偏微分方程

凌岭　朱钤　耿光　编

西北大学

偏微分方程

凌岭 朱铃 耿光 编

西北大学

一九八一年

序

本教材是在西北大学数学系多年的《偏微分方程》讲义的基础上编写而成的。在教材的编写顺序、安排方面，是以方程的类型为主线，同时重视问题的解法。

本书共分五章。第一章介绍典型定解问题的物理、力学来源和方程的分类。第二、三、四章分别讨论双曲型、椭圆型和抛物型方程基本定解问题的适定性及解的性质。特别注意用基本公式、基本解的思想处理问题。第五章介绍二阶线性偏微分方程的一般理论初步。对前面几章进行了分析和引伸。为了便于掌握这些内容，根据教学进度的需要，我们都安排了一定数量的习题，供读者练习。

本教材可作为综合大学及高等师范院校数学各专业《偏微分方程》课程的教材，也可供高等工业院校选用。

由于我们水平的限制，编写中一定还有很多缺点，殷切期望同志们给予批评和指正。

编　者

1980年10月

目　　录

第一章 绪论

本章将介绍偏微分方程这门学科的研究来源及研究对象，其中包括将典型物理问题归结为偏微分方程问题的例子，定解问题及其适定性的概念。

由于不同质的物理现象往往归结为不同的偏微分方程。为了从数学上掌握住这种差异，并对偏微分方程做系统的研究，我们还介绍了二阶偏微分方程的分类。

§1．基本概念

在研究运动着的物质时，首先遇到的就是现象之间普遍的互相联系和相互制约，以及现象的无限错综的关系。而在现象之间这种联系、制约和错综复杂的关系中，有一种一定的必然的关系，这种关系是由它们的内在本质产生的，就是所谓的规律。微分方程或偏微分方程，就是从量的侧面以特定的形式来研究这种规律的。

在实际问题中，常常遇到较为复杂的运动过程，而反映其运动规律的量与量之间的关系，往往不能直接写出来，却能比较容易地建立起变量和未知函数的偏导数之间的关系式。这种联系着几个自变量、未知函数及它的偏导数的关系式，称为偏微分方程。在偏微分方程中，偏导数是不可缺少的。

一个偏微分方程，如果它含有n阶偏导数而不含比n阶更高的偏导数，就称为n阶偏微分方程。

具有两个自变量x、y的二阶偏微分方程的一般形式是

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0.$$

假若含两个自变量x、y的方程具有形式

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+F_1\left(x,y,u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \tag{1.01}$$

其中a_{11}，a_{12}，a_{22}为x、y的函数，就称为关于最高阶导数的线性偏微分方程。如果a_{11}，a_{12}，a_{22}不仅依赖于x、y，而且像F_1一样，也是x、y、u、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$的函数，这种方程称为拟线性偏微分方程。

假定一方程，不但对于最高阶导数$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，而且对于未知函数$u$及其一阶导数$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$都是一次的，即

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0, \tag{1.02}$$

其中a_{11}、a_{12}、a_{22}、b_1、b_2、c、f只是x、y的函数，就称为线性偏微分方程。如果（1.02）的系数与x、y无关，它就是常系数线性偏微分方程。

若 $f\equiv 0$，方程（1.02）就称为齐次的。

所谓偏微分方程的解是指这样的一个函数，将它替换方

程中的未知函数后，这个方程对其全体自变量来说，成为一个恒等式。

本教材主要研究含一个未知函数的二阶线性偏微分方程。作为典型例子有：

在光学、声学和振动学问题中提出的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{1.03}$$

在电磁学及位势问题中提出的位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1.04}$$

在热力学和扩散问题中提出的热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{1.05}$$

上述三个典型方程，它们具有代表性，而且最常遇到。因此，对它们的讨论将更详细些。

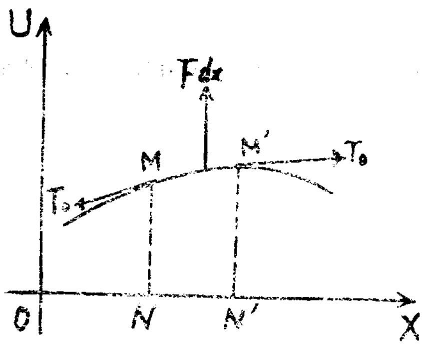
§2. 偏微分方程导出举例

许多物理问题能归结出偏微分方程，特别是上边例举的典型方程。为了了解如何把实际问题化归成偏微分方程，我们用弦振动问题和热传导问题来说明。

例1. 弦振动问题

一根受有很强张力T_0的均匀、柔软的弦，当它受到与平衡位置垂直的外力时，开始作横振动。假定全部运动呈现在一个平面上，而且弦上的点垂直于弦的平衡位置运动。求弦上各点的运动规律。

如图，取弦的平衡位置为OX轴，运动的平面为XOU平面。用$u(x,t)$表示弦上点x在时刻t沿U轴方向的位移。



（图1.1）

取弦的单元MM′，平衡时它的位置在NN′。由于弦的形变是很小的，可以看作M、M′两点的张力大小等于张力T_0的大小。

把对弦垂直于X轴的按单位长计算的作用力记作F.

设α是弦的切线与X轴作的锐角，我们有

$$tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

由于弦的形变是很小的，以至与1比较起来可以忽略掉$\frac{\partial u}{\partial x}$的平方项。于是

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

假定在力F的作用下弦成平衡，将弦段MM′所受的各个力投影到U轴上，就有下面的平衡条件：

$$T_0\sin\alpha' - T_0\sin\alpha + Fdx = 0, \qquad (1.06)$$

其中Fdx为弦段NN_1沿U轴方向所受的力，α'是上面所说的角度在M'的值，即

$$\sin\alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}, \qquad \sin\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M .$$

于是有

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M\right] + Fdx = 0 . \tag{1.07}$$

方括号内的差表示当x改变了dx时，$\frac{\partial u}{\partial x}$的改变量．用微分代替这个改变量，并约去$dx$，就得到弦的平衡方程

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = 0 . \tag{1.08}$$

由于惯性力等于加速度与质量的乘积而取与外力相反的符号，所以弦段MM'的惯性力是

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx,$$

其中ρ是弦的线密度（单位长的质量）．对于单位长来讲，惯性力就是

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

若对外力再补充以惯性力，于是，在方程（1.08）中用$F - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$来代替F，就得到运动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F .$$

用ρ除两端，并设

$$\frac{T_0}{\rho} = a^2, \qquad \frac{F}{\rho} = f, \tag{1.09}$$

就得到弦的强迫振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f. \tag{1.10}$$

若外力消失，就有$f=0$，于是得到弦的自由振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.11}$$

例2．热传导问题

假设物体G在时刻t，在点(x_1,x_2,x_3)处的温度为$u(x_1,x_2,x_3,t)$；并假定$u(x_1,x_2,x_3,t)$具有关于变数x_1，x_2,x_3的二阶连续导数和关于t的一阶连续导数。

由物理学热传导定律可知，在时间dt内流过曲面单元dS的热量等于

$$dQ=-k(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt,$$

其中，正值函数$k(x_1,x_2,x_3)$为物体在点(x_1,x_2,x_3)处的热传导系数，n是曲面单元dS的外法线方向。

在物体G内任取一封闭曲面S，它是容积D的界面，那么从时刻t_1到t_2流到曲面S内部的热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt. \tag{1.12}$$

另一方面，此同一热量，可由容积D内从时刻t_1到t_2的温度改变来确定。D内热量的改变等于

$$\iiint_D c(x_1,x_2,x_3)\rho(x_1,x_2,x_3)\Big[u(x_1,x_2,x_3,t_2)-u(x_1,x_2,x_3,t_1)\Big]dx_1dx_2dx_3. \tag{1.13}$$

其中$\rho(x_1,x_2,x_3)$为物体在点(x_1,x_2,x_3)处的密度，

而$c(x_1,x_2,x_3)$为物体在点(x_1,x_2,x_3)处的比热.令(1.1与(1.13)相等，于是有

$$\iiint\limits_D c\rho\Big[u(x_1,x_2,x_3,t_2)-u(x_1,x_2,x_3,t_1)\Big]dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_S k(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt. \qquad (1.14)$$

因为$u(x_1,x_2,x_3,t_2)-u(x_1,x_2,x_3,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt$,

所以（1.14）左端的积分可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx_1dx_2dx_3\right\}\mathrm{d}t,$$

又由奥氏公式，（1.14）右端花括号内的积分

$$\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_D\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2dx_3.$$

这样一来，对于物体G内的任意容积D，在任意时间间隔(t_1, t_2)内，下边等式成立：

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx_1dx_2dx_3dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2dx_3dt.$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]dx_1dx_2d_3dt=0\ .$$

因为积分号下的函数是连续的，而容积D和时间间隔（t_1，t_2）都是任意的，故对于G内任一点在任何时刻都有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

如果物体是均 匀 的，那 么c、ρ、k都 与(x_1,x_2,x_3)无 关，因此

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\ .$$

以t'代$\frac{k}{c\rho}t$，然后再把t'改写成t，方程就成为下边形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\ .$$

这就是三维空间的热传导方程（1.05）.

在一维情形，描述热的传导过程的温度函数，应当满足下边方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

当外界环境不随时间变化时，这时温度函数 u 也与时间t无关，因此它满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0.$$

这就是方程（1.04）．这方程称为拉普拉斯方程或称调和方程。

§3．解偏微分方程时增添附加条件的必要性

偏微分方程既经提出，人们首先发现的事实就是：一个微分方程或偏微分方程能有无穷多个解．在初等的情形，求得的解，总含有一个或几个任意常数或函数，这样，一般就说得到了“通解”．在整个十八世纪，人们多集中精力在求这种“通解”．

但是，在我们解决具体的力学、物理学问题时，问题不是在求方程式的任何解，而是要求其中一个适合某些补充条件的解．这些补充条件，我们称为定解条件．在定解条件中，描述介质开始时情况的，称为初始条件，而描述在边界上受到约束的条件，称为边界条件．

从常微分方程及一阶偏微分方程对于“通解”的了解，如果我们要求既适合方程，同时又适合定解条件的解，只需要在“通解”的表达式里，挑选适当的任意元素，使它满足定解条件．但事实上，对偏微分方程来说，除掉少数的情况外，刚巧这种挑选，就是最困难的．自然会提出：对于“通解”的意义如何理解？当时采取了这种观点，若对含有任意已知元素的定解条件，我们已求得一个解，那么，把这任意已知元素在可能范围内变动时，在极常有的情况下，我们就可以获得方程式的任何解，就是所谓“通解”．

就是采取了这种观点，柯西和外尔斯特拉斯，才差不多在同一个时期，在一个广泛的情况下，解决了当时常微分方程理论里的基本问题，就是解的存在的证明．我们要注意，一直到他们为止，除掉若干个初等可积的情形外，一个常微分方程或偏微分方程有解的事实，并不明显，也完全没有证明过．而证明的这个事实，恰正是在有补充条件的条件下，才解决了问题．

解的存在定理的证明，不只有理论意义，同时也提出了具体解决问题的方法．

在数学物理中，要研究各种物理过程．例如对物体的热的传导问题．如果我们只是泛泛地提出研究物体的热的传导问题，即使在物体中热的传导规律已经知道，还是没有多大意义的．物体究竟如何传热，还取决于具体的条件．物体边界导热处于什么样的条件下？物体表面和周围介质热交换的情况怎样？热交换能力强或热交换能力弱，都会引起不同的反映，因而热的传导也将是不同的．热的传导规律还应该取决于开始时刻（通常称为“初始时刻”）的状态．这些具体条件规定了具体的物理过程，在数学物理中总是研究具体过程，不作泛泛的研究．

下面我们对热传导问题的附加条件进行具体的分析．

若开始时刻物体的温度分布表示为$u_0(x, y, z)$，$(x, y, z) \in G$．

我们来考查边界条件．一般讲，在物体的表面处，物体与周围介质会有热交换．在通常温度下，在Δt时间内，通过物体表面的面元ΔS散失到周围介质中的热量为

$$\Delta Q = h(u-\theta)\Delta S \Delta t,$$

其中$\theta(x,y,z,t)$是和物体接触处的介质温度，u是物体表面的温度，h称为物体对这介质的热交换系数。

在物体表面上任取一块曲面S_1，对此再在物体G内部取一块曲面S_2，使S_1与S_2有共同的边界而围成一个体积V，那末在时间区间（t_1,t_2）内通过表面S_1与S_2从V流出的热量为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_2} k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1}h(u-\theta)dSdt.$$

根据热量守恒原理，它应等于

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt.$$

因此有

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_2} k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1}h(u-\theta)dSdt$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt.$$

令$S_2\to S_1$，则V的体积缩为零，于是有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1}\left[k\frac{\partial u}{\partial n}-h(u-\theta)\right]dSdt=0.$$

由于（t_1,t_2）任意，S_1任意，故在任一时刻，物体表面上任一点应有

$$k\frac{\partial u}{\partial n}-h(u-\theta)=0\,.$$

这就是温度应满足的边界条件。

如果物体与周围介质之间的热交换能力很强时，物体表面的温度，可认为与周围介质的温度一致，则边界条件近似地可写为

$$u\big|_S = \theta,$$

其中S表示G的边界。

如果物体与周围介质的热交换能力很弱，就是我们常说的"物体表面绝热"则边界条件可近似地写为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0.$$

所以热传导方程的边界条件一般地有三种形式：

（1） $u|_S = f(x,y,z,t)$， $(x,y,z)\in S$， $t>0$；

（2） $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(x,y,z,t)$， $(x,y,z)\in S$， $t>0$；

（3） $\left[k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_S = f(x,y,z,t)$，

$$(x,y,z)\in S, \qquad t>0.$$

热传导方程带有第一种形式的边界条件的问题，称为第一边值问题；带有第二种形式的边界条件的问题，称为第二边值问题；带有第三种形式的边界条件的问题，称为第三边值问题。

如果在某物体的局部考察热传导过程，以致边界的影响在研究的时间范围内达不到所研究的地方，或虽能达到但影响很小，则此时对方程只附加初始条件而没有边界条件，这种问题通常称为柯西问题或初值问题。

注意，当研究的问题是稳恒状态的温度分布时，附加条