同济考研数学辅导丛书

TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导

（数学三）

主　编　陈学华

副主编　陈光曙　夏海峰

- 多年的考研数学辅导实践表明，让考生通过演练历年试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的复习方法.
- 本书由长期从事考研数学辅导的一线教师编写，在系统整理历年考研真题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容进行了分类解答，给出了一般的解题方法和常用技巧.
- 通过解答和研习历年考试真题，不仅可以分析出命题特点，把握主要知识点以及各知识点间的关联特性，感悟到常用的解题思路与方法，而且可以总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的数学素养和解题能力.

同济大学出版社

同 侪 考 研 数 学 辅 导 丛 书
TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导

（数学三）

主　编　陈学华
副主编　陈光曙　夏海峰

同济大学出版社

内容简介

本书汇编和整理了1987—2005年共19年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题(数学三),根据试题类型及涉及的知识内容进行了分类解答,给出了各题的一般解题方法和常用技巧。为了拓宽读者的解题思路,对部分题目还给出了多种解法或证法。本书还以教育部制订的最新"数学考试大纲"为依据,对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注,帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、线性代数和概率论与数理统计各章节的内容、重点和方法,训练和开拓数学思维,提高分析能力、解题能力和复习效果。

本书试题解析详细,讲解透彻,尤其适合参加全国硕士研究生入学统一考试(数学三)的考生复习使用,也适合在读新生用作学习大学数学的习题训练参考书以及从事大学数学教学和考研数学辅导的教师用作教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学试题分类解析与应试指导.数学.3/陈学华主编.—上海:同济大学出版社,2005.10
(同侪考研数学辅导丛书)
ISBN 7-5608-3104-4

Ⅰ.历… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第081094号

同侪考研数学辅导丛书
历年考研数学试题分类解析与应试指导(数学三)
主　编　陈学华
副主编　陈光曙　夏海峰
责任编辑　曹　建　责任校对　杨江淮　装帧设计　李志云

出版发行　同济大学出版社
(上海四平路1239号　邮编200092　电话021-65983475)
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂印刷
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　13.75
字　数　350000
印　数　1—4100
版　次　2005年10月第1版　2005年10月第1次印刷
书　号　ISBN 7-5608-3104-4/O·275
定　价　20.00元

前　言

总结我们多年的考研数学辅导经验，我们认为，让考生通过演练历年考研数学试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的应考复习方法。因为考研复习是一种目的性很强的应试复习活动，考生必须紧紧围绕“应试”这个核心来复习，而最能反映这个核心特征的载体就是往年的考试试题。通过往年的考试试题解答、研习，可以分析出命题规律动向，把握主要知识点以及各知识点间的关联特点，感悟到常用的解题思路与方法，从而总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的知识水平和应试能力。

有鉴于此，我们汇集和分类整理了 1987—2005 年共 19 年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题(数学三)编成了本书。我们根据试题类型及涉及的知识内容进行了分类解答，给出了各题的一般解题方法和常用技巧。为了拓宽读者的解题思路，对部分题目还给出了多种解法或证法。同时，我们还以教育部制订的最新“数学考试大纲”为依据，对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注，帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、线性代数和概率论与数理统计各章节的内容、重点和方法，训练和开拓数学思维，提高分析能力、解题能力和复习效果。

全书共分七章，每章包括“考试内容和要求”、是非题、填空题、选择题、解答题等部分。所有试题均按照年份排列，试题后面括号里给出的就是该试题的考试年份。各编者分工如下：陈光曙编写第 1,2,6 章，夏海峰编写第 3,4,5 章，陈学华编写第 7 章，全书最后由陈学华统稿。

本书的编写还得到阎超栋、史红波等同志的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中疏漏、错误和不足之处在所难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　　录

第 1 章　一元函数微分学

1.1　考试内容及要求

1.1.1　函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的性质　初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质

考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题的函数关系式；

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(5) 了解数列极限的函数极限(包括左极限与右极限) 的概念；

(6) 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系；

(7) 了解极限的性质及极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限；

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型；

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理) 及其简单应用.

1.1.2　一元函数微分学

考试内容

导数的概念　导数的几何意义和经济意义　函数的可导性与连续性之间的关系　导

数的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数、隐函数的导数　高阶导数　一阶微分形式的不变性　微分的概念和运算法则　微分中值定理　洛必达法则　函数单调性　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点、渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

考试要求

(1) 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系,了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念);

(2) 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则,掌握反函数与隐函数求导法以及对数求导法;

(3) 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数;

(4) 了解微分的概念,导数与微分之间的关系,以及一阶微分形式的不变性,会求函数的微分;

(5) 理解罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理,了解柯西(Cauchy)中值定理,掌握这三个定理的简单应用;

(6) 会用洛必达法则求极限;

(7) 掌握函数单调性的判别方法及其应用,掌握函数的极值、最大值和最小值的求法,会解较简单的应用题;

(8) 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点和斜渐近线;

(9) 掌握函数作图的基本步骤和方法,会作简单函数的图形.

1.2　判断是非题

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.　(　　)　(1987)

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$,所以$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

应填:非.

评注　本题的主要知识点是极限存在的充分必要条件为左、右极限存在且相等.

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 均存在,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在.　(　　)　(1988)

解　易举反例如下:$f(x) = x, g(x) = \dfrac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{1}{x} = 1$,而$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在.

应填:非.

评注　本题的主要知识点是函数极限的运算性质.

3. 若函数 $f(x)$ 的极值点是 x_0,则必有 $f'(x_0) = 0$.　(　　)　(1988)

解　易举反例如下:$f(x) = |x|$,显然 $x_0 = 0$ 为极小值点,但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

应填：非.

评注　本题的主要知识点是可导函数的极值点必为驻点，反之不对.

1.3　填空题

1. 曲线 $y = x + \sin^2 x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是______.　(1989)

解　易知点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$ 在曲线上，$y' = 1 + 2\sin x\cos x$，$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$，利用切线方程得切线方程为

$$y - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$y = x + 1.$$

故应填：$y = x + 1$.

评注　本题的主要知识点为曲线的切线方程.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n + 3\sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) =$ ______.　(1990)

解　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 3\sqrt{n} - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n + 3\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n + 3\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$$

$$= 2.$$

故应填：2 .

评注　本题的主要知识点为分子、分母分别乘以 $\sqrt{n + 3\sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ 的共轭因子 $\sqrt{n + 3\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}$，这是求极限的一般技巧.

3. 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0) = 0$ 且 $f'(0) = b$，若函数

$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) + a\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则常数 $A =$ ______.　(1990)

解　因为 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = A$，即

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + a\sin x}{x} = A,$$

利用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}[f'(x)+a\cos x]=f'(0)+a=b+a=A.$$

故应填:$a+b$.

评注 本题的主要知识点为函数连续性以及洛必达法则.

4. 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$,且在点$(-1,0)$ 有公共切线,则 $a=$ ______,$b=$ ______,$c=$ ______. (1991)

解 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$,由题意得

$$\begin{cases}f(-1)=0,\\ g(-1)=0,\\ f'(-1)=g'(-1),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(-1)^3-a=0,\\ b+c=0,\\ 3+a=-2b,\end{cases}$$

解得 $a=-1,b=-1,c=1$.

故应填:$-1,-1,1$.

评注 本题的主要知识点为导数的几何意义.

5. 设 $f'(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}$ 在点 $x=$ ______处取得极小值______. (1991)

解 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x, f''(x)=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$,由归纳法易知 $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$,令 $f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x=0$ 得 $x=-(n+1)$,这时

$$f^{(n+2)}(-(n+1))=[n+2-(n+1)]e^{-(n+1)}>0.$$

故 $x=-(n+1)$ 为 $f^{(n)}(x)$ 的极小值点,其极小值为 $-\frac{1}{e^{n+1}}$.

故应填:$-(n+1),-\frac{1}{e^{n+1}}$.

评注 本题的主要知识点为高阶导数、函数驻点以及极值的判别法.

6. 设商品的需求函数为 $Q=100-5p$,其中 Q,p 分别表示需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于1,则商品价值的取值范围是______. (1992)

解 由于 $Q'(p)=-5$,故需求弹性为

$$\varepsilon=p\cdot\frac{Q'(p)}{Q(p)}=-\frac{5p}{100-5p},$$

令 $|\varepsilon|>1$,得 $p>20$ 或 $10<p<20$,又由 $Q(p)=100-5p=0$,得最高价格为 $p=20$,所以商品价格的取值范围是$(10,20]$.

故应填:$(10,20]$.

评注 本题的主要知识点为需求函数以及需求弹性的概念.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ______.　(1993)

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{10}{x^2}}{5+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{6}{5}$.

故应填：$\dfrac{6}{5}$.

评注　本题的主要知识点为 $\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}(x\to\infty)$ 以及等价无穷小代换的技巧.

8. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______.　(1993)

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}=\frac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2,$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=3\arctan 1=\frac{3}{4}\pi.$$

故应填：$\dfrac{3}{4}\pi$.

评注　本题的主要知识点为复合函数的导数.

9. 已知 $f'(x_0)=-1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ______.　(1994)

解

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(f(x_0-2x)-f(x_0))}{2x}+\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\right]=1,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}=1.$$

故应填：1.

评注　本题的主要知识点为导数的定义. 由题意知，$f'(x_0)=-1$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}=-1,$$

而所求的极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}$，

故只需求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$即可，从而利用 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，可求得极限.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $f^{(n)}(x)=$ ______. (1995)

解 $f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1=2(1+x)^{-1}-1$,易得 $f^{(n)}(x)=2(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$.

故应填:$2(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$.

评注 本题的主要知识点为高阶导数.

11. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数,则 $\mathrm{d}y=$ ______. (1996)

解 两边取对数得,$\ln x=y\ln y$,再对 x 求导数得,

$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}y'=y'(1+\ln y),$$

所以 $y'=\dfrac{1}{x(1+\ln y)}$,从而 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}$.

故应填:$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}$.

评注 本题的主要知识点为对数的求导法则以及微分的概念.

12. 设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点,若在该点的切线过原点,则函数应满足的关系是______. (1996)

解 因为 $y'=2ax+b$,所以过 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0),$$

因为该切线过 $(0,0)$ 点,从而有 $y_0=(2ax_0+b)x_0$,又因为 (x_0,y_0) 在抛物线上,可得 $y_0=ax_0^2+bx_0+c$,从而

$$ax_0^2+bx_0+c=2ax_0^2+bx_0.$$

即 $ax_0^2=c$,所以函数满足 $\dfrac{c}{a}\geqslant 0$,b 为任意实数.

故应填:$\dfrac{c}{a}\geqslant 0$,b 为任意实数.

评注 本题的主要知识点为导数的几何意义.

13. 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$,其中 f 可微,则 $\mathrm{d}y=$ ______. (1997)

解

$$y'=f'(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)},$$

所以

$$\mathrm{d}y=\left[f'(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\right]\mathrm{d}x.$$

故应填:$\mathrm{d}y=\left[f'(\ln x)\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\right]\mathrm{d}x$.

评注　本题的主要知识点为复合函数的导数以及微分的概念.

14. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ______. (1998)

解　$y'=nx^{n-1}$，$y'\Big|_{x=1}=n$，所以在(1,1)处点切线方程为 $y-1=n(x-1)$，令 $y=0$ 得 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$.

故应填：e^{-1}.

评注　本题的主要知识点为曲线的切线方程以及重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

15. 设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中，Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时，关于 K 的弹性为______. (2001)

解　由 $Q=1$，即 $AL^{\alpha}K^{\beta}=1$ 得出作为 L 的函数，$K(L)=A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}$. 根据弹性公式，有

$$\varepsilon=L\frac{K'(L)}{K(L)}=L\frac{-\dfrac{\alpha}{\beta}A^{-\frac{\alpha}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}}=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

故应填：$-\dfrac{\alpha}{\beta}$.

评注　本题的主要知识点为生产函数和弹性公式.

16. 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ______. (2002)

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\frac{1}{1-2a}}=e^{\frac{1}{1-2a}}$，

所以原式 $=\dfrac{1}{1-2a}$.

故应填：$\dfrac{1}{1-2a}$.

评注　本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ 以及连续函数的极限性质.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 其导数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围______.

(2003)

解　要使 $f(x)$ 的导数在 $x=0$ 连续，则

(1) 要求 $f(x)$ 连续. 由初等函数的连续性知，$x\neq0$ 时 $f(x)$ 连续；于是只需考查 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性. 我们分 3 种情况讨论.

① 当$\lambda<0$时,令$x_n=\dfrac{1}{2n\pi},n=1,2,\cdots$,则$x_n\to 0$.

当$n\to\infty$时,$f(x_n)=x_n^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x_n}\to+\infty$.

因此,当$\lambda<0$时,$f(x)$不连续.

② 当$\lambda=0$时,令$x_n=\dfrac{1}{2n\pi},y_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi},n=1,2,\cdots$,则$x_n\to 0,y_n\to 0$.

当$n\to\infty$时,$f(x_n)=\cos\dfrac{1}{x_n}=1,f(y_n)=\cos\dfrac{1}{y_n}=-1$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$.
可见此时$f(x)$也不连续.

③ 当$\lambda>0$时,若$x\to 0$,则$|x|^{\lambda}\to 0$,而$|\cos\dfrac{1}{x}|\leqslant 1$,从而

$$|f(x)|=|x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}|\leqslant|x|^{\lambda}\to 0\quad(x\to 0),$$

即此时$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$,$f(x)$连续.

所以,为使$f(x)$连续,当且仅当$\lambda>0$.

(2) 要求$f(x)$可导(即$\lambda>0$时).由初等函数的可导性,知$x\neq 0$时$f(x)$可导,当$x=0$时,由定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x},$$

为使$f(x)$在$x=0$处可导,仅需上式极限存在,类似(1)的讨论知,这当且仅当$\lambda-1>0$,即$\lambda>1$.

(3) 在$f(x)$可导的条件,即$\lambda>1$下,要求$f'(x)$连续,注意到此时

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

类似(1)的讨论知,为使$f(x)$的导函数在$x=0$连续,仅需$\lambda-2>0$,即$\lambda>2$.所以$\lambda>2$.

故应填:$\lambda>2$.

评注 本题的主要知识点为分段函数连续性和可导性的研究,其方法是常规方法.如利用连续可导的定义以及选取不同的子列证明函数的不连续等.

18. 已知曲线$y=x^3-3a^2x+b$与x轴相切,则b^2可以通过a表示为$b^2=$______.

(2003)

解 由曲线与x轴相切知切点必为曲线与x轴的交点,即函数$f(x)=x^3-3a^2x+b$的零点,令$f'(x)=3x^2-3a^2=0$,得$x^2=a^2$;故切点为$(x_0,0)$,其中$x_0^2=a^2$.

由于切点必在曲线上,代入曲线方程$y=x^3-3a^2x+b$,得$0={x_0}^3-3a^2x_0+b$,故

$$b=3a^2x_0-{x_0}^3=x_0(3a^2-x_0^2)=2a^2x_0,$$

从而

$$b^2 = (2a^2 x_0)^2 = 4a^4 x_0^2 = 4a^6.$$

故应填：$4a^6$.

评注　本题的主要知识点为函数的导数以及切线方程.

19. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$，则 $a =$ ______，$b =$ ______.　(2004)

解　由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$，故分母极限必为 0，即$\lim\limits_{x\to 0}e^x - a = 0$，所以 $a = 1$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - 1}(\cos x - b) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - 1}(\cos x - b) = \lim_{x\to 0}(\cos x - b) = 1 - b = 5,$$

故 $b = -4$.

故应填：$a = 1, b = -4$.

评注　本题的主要知识点为极限的求法，技巧为无穷小等价代换

$$\sin x \sim x \sim e^x - 1 \quad (x\to 0).$$

20. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ______.　(2005)

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$，而$\dfrac{2x}{x^2+1} \sim \sin\dfrac{2x}{x^2+1}\quad (x\to\infty)$.

故

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x}{x^2+1} = 2.$$

故应填：2.

评注　本题的主要知识点为无穷小量的等价代换，即$\dfrac{2x}{x^2+1} \sim \sin\dfrac{2x}{x^2+1}\quad (x\to\infty)$.

1.4　选择题

1. 下列函数在其定义域内连续的是　(　　)　(1987)

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$

(B) $f(x) = \begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x > 0.\end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases}x+1, & x < 0,\\ 0, & x = 0,\\ x-1, & x > 0.\end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$

解　对于(A)：$f(x) = \ln x + \sin x$，其定义域为 $x > 0$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. 而(B)，(C)，(D) 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，但在 $x = 0$ 点都不连续.

故应选(A).

评注 本题的主要知识点为函数的定义域以及初等函数的连续性.

2. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $a < x_1 < x_2 < b$,则至少有一点 ξ 满足( ) (1987)

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1) \quad (x_1<\xi<b)$

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi<x_2)$

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a) \quad (a<\xi<x_2)$

解 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且 $a<x_1<x_2<b$,易知 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导(当然连续),由拉格朗日中值定理知,$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$,其中 $x_1<\xi<x_2$.

故应选(C).

评注 本题的主要知识点为拉格朗日中值定理的条件和结论.

3. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时 ( ) (1989)

(A) $f(x)$ 与 x 是等阶无穷小量 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等阶无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3\neq 1.$$

故应选(B).

评注 本题的主要知识点为洛必达法则以及无穷小量的阶的比较.

4. 设函数 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是 ( ) (1990)

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

解 取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}$,则

$$\begin{aligned} f(x_n)&=\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &=\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

应选(B).(也可利用排除法求解.)

评注 本题的主要知识点为函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的判断.

5. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$,且有 $f'(0)=b$,其中 a,b 为非零常数,则 ( ) (1990)

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导 (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$ (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

解 由条件知 $f(1+\Delta x)=af(\Delta x)$,$f(1)=af(0)$,

故 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{\Delta x}$$

$$=a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab.$$

即 $f'(1)=ab$.

故应选(D).

评注 本题的主要知识点为导数的定义

6. 下列各式中正确的是. ( ) (1991)

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　(D) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

解 $$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x}=\mathrm{e}^0=1.$$

故应选(A).

评注 本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 以及洛必达法则. 这里 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$, 其中用到 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0$.

7. 当 $x\to 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个是比其他三个高阶的无穷小量.

( ) (1992)

(A) x^2　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

解 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$, 即 $1-\cos x$ 与 $\sqrt{1-x^2}-1$ 是与 x^2 同阶的无穷小量, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sec x\sec x\tan x}{2}=0$, 所以 $x-\tan x$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量.

故应选(D).

评注 本题的主要知识点为等价无穷小量的基本性质及阶的比较, 特别是常用的等价无穷小量应熟记.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( ) (1993)

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续　　(C) 连续但不可导　　(D) 可导