高中数学教材难点讲析

陕西人民教育出版社

高中数学教材难点讲析

安兆甲　编

陕 西 人 民 教 育 出 版 社

高中数学教材难点讲析

安兆甲　编

陕西人民教育出版社出版

（西安长安南路吴家坟）

陕西省新华书店发行　　华县印刷厂印刷

787×1092毫米1/32开本　7.5印张　140千字

1987年5月第1版　1988年1月第2次印刷

印数：16,001—36,140

ISBN 7—5419—0029—X/G·25

定价：1.30元

前　言

目前，中学数学“双基”的教学问题，已有许多成型的材料可供参考。关于中学数学教材难点的研究，在一些数学杂志上也有不少专题性的文章。但对这些材料总要进行认真地选择，并加以取舍才能运用于教学，而这一工作往往是十分艰难的。能不能写一本关于分析及处理教材难点的读物，以便直接服务于教学，特别是对于初参加教学工作的青年教师，起到一点促进作用，为提高数学教学质量打点基础。这就是我要编写这本小册子的想法。

我认为一个有志于人民的教育事业的教师，如果没有“三个三年的循环周期”（就是三个三年的教学实践）是不大可能搞好数学教学工作的。第一个三年，要细心地写好教案，教后写“后记”；第二个三年，先写教学提纲，教后写教案；第三个三年，就是编写教学讲义。这本小册子就是在我的“教学讲义”的基础上，并重新翻阅了有关资料编写而成的。

这本小册子，包括三部分内容：

一、关于数学概念的教材难点处理；

二、关于定理、公式、法则的教材难点处理；

三、关于数学方法的教材难点处理。

在这本小册子里，直接或间接地引用了他人的某些研究成果，书中难以一一注明，编者深感抱歉，在此谨向他们表示感谢。这本小册子编出之后，陕西省教育科学研究所的霍

振化、王勇同志对本书稿作了多处修改、补充，史志云、田增伦同志审阅并提出了宝贵意见，林光歆同志为本书绘制了全部插图，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1985.5.

目　录

一、关于数学概念的教材难点处理

中学数学知识所包括的概念是十分广泛的，但总的来说，不外乎数、式、形三方面的概念。在教学难点数学概念的时候，着重要解决好以下几个问题：①由于数学概念是现实世界空间形式和数量关系及其本质属性在人们头脑里的反映，因此，首先要注意概念的产生和形成过程；②要理解和掌握概念，必须正确地认识概念的定义方式以及概念之间的内在联系；③定义表明了概念的内涵，分类表明了概念的外延，只有弄清概念的内涵和外延，才能准确地运用概念。

下面就数、式、形三方面概念的教材难点作点必要的分析，并谈点处理教材的意见。

(一)有关"数"的概念

1. 复数概念

[难点分析]我们所要完成的是数集的第五次扩充。为什么要扩充数集？扩充数集应遵循什么原则？如何具体去扩充？这些问题都是需要一一作以回答的。

扩充实数集，建立复数集，有两种方案：一种是以几何为基础的，即把复数看成是表示在直角坐标平面内的点的数对；一种是以代数为基础的，即以代数本身的需要提出，如要使方程 $x^2=-1$ 有解，就得引入新数 i，又按照数集扩充的原则建立复数数集，最后又取得实际的解释。中学课本，

一般都是以代数方法为主，辅之以几何解释。

在历史上一个新概念比较难产的话，那么这个概念在教学中往往也是难点所在，复数概念就是一例。从虚数出现到正式被人们承认，中间经历了两个世纪。法国人笛卡儿也曾只承认正数而摒弃复数和负数，甚至一些大数学家如牛顿和莱布尼兹都曾不认识复数。“复数”这一名称是德国数学家高斯给出的，直到1777年瑞士数学家欧拉才系统研究了复数理论，发现了复数与指数函数和三角函数的关系，并首先使用了虚数单位的符号。

因此，如何使学生明确复数概念、理解复数概念，这是我们所遇到的第一个困难。事实上，由于教材中，一般只是形式地给出复数的定义及其运算法则，学生也往往只是形式地接受这些知识，而没有很好地理解其实质，因而在学了复数概念以后，还要问 $a+bi$ 到底是虚数还是复数？他们虽然学会了复数的分类，但并不十分清楚概念间的内在联系。

还有，在教学过程中，怎样渗透代数结构的观点，同时又强调运算，要使二者兼得也有一定的困难。

总之，从发展实数概念到建立复数集，在教材教法方面还有待于我们去作深入地探讨。

〔教材处理〕

(1) 引入和形成概念

① 这里，主要是发展实数概念，引入新数 i，得到复数 $a+bi$，建立新的数集。

我们知道，数的概念的产生和发展，是客观存在和实际所需要的。数集扩充的必要性对引进复数概念是必须的，因此需要先简要地复习一下已经学过的数集，从而使学生注意

到数集的每一次扩充总是由于旧有的数集与解决具体问题的矛盾而引起的。例如，为了解决有些量与量的比值（如正方形的对角线和它的一边不可公度）不能用有理数来表示的矛盾，而引进新数——无理数，建立了实数集。

类似的问题，是形如 $x^n=a$（n 是自然数）这样的方程，当 n 是大于零的偶数，且 $a<0$ 时，是解不出来的。这就需要把实数集扩充，即建立一个新的数集，在这个数集里能使负数开偶次方，于是问题便迎刃而解。具体地说，要使最简单的偶次方程 $x^2=-1$ 有解，这就需要引进一个新数 i，把它叫做虚数单位，并规定

(i) 它的平方等于 -1，即

$$i^2=-1;$$

(ii) 实数与它进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立。

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再同实数 a 相加；由于满足乘法交换律，从而可以把结果写成 $a+bi$。这里我们把形如 $a+bi$（a、$b\in R$）的数叫做**复数**，其中 a 与 b 分别叫做复数 $a+bi$ 的**实部**和**虚部**。全体复数组成的集合，一般用 C 来表示。

为了明确各类数之间的关系，把复数分类如下：

$$\begin{array}{c}\text{复数}\\ z=a+bi\end{array}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{实数}(b=0)\\ z=a\end{array}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{虚数}(b\neq0)\\ z=a+bi\end{array}\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0,\ b\neq0)\\ z=bi\\ \text{非纯虚数}(a\neq0,\ b\neq0)\\ z=a-bi\end{cases}\end{cases}$$

我们用 $a+bi$ 来定义复数，其中把 a 看成一项，把 bi 看成另一项，即复数由上面两项非同类项组成。这里用代数形式描述复数，显得结构清晰，用它解决有关代数问题，也非常自然。

② 上述复数概念的引入，实际是把复数看成有序实数对而直接用 $z=a+bi$ 来表示的，下面我们给复数以几何解释。

一个复数可以用复平面上的点 $Z(a,b)$ 来表示（图1（A）），也可用复平面上的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示（图1（B））。

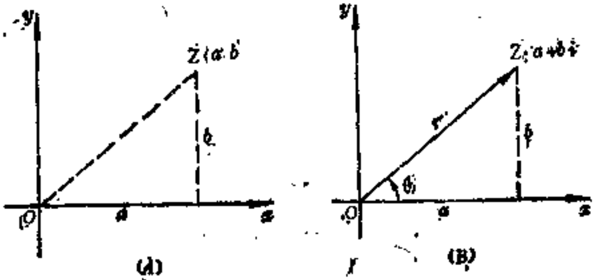


图 1

用几何形式来描述复数，显得形象直观，也容易解释复数的运算法则，解决一些几何问题也较简单。

如图1（B），设向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度为 $r(r>0)$，且 $\overrightarrow{OZ}$ 与 x 轴正向夹角为 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，显然 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，因此一个复数还可以用三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 来表示。

为了方便起见，把复数的三角函数式改用指数形式来表示，即

$$z=re^{i\theta},$$

其中 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，这就是著明的欧拉公式。利用复数指数式将更有利于复数的乘、除、乘方、开方运算。

③ 注意：不论用什么方式表示复数，都必须具备两个要素。如复数代数式 $a+bi$，是由实部 a 和虚部 b 来确定；复平面上的点是由横坐标 a 和纵坐标 b 来确定；向量 $\overrightarrow{OZ}$ 则取决于终点的坐标或取决于向量的长度与方向；复数的三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 或指数式 $re^{i\theta}$ 都取决于向量的长度 r 与 θ 的值。这里 a、b、r、θ 均为实数。

还要注意：复数代数式 $a+bi$、点 $Z(a, b)$、向量 $\overrightarrow{OZ}$、复数三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，两两成一一对应关系。事实上，复数是用来表示复平面上点的位置的数，因而复数和复平面上的点成一一对应关系；而大小相等，方向相同的向量，都可以平行移动成位置向量（即起点是原点的向量），因而复平面上的点和位置向量成一一对应关系；同样复数和复平面上的位置向量也成一一对应关系，如图 2。

图 2

如前所述，我们可以用一对实数 a、b 来描述一个复数 $a+bi$，我们也可以用另一对实数 r、θ 来描述同一个复数，因而

$$z=a+bi \Longleftrightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

所以又如图3。

掌握这种一一对应关系，是理解复数概念和掌握复数运算的重要环节，事实上，在解有关复数问题时，我们常常要运用这种一一对应关系去进行矛盾转化。

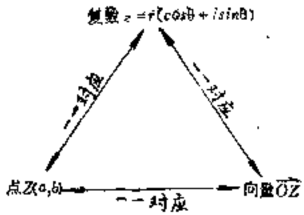


图 3

（2）理解和掌握概念

① 虚数是不是“虚无飘渺”呢？其实虚数并不虚，它在数学、物理、力学等方面都有许多应用．现在，复数已成为科学技术中普遍使用的一种工具．虚数之“虚”，只剩下历史上的意义了．

② 我们引入虚数单位 i，为什么要作两条规定？

第一，因为命名虚数单位以后，负数就可以开平方，而且 i 可以和实数一起进行四则运算，所以才得到了复数 $a+bi$ （a、$b\in R$），并建立了新的数集——复数集。

第二，由实数集扩充到复数集，同样遵循着数集扩充的四条原则，因而实数集⊂复数集，实数集里的主要性质，在复数集里仍成立。但在复数集里又有实数集里所没有的性质，如 i 的周期性；实数集里原有元素的运算，在复数集里仍成立，但实数集里元素间的大小关系，却在复数集里不一定成立。

同时，复数集解决了实数集所不能解决的问题，如一元

二次方程的求解问题，即方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，也有解。

通常我们把表示复数的平面叫做复平面，它由平面上两条相互垂直且有相同长度单位的数轴组成。横轴 x 叫做实轴，表示实数 a；纵轴 y 叫做虚轴（除去原点），表示纯虚数 bi。

直角坐标平面和复平面是同一种平面的两种不同的解释，二者是有根本区别的，其区别在于直角坐标平面的原点是横轴与纵轴的公共点，而复平面的原点则属于实轴，即虚轴在原点处是断开的；在直角坐标平面内每一点由一对有序的实数来确定，曲线是用方程 $F(x, y)=0$ 来表示的，而复平面内的每一点由一个复数来确定，曲线则是用 $f(z)=0$ 来表示的。

向量有位置向量和自由向量之称。两个向量当且仅当长度相等，方向相同时，就是相等向量。在这一规定下，向量可以根据需要进行平移，于是相等的向量表示同一个复数。例如，向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 和 $\overrightarrow{OZ}$ 就表示同一个复数 $1+i$（图 4）。当然

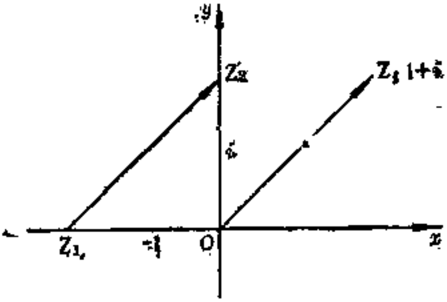


图 4

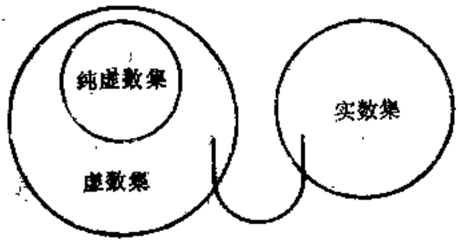
这并不意味着向量的终点也表示同一个复数。

④ 扩充概念的数学，在中学数学里要遇到好几次，如数的概念的扩充，指数概念的扩充，角的概念的扩充等。

我们把实数集扩充到复数集，从教学角度考虑，须使学生明确以下几点：

1°扩充的必要性。我们从代数本身的需要引入新数 i，得到复数 $a+bi$，并建立了复数集，最后又得到实际的解释。

2°新旧概念的区别性。如图 5 所示



复数集

图 5

图形说明实数集与虚数集不相交，它们都是复数集的真子集，它们的并集就是复数集；纯虚数集是虚数集的真子集，它可以同非零实数所组成的集一一对应。

3°新旧概念的联系性。显然，在复数 $a+bi$ 中，当 $b=0$ 时即为实数，所以实数是复数的特殊情形，实数作为复数的一部分而被包含在复数中。但值得注意，纯虚数与实数是两种绝然不同的数，因此，我们不能把实数所适合的规律硬搬到纯虚数上来用。

⑤ 定义概念，一般有三种方式：

1°种概念加类差的定义方式；

2°发生定义方式；

3°揭示外延的定义方式。

我们从复数的分类，应该引导学生明确各概念的定义方式及其逻辑关系。例如，有理数、无理数和实数；实数、虚数和复数都是后者的外延包括了前者的外延，是从属的。而有理数和无理数、实数和虚数，它们都是同一概念的类概念，它们的外延是完全不同的，所以它们是并列的。当然在不同的领域还可以指出有以下几种关系的概念。

同一关系：如等腰三角形顶角的平分线也是底边上的中线和高——同是一条线，内涵不同，外延却完全相同。

交叉关系：如等腰三角形与直角三角形——它们的内涵不同，而外延有一部分是相同的。

对立关系：如等边三角形与不等边三角形——内涵有部分是对立的，外延是互相排斥的。

矛盾关系：直角三角形与非直角三角形——内涵互相否定。

注意：对立关系概念有时还有中间概念，如等边三角形与不等边三角形两个对立概念的中间概念是等腰三角形，而矛盾概念则没有中间概念。因此，对于两个矛盾概念来说，是有“非此即彼”的推理规律。

实践证明，在教学过程中，掌握概念间的种属关系，是帮助学生深刻理解概念的重要内容。

(3) 运用概念

数学概念是“双基”教学的基本内容，是基础知识的起

点，是逻辑推理的依据，是正确、合理、迅速运算的基本保证。

关于复数概念的练习，大致有以下几类：

① 有关虚数单位性质的练习题：

规定 i^0 的意义是 1，i^{-m} 的意义是 $\frac{1}{i^m}$ $(m\in N)$，求证：

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i$$

对一切 $n\in Z$ 都能成立。

② 熟悉基本概念的练习题：

1°下列各数中，哪些是复数，实数，虚数，纯虚数，有理数，无理数？

$$\frac{22}{7},\ \pi,\ -\sqrt{3},\ \sqrt[3]{27},\ 0,\ 1+3i,$$
$$-5i,\ 0.\dot{0}1\dot{3},\ 0.1010010001\cdots\cdots.$$

2°m 为何实数时，复数 $z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$ 是实数，虚数，纯虚数？

注意：欲判别复数 $f(m)+ig(m)$ $(m\in R)$ 的情况，可转化为解代数方程或不等式的问题。

③ 给出复数，描出、画出表示该复数的点、向量的练习题：

已知复数 4，$-3\frac{1}{2}$，$\sqrt{3}i$，$2-\sqrt{2}i$，$-4-6i$，试描出、画出表示这些复数的点、向量。

④ 化复数代数式为三角函数式的练习题：

1°下列各式的左端是不是复数三角函数式？为什么？右端呢？