=b+a$；

〈2〉 结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

〈3〉 零元　$a+0=a$；

〈4〉 相反数　对于任一a存在$-a$，使$a+(-a)=0$；

〈5〉 加法单调性　若$a>b$，则$a+c>b+c$。

3. 有关乘法运算律.

〈1〉 交换律　$ab=ba$；

〈2〉 结合律　$(ab)c=a(bc)$；

〈3〉 单位元 $a\cdot 1=a$；

〈4〉 逆元 对于任一$a\neq 0$，存在逆元$\frac{1}{a}$，使$a\cdot\frac{1}{a}=1$；

〈5〉 乘法对加法的分配律 $(a+b)c=ac+bc$；

〈6〉 乘法的单调性 若$a>b$且$c>0$，则$ac>bc$，若$a>b$且$c<0$，则$ac<bc$。

4．阿基米德公理．

对于任一有理数a，总有自然数n使$n>a$。

例1 在有理数集内验证乘法对加法的分配律成立。即证明

$$\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3},$$

其中a_1、a_2、a_3为非零整数，b_1、b_2、b_3为整数。

证明： $\because$
$$\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\frac{b_3}{a_3}=\left(\frac{b_1a_2+a_1b_2}{a_1a_2}\right)\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{(b_1a_2+a_1b_2)b_3}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_3a_2+b_2b_3a_1}{a_1a_2a_3}.$$

$$\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{b_1b_3}{a_1a_3}+\frac{b_2b_3}{a_2a_3}=\frac{b_1b_3a_2}{a_1a_2a_3}+\frac{b_2b_3a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_3a_2+b_2b_3a_1}{a_1a_2a_3}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}.$$

在有理数集中，虽然加法、减法、乘法、除法(除数不为零)，这四种运算总可以实施．但是开方运算不是总可以实施．有理数虽然都可以表示在数轴上，而且很稠密，但是它不能填满整个数轴，因此它不能表示连续量．如单位正方形的对角线的长度不能用有理数表示．为了使正数开平方运算总能实施，为了度量连续量，人们又需要将数概念再次扩充，引进无理数(中学课本定义为无限不循环小数)．有理数集与无理数集合并起来构成实数集．实数集解决了前面提出的矛盾，可以证明实数集保持了有理数集的四方面的基本性质．也可以证明实数集还有如下新的性质．

退缩闭区间套定理 若有两列实数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

和 $$b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n,\ \cdots\cdots$$

它们具有下列性质，

〈1〉 数列$\{a_n\}$不减：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots\cdots;$$

〈2〉 数列$\{b_n\}$不增：

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots\cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots\cdots;$$

〈3〉 对于所有的自然数n，不等式$a_n < b_n$成立；

〈4〉 对于预先指定的任意小的正数ε，当n足够大时，不等式$|b_n - a_n| < \varepsilon$都成立；

那么在a_n与b_n间存在唯一的实数ξ：

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n.$$

定理 实数集与数轴上的点集可以建立一一对应的关系：对于任一实数，在数轴上有唯一的点与之对应；反过来，对于数轴上的任一点，有唯一的实数与之对应．

例2 $\sqrt{2}=1.414213\cdots\cdots$，精确到0.1，0.01，0.001，0.0001等等的不足近似值和过剩近似值分别是

1.4，1.41，1.414，1.4142，1.41421，1.414213，……

1.5，1.42，1.415，1.4143，1.41422，1.414214，……

不足近似值数列不减：

$1.4\leqslant 1.41\leqslant 1.414\leqslant 1.4142\leqslant 1.41421\leqslant 1.414213\leqslant\cdots\cdots$

过剩近似值数列不增：

$1.5\geqslant 1.42\geqslant 1.415\geqslant 1.4143\geqslant 1.41422\geqslant 1.414214\geqslant\cdots\cdots$

在每一精确度下，不足近似值<过剩近似值．

精确到$\frac{1}{10^n}$的过剩近似值与不足近似值的差就是$\frac{1}{10^n}$。对于预先指定的任意小的正数ε，只要n足够大，均有$\frac{1}{10^n}<\varepsilon$成立。

可见，$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值这两列数中间存在唯一的实数，这个实数就是$\sqrt{2}$。

表示在数轴上$\sqrt{2}$就是A点。

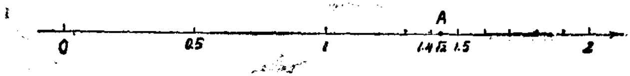

图1—1

§2 正整数指数幂

定义1 $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个}$ （n是正整数）

即，a的正整数n次幂a^n就是n个相同的a相连乘的积，其中a叫底

数，n叫乘方指数，求幂的运算叫乘方。

正整数指数幂有下列性质(m、n为正整数)：

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m>n$, $a \neq 0$);

3. $(a^m)^n = a^{mn}$;

4. $(ab)^n = a^n b^n$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$).

今以性质 1 为例证明，其余的留给读者完成。

证明：

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdots\cdots a)}_{m个} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots\cdots a)}_{n个} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}_{m+n个} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

考察以 2 为底的幂和指数分别构成的两列数，我们会发现一个很有趣的现象。

幂	指数
$2^1 = 2$	1
$2^2 = 4$	2
$2^3 = 8$	3
$2^4 = 16$	4
$2^5 = 32$	5
$2^6 = 64$	6
$2^7 = 128$	7
$2^8 = 256$	8
$2^9 = 512$	9

$2^{10}=1024$	10
$2^{11}=2048$	11
$2^{12}=4096$	12
$2^{13}=8192$	13
$2^{14}=16384$	14
$2^{15}=32768$	15
$2^{16}=65536$	16
⋮	⋮
⋮	⋮

假设需要求2的某两个幂的乘积，例如64乘以512，利用上面两列数，我们有

$$64\cdot 512=2^6\cdot 2^9=2^{6+9}=2^{15}=32768.$$

如果需要求16384除以256的商，利用上面两列数，我们有

$$16384\div 256=2^{14}\div 2^8=2^{14-8}=2^6=64.$$

如果要求16的三次方，那么

$$16^3=(2^4)^3=2^{4\times 3}=2^{12}=4096.$$

如果要求$\sqrt[5]{32768}$，同样我们有

$$\sqrt[5]{32768}=\sqrt[5]{2^{15}}={}^{5\div 5}\sqrt{2^{15\div 5}}=2^3=8.$$

因此，利用上面两列数，幂的乘法变成了幂指数相加，除法变成了相应的减法，乘方变成了相应的乘法，开方变成了相应的除法，也就是说，运算都降低了一级。

试想，假如我们能把任意一个非负实数N化为以某一个数a($a>0$，$a\neq 1$)为底的幂，即$N=a^b$，那么数的乘、除、乘方、开方运算即可转化为相应指数的加、减、乘、除运算，从而使计算大大地简化。

这里存在两个问题：第一，将任意正实数N表成以a为底的

幂，如果仅仅是限制在a的正整数指数幂的范围，实际上是办不到的；第二，要使指数的加、减、乘、除（尤其是减法、除法）通行无阻，那么指数仅限制在正整数的范围内是不行的，基于这两点，指数概念必须扩张。

另外，生产与科学实验也提出指数概念必须扩张的问题。热物体放在冷空气中就会逐渐冷却。如果物体原来的温度是θ_1度，空气的温度是θ_0度，那末七分钟后物体的温度θ度可以由下面的式子求得：

$$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}.$$

其中$e\approx2.718$，k是常量，t是时间，是连续变化的量，可取一切非负实数。因此，指数概念必须普遍化，使诸如下面的符号2^0、3^{-2}、$5^{\frac{1}{3}}$、$6^{\sqrt{2}}$都有意义。

扩充指数的概念也和扩充数的概念一样，必须遵循以下原则：引进新的定义；解决旧有矛盾；旧有基本运算性质在新的集合中仍然保持。

§3 整数指数幂

只要引进零指数幂和负整数指数幂的概念，指数的概念就由正整数扩充到了整数。但是，应当赋予零指数幂和负整数指数幂怎样的定义才合理呢？根据§2叙述的扩充原则，应使正整数指数幂的五条运算性质仍然有效。为此，在下定义时，先使其中一个性质有效。定义后再验证对其余性质是否有效。

我们就从第一个性质出发，首先来赋予记号a^0的意义（注意，在此以前a^0是没有任何涵义的）。

根据性质 1 求a^0与a^m的乘积：

$$a^0\cdot a^m=a^{0+m}=a^m.$$

但是，当$a^m \neq 0$时，即$a \neq 0$时，两个因子(a^0与a^m)的积等于其中的一个因子(a^m)，必须并且只须另一个因子(a^0)等于1。

这表明，当我们把任何不等于0的数a的零次幂a^0看作等于1时，旧有的幂的乘法性质才保持有效。

定义2 $a^0 = 1$，其中$a \neq 0$。

这时，旧有的正整数指数幂的除法运算性质的附加条件$m > n$，应当改为$m \geqslant n$。因为，当$m = n$时，这个法则也可以用了。

我们再来探索应赋予负整数指数幂怎样的定义才合理。旧有的乘法运算性质$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$对于任何正整数m与n都成立。现在，我们希望当m与n中的一个或者两个为负整数时，这个性质仍然保持有效。不妨设$m = -n$，这时，$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$。设$a \neq 0$，则由$a^{-n} \cdot a^n = 1$得到$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$。这样，我们就有，

定义3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$，其中$a \neq 0$，n为正整数。

这时，旧有的正整数指数幂的除法运算性质的附加条件$m \geqslant n$应该取消。因为这时，$m < n$，这个法则也可以用了。

把指数概念推广到整数范围后，正整数指数幂的五条性质，因条件起了变化，就成为：

设m、n是整数，a、b均不为零。

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$；
3. $(a^m)^n = a^{mn}$；
4. $(ab)^n = a^n b^n$；