

研究生教育书系
信息与电子学科

小波分析及其 在信号处理中的应用

王大凯 彭进业 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

研究生教育书系
信息与电子学科

小波分析

及其在信号处理中的应用

王大凯 彭进业 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书融合了作者多年来从事小波分析及其在信号处理中的应用方面的教学和研究工作的心得,以时-频域联合分析为主线,系统地论述了小波变换的基本特性,正交、双正交和二进小波的构造方法,以及以它们为基的分解和重构算法。并且根据在去噪、编码和特征提取等应用中的需要,对小波基的选用、边界处理等实际问题进行了深入讨论,从而使本书具有理论的系统性和应用的实践性紧密结合和高度统一的特点。本书既可供计算机应用类和电子信息类专业研究生和高年级本科生课程作为教材使用,也可供有关科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析及其在信号处理中的应用/王大凯,彭进业编著. —北京:电子工业出版社,2006.1
(研究生教育书系)

ISBN 7-121-02136-6

I. 小… II. ①王…②彭… III. 小波分析—应用—图像处理 IV. TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 149593 号

责任编辑:陈晓莉 特约编辑:李双庆

印 刷:北京市天竺颖华印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×960 1/16 印张:12.25 字数:275 千字

印 次:2006 年 1 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:20.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言

小波分析是 20 世纪 80 年代开始逐渐发展成熟起来的一个数学分支。小波变换的主要特点集中表现在对时—频域的双重定域能力和多分辨率(多尺度)分析能力,被誉为“数学显微镜”,成为继 Fourier 分析之后的又一有力的信号分析工具,其应用已遍及信号处理、生物医学和地球物理等众多领域。

编写一本面向信号处理应用、讨论小波分析基本理论和方法的书籍,所面临的最大挑战就是如何在数学理论的系统性和严密性与实际应用的可行性和有效性之间找到适当的平衡点。作者根据多年来从事有关小波分析教学和研究工作的心得。在解决这一难题方面作了一些有益的尝试。例如在对一些重要定理和性质的证明中保留了严密的数学推导,但对一些比较次要和繁杂的公式则省略了详细的推导过程;对于离散小波变换中的尺度函数和二进小波变换中的平滑函数的引入不是采用从定义出发的纯数学方法,而是采用了从信号处理实践中为了解决, $j \rightarrow -\infty$ 困难的需要出发的面向应用的方法;在边界处理问题上未采用“区间小波”的数学方法,而是强调了“对称周期延拓”的方法等。此外,全书以信号时—频联合分析为主线,刻意给出了同一 256 点人工数据的 Gabor 变换、正交小波变换和最佳小波包变换的时—频相图,以资比较。通过这些努力,使本书从出发点来看,它是面向应用的,但从连续小波变换到半离散(二进)小波变换再到离散小波变换的系统来看,也不失数学上的严密性和完整性,较好地实现了理论与实践的紧密结合和高度统一。

在本书编写过程中得到作者历届研究生的许多协助,这里要对魏海、刘宏兵、李楠、葛宝、磨国瑞、赵文静等同学在收集资料、制图及文字录入等方面的帮助表示感谢。电子工业出版社的陈晓莉女士对本书的出版做了大量工作并提出了宝贵的意见,使本书得以顺利出版,在此深表感谢。

作者诚恳欢迎读者对本书的错误和不足之处提出批评和建议。来函请寄 wdknwu@163.com 或 扛 nyepeng@hotmail.com。

作 者

2005 年 10 月

目 录

第 1 章 引论	(1)
1.1 函数空间	(1)
1.1.1 线性空间	(1)
1.1.2 线性空间的范数(norm)	(1)
1.1.3 Euclidean 空间	(2)
1.1.4 Hilbert 空间	(2)
1.1.5 平方可积空间与平方可和空间	(2)
1.1.6 Schwartz 不等式	(3)
1.1.7 绝对可积与绝对可和空间	(3)
1.2 $L^2(R)$ 空间的基函数	(3)
1.2.1 正交基	(3)
1.2.2 框架	(4)
1.2.3 Riesz 基	(6)
1.3 连续 Fourier 变换与 Fourier 级数	(8)
1.3.1 连续 Fourier 变换(FT)与逆变换(IFT)	(8)
1.3.2 Fourier 变换的基本性质	(9)
1.3.3 Fourier 级数	(10)
1.4 序列 Fourier 变换与离散 Fourier 变换	(11)
1.4.1 序列 Fourier 变换	(11)
1.4.2 离散 Fourier 变换	(13)
1.4.3 信号在频域中的采样	(14)
1.4.4 信号的截短对 Fourier 分析的影响	(15)
1.4.5 Fourier 分析的不足	(16)
1.5 窗口 Fourier 变换	(17)
1.5.1 窗函数	(17)
1.5.2 窗口 Fourier 变换的定义	(19)
1.5.3 Gabor 变换及其数值计算	(19)
1.5.4 窗口 Fourier 变换的不足	(21)
1.6 小波分析发展简史	(22)

第2章 小波变换	(24)
2.1 连续小波变换	(24)
2.1.1 定义与解释	(24)
2.1.2 逆变换	(26)
2.1.3 与 Gabor 变换的比较	(27)
2.2 二进小波变换	(27)
2.3 离散小波变换	(30)
第3章 多分辨率分析与正交小波的构造	(32)
3.1 多分辨率分析	(32)
3.1.1 $L^2(R)$ 的小波空间分解	(32)
3.1.2 尺度空间的定义和性质	(33)
3.1.3 $L^2(R)$ 基于正交尺度函数和小波函数的分解	(34)
3.2 正交小波构造方法的理论基础	(35)
3.2.1 二尺度关系的频域表达	(35)
3.2.2 Riesz 条件的频域表达	(36)
3.2.3 有关正交互补性的若干重要定理	(37)
3.3 B_样条函数	(42)
3.3.1 B_样条函数的定义	(42)
3.3.2 B_样条函数的基本性质	(42)
3.3.3 B_样条函数的尺度函数性质	(44)
3.4 利用 B_样条函数构造正交小波	(45)
3.5 紧支撑正交小波的构造	(49)
3.6 利用序列 $\{h_k\}$ 计算 $\varphi(x)$ 的迭代算法	(56)
第4章 塔式算法及二维小波	(58)
4.1 基于正交小波的分解算法	(58)
4.1.1 分解算法的推导	(58)
4.1.2 多级分解	(59)
4.1.3 离散小波变换的数据量不变性质	(59)
4.1.4 初始化问题	(60)
4.1.5 DWT 的相图	(61)
4.2 重构算法	(62)
4.3 边界处理	(63)
4.3.1 补零延拓	(64)

4.3.2 简单周期延拓	(65)
4.3.3 以边界点为对称中心的对称周期延拓	(66)
4.3.4 边界值重复的对称周期延拓	(69)
4.4 二维正交小波	(71)
4.4.1 二维小波的构造	(71)
4.4.2 二维分解算法	(71)
4.4.3 图像的细节系数的统计特性	(73)
4.4.4 二维小波重构	(73)
4.5 小波变换在图像去噪中的应用	(74)
4.5.1 噪声的数学模型	(74)
4.5.2 最佳线性滤波器理论	(75)
4.5.3 图像去噪问题的特殊性	(77)
4.5.4 小波变换应用于图像去噪	(77)
第5章 双正交小波	(80)
5.1 滤波器的相位特性	(80)
5.1.1 线性相位及其充分和必要条件	(80)
5.1.2 一个否定性的定理	(82)
5.2 双正交小波的基本性质	(84)
5.2.1 双正交小波的定义	(84)
5.2.2 双正交小波的二尺度关系	(84)
5.2.3 紧支撑线性相位双正交小波的 $\{h_k\}$ 和 $\{\tilde{h}_k\}$ 之间的长度关系	(86)
5.3 构造双正交小波的 CDF 方法	(89)
5.4 基于双正交小波的分解与重构	(95)
5.5 小波函数的消失矩性质	(96)
5.5.1 小波函数的消失矩	(96)
5.5.2 小波函数的光滑性与消失矩的关系	(97)
5.6 提升方案	(97)
5.6.1 基本原理	(97)
5.6.2 从 Haar 小波出发的提升	(99)
5.6.3 从 Lazy 小波出发	(100)
5.6.4 交替提升	(101)
5.6.5 Swelden 算法	(103)
5.6.6 整型小波变换	(106)

第 6 章 DWT 在图像编码中的应用	(109)
6.1 图像编码概述	(109)
6.2 标量量化, 矢量量化与编码	(110)
6.2.1 标量量化	(110)
6.2.2 矢量量化	(113)
6.2.3 从符号流到码流	(113)
6.3 小波变换域中的子带编码	(117)
6.4 小波变换域中的块编码	(118)
6.4.1 块编码的基本概念	(118)
6.4.2 嵌入式零树编码与译码算法	(120)
6.5 小波变换域中的分形编码	(124)
6.5.1 分形迭代的基本原理	(124)
6.5.2 图像的分形编码压缩	(125)
6.5.3 在小波变换域中构造分形迭代函数系统	(126)
6.6 在图像编码应用中小波函数的选择	(127)
第 7 章 二进小波变换及其应用	(133)
7.1 平滑函数的引入	(133)
7.2 二进小波变换的数字卷积实现	(135)
7.2.1 分解算法	(135)
7.2.2 重构算法	(137)
7.2.3 与离散小波变换的比较	(138)
7.3 具有微分算子功能的小波	(139)
7.3.1 小波变换具有微分算子功能的基本条件	(139)
7.3.2 用奇数阶 B ₂ 样条函数构造的二进小波	(139)
7.3.3 反对称双正交小波的微分算子的功能	(142)
7.4 二维二进小波变换及其离散实现	(143)
7.4.1 二维二进小波变换	(143)
7.4.2 分解算法	(144)
7.4.3 二维对偶二进小波的构造	(145)
7.4.4 重构算法	(147)
7.5 二进小波用于图像的多尺度边缘提取	(148)
7.5.1 图像边缘提取	(148)
7.5.2 多尺度边缘提取	(150)

7.6	基于边缘信息的图像编码	(151)
7.7	方向梯度特征的其他应用举例	(153)
7.7.1	应用于图像对称性检测	(154)
7.7.2	利用梯度矢量方向角直方图进行图像相似性检测	(155)
7.7.3	基于梯度矢量方向角信息的人面识别	(157)
7.8	小波变换应用于函数奇异性分析	(159)
7.8.1	函数奇异性	(159)
7.8.2	小波变换系数与奇异性之间的关系	(160)
第 8 章	小波包理论及其应用	(162)
8.1	正交小波包的定义与性质	(162)
8.2	小波空间的正交分解	(165)
8.3	最佳小波包分解	(167)
8.4	双正交小波包	(170)
第 9 章	脊小波变换和曲小波变换	(171)
9.1	连续脊小波变换	(171)
9.1.1	连续脊小波变换的定义	(171)
9.1.2	连续脊小波变换与连续 Radon 变换之间的关系	(172)
9.2	近似脊小波变换	(173)
9.3	有限脊小波变换	(175)
9.3.1	有限 Radon 变换(FRAT)	(176)
9.3.2	有限 Radon 变换的逆变换(IFRAT)	(177)
9.3.3	有限脊小波变换(FRIT)	(178)
9.4	曲小波变换	(178)
9.4.1	多尺度局域化脊小波函数	(179)
9.4.2	曲小波函数与曲小波变换	(180)
参考文献		(182)

第 1 章 引 论

在本章中,我们首先简要介绍函数空间及其基函数的概念,然后复习 Fourier 变换的基本性质及其在信号分析应用中的“不足”,进而引出时-频域联合分析,加窗 Fourier 变换和小波变换的基本概念。

1.1 函数空间^[1]

1.1.1 线性空间

定义 1.1 一个线性空间是一个在标量域(实或复) F 上的非空矢量集合 L ,并且对于其元素(矢量)定义有如下性质的加法和标量乘法。

$$(1) \forall x, y \in L, x+y \in L \quad (\text{加法的封闭性})$$

$$(2) x+y=y+x \quad (\text{加法交换律})$$

$$(3) (x+y)+z=x+(y+z) \quad (\text{加法结合律})$$

$$(4) \text{存在一个 } 0 \text{ 元素,使 } x+0=x$$

$$(5) \text{存在 } x \text{ 的加逆 } (-x), \text{使 } x+(-x)=0$$

$$(6) \alpha \cdot x \in L \quad (\text{乘法的封闭性})$$

$$(7) \alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x \quad (\text{乘法结合律})$$

$$(8) \text{存在一个单位标量 } 1, \text{使 } 1 \cdot x = x$$

$$(9) (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(10) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\text{乘法分配律})$$

例如, n 维矢量集合 $R^n = \{(x_1 \cdots x_n) | x_i \in R, i=1 \cdots n\}$ 是一个线性空间。

1.1.2 线性空间的范数(norm)

定义 1.2 在一个线性空间 L 中的泛函 $p(x)$, 如果满足

$$(1) p(x) \geq 0, p(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$(2) p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

$$(3) p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

则称 $p(x)$ 为 L 的范数,范数可解释为给定元素 x 到 0 元素的距离。常常将 $p(x)$ 记为 $\|x\|$ 。

1.1.3 Euclidean 空间

定义 1.3 如果对于线性空间 L 的每一对元素 x, y 定义了如下性质的内积 $\langle x, y \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y+z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle\end{aligned}$$

那么称 L 是一个 Euclidean 空间(赋范空间)。这时它的范数定义为

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (1.1.1)$$

1.1.4 Hilbert 空间

定义 1.4 一个完备的可分离的无限维 Euclidean 空间称为一个 Hilbert 空间记为 H 。这里,完备性是对于 $\|x-y\|$ 测度而言;可分离性是指它包含可数的处处稠密的子集。

1.1.5 平方可积空间与平方可和空间

定义 1.5 如果将 Euclidean 空间中的内积定义具体化为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\chi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.1.2)$$

那么称以满足

$$\|f\|_2^2 = \int_{\chi} |f|^2 dx < \infty$$

的 $f(x)$ 为元素的线性空间为平方可积空间,记为 $L^2(\chi)$ 。这里, χ 表示 $f(x)$ 的定义域。当定义域为实数域时,记为 $L^2(R)$ 。可以证明,平方可积空间是 Hilbert 空间。

定义 1.6 若内积定义为

$$\langle c, d \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n \quad (1.1.3)$$

式中 $c = \{\dots c_{-1}, c_0, c_1, \dots\}$ 为一序列,则称以满足

$$\|c\|_2^2 = \sum_n |c_n|^2 < \infty$$

的序列为元素的线性空间为平方可和空间,记为 $l^2(Z)$ 。

1.1.6 Schwartz 不等式

$$\| \langle f, g \rangle \| \leq \| f \| \| g \| \quad (1.1.4)$$

证明:取任意复数 λ , 有

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + g, \lambda f + g \rangle &= \lambda^2 \| f \|^2 + 2\operatorname{Re} \lambda \langle f, g \rangle + \| g \|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \varphi(|\lambda|) &\equiv |\lambda|^2 \| f \|^2 + 2|\lambda| |\langle f, g \rangle| + \| g \|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

这表明作为以 $|\lambda|$ 为变量的二次式要么没有实根, 要么只有一个二重实根。所以由它的判别式应小于等于零, 这便得到式(1.1.4)。

1.1.7 绝对可积与绝对可和空间

定义 1.7 若定义

$$\| f \|_1 \equiv \int_x |f| dx \quad (1.1.6)$$

则称满足 $\| f \|_1 < \infty$ 的 f 为元素的线性空间为绝对可积空间, 记为 $L^1(\chi)$ 。同样, 当定义域为实数域时, 记为 $L^1(R)$ 。

类似地, 可定义绝对可和空间 $l^1(Z)$ 。

以下的例子说明一个平方可积函数不一定是绝对可积的, 即

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1.1.7)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad (1.1.8)$$

所以 $f \in L^2(R)$, 但

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \infty \quad (1.1.9)$$

$f \notin L^1(R)$ 。

1.2 $L^2(R)$ 空间的基函数

1.2.1 正交基

信号的分解与重构是信号分析中的基本问题。所谓分解, 是指将一个信号 $f(x) \in L^2(R)$ 与一系列函数 $\{e_n(x)\}$ 做内积运算所得到的值

$$c_n = \langle f, e_n \rangle \quad n \in Z \quad (1.2.1)$$

称之为分解系数;它是 $f(x)$ 在基函数上的投影,因而能给出 $f(x)$ 中含有的与 $e_n(x)$ 相关联的信息。

另一方面,在许多应用中我们还希望能利用经某种处理(例如滤波)之后的分解系数数据重构近似信号 $\hat{f}(x)$ 。如果以此为目的,必须能够在理论上保证:在不对分解系数 c_n 做任何加工的条件下, $f(x)$ 可以通过 $\{c_n\}$ 完全重构(perfect reconstruction),即表达式

$$f(x) = \sum_n c_n \tilde{e}_n(x) = \sum_n \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n(x) \quad (1.2.2)$$

成立。式中 $\{\tilde{e}_n(x)\}$ 称为 $\{e_n(x)\}$ 的对偶。如果式中 $\tilde{e}_n(x) = e_n(x)$, 则重构公式成为

$$f(x) = \sum_n c_n e_n(x) = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n(x) \quad (1.2.3)$$

显然,当

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in Z \quad (1.2.4)$$

则(1.2.3)式成立。(1.2.4)式称为正交归一化条件,并有如下定义:

定义 1.8 满足正交归一化条件的函数序列 $\{e_n(x)\}$ 称为正交归一化函数系(orthonormal system)。而一个完备的正交归一化函数系称为正交归一化基。

可以证明:任何可分离的 Euclidean 空间一定存在正交归一化基(证明从略)。以下是正交归一化基的若干实例:

(1) R^n 空间中的

$$e_i = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \dots, \delta_{i(n-1)}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.2.5)$$

(2) 在 $L^2(0, 2\pi)$ 空间中的

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnx}; \quad n \in Z \quad (1.2.6)$$

正交归一化基的优点是“能量守恒”定理(Parsvel 定理)成立。

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_n |c_n|^2 = \|\{c_n\}\|^2 \quad (1.2.7)$$

1.2.2 框架

虽然利用正交基对信号进行分解有明显的优点,但在某些特性方面也可能不够理想。因而,有时我们可不受正交基的限制而从更宽的范围寻求适合于信号分解和重构的基函数。于是有如下框架(Frame)基的定义。

定义 1.9 如果一个函数序列 $\{\varphi_n\}$ 对于任何 $f(x) \in L^2(R)$ 能使下式

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_n |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2 \quad (1.2.8)$$

成立,式中 A, B 为满足 $0 < A \leq B < \infty$ 的常数,则称 $\{\varphi_n\}$ 为一个框架。 A, B 分别称为框架的下界和上界。当 $A=B$ 时,则称此框架为紧框架。

如果定义一个线性变换

$$Tf = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) \quad (1.2.9)$$

那么框架条件(1.2.8)式保证了这一线性变换的可逆性^[3],从而有

$$f(x) = T^{-1} Tf = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle T^{-1} \psi_k(x) = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \tilde{\psi}_k \quad (1.2.10)$$

式中

$$\tilde{\psi}_k = T^{-1} \psi_k \quad (1.2.11)$$

称为 ψ_k 的对偶框架小波。这样至少在理论上证明了完全重构是可能的。

为了对框架有一个较直观的理解,我们举一个 R^2 空间的例子[2]。如果有三个矢量

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1); \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \mathbf{e}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (1.2.12)$$

则对于平面上的任意矢量

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad (1.2.13)$$

有

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = v_2; \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2; \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \quad (1.2.14)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 &= v_2^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

由此可见, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是一个框架且是紧框架。框架界为

$$A = B = \frac{3}{2} \quad (1.2.16)$$

为了由分解系数 $\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle, i=1, 2, 3\}$ 重构矢量 $\mathbf{v}$, 我们需要对偶框架 $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ 使

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (1.2.17)$$

成立。由于每个矢量 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ 有两个分量,我们共有六个未知数,而矢量方程式(1.2.17)有两个分量方程式,每一分量方程式的两边必须对任意 (v_1, v_2) 成立,这样我们共有四个方程式,因而有无限多个解。比如选定

$$\tilde{e}_1 = (1, 0) \quad (1.2.18)$$

我们有

$$v_1 = v_2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right)\tilde{e}_{21} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right)\tilde{e}_{31}$$

$$v_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right)\tilde{e}_{22} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right)\tilde{e}_{32}$$

令等式两边关于 v_1 和 v_2 的系数相等,得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\tilde{e}_{31} - \tilde{e}_{21}) = 1; \quad \frac{1}{2}(\tilde{e}_{31} - \tilde{e}_{21}) = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\tilde{e}_{32} - \tilde{e}_{22}) = 1; \quad \frac{1}{2}(\tilde{e}_{32} - \tilde{e}_{22}) = 0$$

于是

$$\tilde{e}_2 = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, 1\right]; \quad \tilde{e}_3 = \left[\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, 1\right] \quad (1.2.19)$$

这样(1.2.18)式和(1.2.19)式就给出了框架(1.2.12)式的一个可能的对偶框架,如图1.1所示。



图 1.1 二维空间中的一个框架及其对偶

由此例可以看出,一般地说框架不是线性无关的。而它的对偶也不是惟一的。

1.2.3 Riesz 基

定义 1.10 如果函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 对于任何数列 $\{c_n\} \in l^2$ 能使下式

$$A \|c_n\|^2 \leq \left\| \sum_n c_n \varphi_n(x) \right\|^2 \leq B \|c_n\|^2 \quad (1.2.20)$$

成立,则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 为一个 Riesz 基。式中 $0 < A \leq B$, A, B 分别称为 Riesz 下界和上界。可以证明 Riesz 条件(1.2.20)式是较框架条件更严格的条件,即满足 Riesz 条件的函数族 $\{\varphi_n(x)\}$ 一定满足框架条件(1.2.8)式,但反过来说则不成立。

当 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 Riesz 基时,可定义如下矩阵算子^[3]:

$$M \equiv [\gamma_{m,n}]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (1.2.21)$$

式中的矩阵元素

$$\gamma_{m,n} = \langle \psi_m, \psi_n \rangle \quad (1.2.22)$$

Riesz 条件保证了矩阵 M 是正定的,可逆的。于是我们有

$$M^{-1} = [\mu_{j,k}]_{(j,k) \in Z^2} \quad (1.2.23)$$

式中元素 $\mu_{j,k}$ 与 M 的元素 $\gamma_{m,n}$ 之间有如下关系

$$\sum_m \mu_{j,n} \gamma_{m,n} = \delta_{j,n} \quad (1.2.24)$$

这样一来,利用下式构造的函数簇

$$\tilde{\psi}_j(x) = \sum_n \mu_{j,n} \psi_n(x) \quad (1.2.25)$$

将满足对偶条件

$$\langle \tilde{\psi}_j, \psi_n \rangle = \delta_{j,n} \quad (1.2.26)$$

可见, Riesz 基 $\{\psi_n\}$ 的对偶函数族 $\{\tilde{\psi}_j\}$ 是惟一确定的。

现仍以二维平面为例。假定我们有两个矢量

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1); \quad \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (1.2.27)$$

对于任何一组系数 $\{c_1, c_2\}$, 我们有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{e}_2\|^2 &= \left(c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(c_1 + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} c_2^2 + c_1^2 + \sqrt{2} c_1 c_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \\ &= c_1^2 + c_2^2 + \sqrt{2} c_1 c_2 \end{aligned}$$

考虑到下列不等式对任何 c_1, c_2 成立

$$-\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) \leq c_1 c_2 \leq \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$$

于是有

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(c_1^2 + c_2^2) \leq c_1^2 + c_2^2 + \sqrt{2} c_1 c_2 \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(c_1^2 + c_2^2) \quad (1.2.28)$$

可见 (1.2.27) 式的 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 是二维空间中一个 Riesz 基, 其下界 $A = 1 - \sqrt{2}/2$, 上界 $B = 1 + \sqrt{2}/2$ 。

现考察任意矢量 $\mathbf{v}$, 它在 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 上的投影为

$$c_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = v_2; \quad c_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \quad (1.2.29)$$

因而重构表达式应为

$$\mathbf{v} = c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad (1.2.30)$$

即

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \tilde{e}_{11} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 \tilde{e}_{21} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \tilde{e}_{21} \\ v_2 &= v_2 \tilde{e}_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 \tilde{e}_{22} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \tilde{e}_{22} \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

令等式两边关于 v_1 和 v_2 的系数相等,得

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{21} &= \sqrt{2}, & \tilde{e}_{11} &= -1 \\ \tilde{e}_{22} &= 0, & \tilde{e}_{12} &= 1\end{aligned}\quad (1.2.32)$$

这样就得到了 $\{e_1, e_2\}$ 的对偶 Riesz 基 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$, 如图 1.2 所示。容易验证它们与 $\{e_1, e_2\}$ 满足

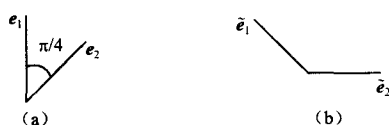
$$\langle e_i, \tilde{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$


图 1.2 二维空间中的 Riesz 基及其对偶

可以证明(证明从略):如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是一个框架,并且在下述意义上它还是线性无关的

$$\sum_n c_n \varphi_n(x) = 0 \Rightarrow c_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

那么此框架便是 Riesz 基,其框架界就是 Riesz 界。

1.3 连续 Fourier 变换与 Fourier 级数

本节和下一节是对 Fourier 变换的一个简要复习。对这部分内容比较熟习的读者可跳过这两节。

1.3.1 连续 Fourier 变换(FT)与逆变换(IFT)^[3]

定义 1.11 若函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则称

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = \langle f(x), e^{i\omega x} \rangle \quad (1.3.1)$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 变换(FT)。如果 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 则可以证明 $f(x)$ 的每一连续点上, 下列逆变换定理成立(证明从略)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.3.2)$$

由定义可知, $\hat{f}(\omega)$ 可看成是 $f(x)$ 在频率为 ω 的简谐函数 $e^{i\omega x}$ 上的投影, 它表征着信号 $f(x)$ 中所含有的频率为 ω 的分量的相对大小, 故称之为信号 $f(x)$ 的频谱。