全国重点大学
研究生
入学数学试题解析

河 南 教 育 出 版 社

全 国 重 点 大 学

研究生入学数学试题解析

新乡师范学院数学系
《研究生入学数学试题解析》编写组

河南教育出版社

全 国 重 点 大 学
研究生入学数学试题解析
新乡师范学院数学系
《研究生入学数学试题解析》编写组

责任编辑　刘宗贤

河南教育出版社出版
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本25.125印张494千字
1985年12月第1版1985年12月第1次印刷
印数：1—14,300册

统一书号7356·41　　　定价3.95元

前　言

为适应社会主义现代化建设培养各类高级专门人才的需要，配合做好招收攻读硕士学位研究生工作，为满足准备攻读硕士学位研究生广大考生学习的需要，我们编写了《研究生入学数学试题解析》一书。

全书解析了二十九所重点高等学校和中国科学院数学研究所及应用数学研究所数学考题。内容涉及到数学分析、高等代数、近世代数、实变函数、泛函分析、复变函数、微分方程、概率论以及高等数学等九门基础课、专业基础课和专业课。书中不仅对考题做了解答，而且对部分难度较大的试题的证明思路和有关注意的问题进行了注释，以利训练读者严密的逻辑论证能力和提高综合解题技巧。

本书试图反映全国重点院校和有关科研单位招收硕士研究生数学课程考题的特点和要求，对报考硕士研究生应试数学课程的考生起一定的指导作用。可供综合复习大学数学课程参考之用。

本书编著和审校工作由新乡师范学院数学系付主任郑双元同志主持。数学分析部分由王元、柴新宽同志编写高福洪副教授和高书贤同志审校，高等代数部分赵文正同志编写常

德厚同志审校，近世代数部分常德厚、夏兴国同志编写和审校，实变函数和泛函分析部分李文林同志编写高福洪副教授审校，复变函数部分高宗升同志编写王德飚副教授审校，微分方程部分，常微分方程杨六花同志编写吕绍明副教授审阅，王雪生副教授审校，偏微分方程刘中元副教授编写和审校，概率论部分程祖伟、韩东同志编写李少甫副教授审校，高等数学由以上有关同志编写马书浩同志审校。

河南省数学研究所所长韩文法同志在百忙中对本书进行了审定，新乡师范学院数学系副系主任穆青田副教授和任保经副教授对本书的编写工作给予热情帮助和指导，编者表示深切感谢。

对提供试题的全国二十九所重点高等学校和中国科学院数学研究所及应用数学研究所有关同志的大力支持致以衷心的谢意。

由于我们的水平有限，编写的时间也仓促，书中如有谬误、疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编者

1983年10月

目　录

第一部分　数学分析

第二部分　高等代数

第三部分　近世代数

第四部分　实变函数与泛函分析

第五部分　复变函数论

第六部分　微分方程

第七部分　概率论

第八部分　高等数学

第一部分　数学分析

一、中国科学院数学研究所

（一）（10分）设：$0<x<1$，试证：$\sum\limits_{i=1}^{n}x^i(1-x)^{2i}\leqslant\frac{4}{23}$

（二）（10分）设：$f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$，证明不存在一个函数以$f(x)$为其导函数。

（三）（15分）设α、β为实数，试讨论积分$\int_0^{\infty}x^{\alpha}\sin x^{\beta}dx$的收敛性。

（四）（15分）计算三重积分：

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant1\\ x^2+y^2-z^2\geqslant\frac{1}{2}}} zdxdydz$$

（五）（15分）设$U_n(x)$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$在$[a, b]$上连续可微，$\max\limits_{\substack{x\in[a, b]\\ n\geqslant1}}|U_n'(x)|\leqslant M$，$M$为有限数。又$\{U_n(x)\}$在$[a, b]$点点收敛，试证$\{U_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收

敛。

（六） （17分）设函数$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，$\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=1$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{dx}{[f(x)]^n}}=1$

（七） （18分）设$f(x)$为$[1,\ 2]$上的连续正值函数，令

$$M_n=\int_1^2 x^n f(x)dx,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

证明幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{M_n}$的收敛半径$r=2$。

〔解答〕

（一） 证：$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^{2n}=\frac{1}{1-x(1-x)^2}-1$

$$=\frac{x(1-x)^2}{1-x(1-x)^2},\quad x\in(0,\ 1)$$

而函数 $f(x)=\frac{x(1-x)^2}{1-x(1-x)^2}$在$(0,\ 1)$上的最大值为

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{23}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^{2n}=\frac{x(1-x)^2}{1-x(1-x)^2}\leqslant\frac{4}{23}$

又当$x\in(0,\ 1)$时，$x^n(1-x)^{2n}$ 恒为正，因而对于任意的n均有 $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i(1-x)^{2i}\leqslant\frac{4}{23}$。

（二） 证：假定$F(x)$以$f(x)$为其导函数，即：$F'(x)=f(x)$对$x\in(-\infty,\ \infty)$均成立。

由于$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=|0|\neq f(0)=1$，即$f(x)$在$x=0$处有第一类间断。也就是说$F(x)$的导函数在$x=0$处有第一类间断。此与导函数特性（若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=K$则$f'_+(x_0)=K$，即导函数无第一类间断点）相矛盾。故不存在任何函数以$f(x)$为其导函数。

（三） 若$\beta\neq 0$令$x^\beta=t$，则$x=t^{\frac{1}{\beta}}$，$dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt$，于是，

$$\int_0^{+\infty}x^\alpha\sin x^\beta dx=\int_0^{+\infty}t^{\frac{\alpha}{\beta}}\sin t\cdot\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin tdt$$

$$=\frac{1}{\beta}\left[\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin tdt+\int_1^\infty t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin tdt\right]$$

$$=\frac{1}{\beta}[I_1+I_2]$$

$\because$当$t\to 0$时，$t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t$与$t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}$等价。

$\therefore$当$\frac{\alpha+1}{\beta}>-1$时，$I_1$收敛

当$\frac{\alpha+1}{\beta}\leqslant -1$时 I_1发散

又$\because \int_1^x \sin t dt$有界，且当$1-\frac{\alpha+1}{\beta}>0$，$t\to\infty$时，

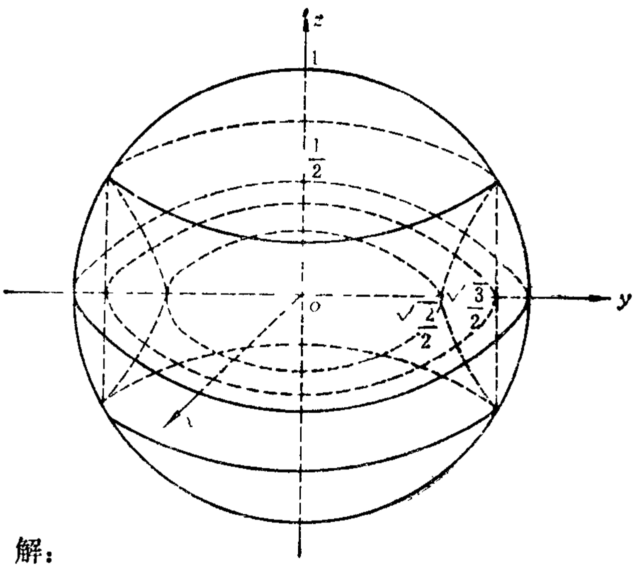
$t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}$单调递减趋于0，故当$\frac{\alpha+1}{\beta}<1$时，$I_2$收敛，

当$\frac{\alpha+1}{\beta}=1$时，$I_2=\int_1^{+\infty}\sin t dt$发散，显然当

$\frac{\alpha-1}{\beta}>1$时I_2也发散。

若$\beta=0$对任何α值，显然原积分发散。

综上知：当$-1<\frac{\alpha+1}{\beta}<1$时，原积分收敛。



（四） 解：

解方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} z=\pm\frac{1}{2} \\ x^2+y^2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

用柱坐标：

从而：$\iiint\limits_V zdxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}rdr\int_{-\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}}^{\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}}zdz$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{3}/2}^{1}rdr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}zdz=0+0=0$$

〔注〕 由图可知，积分区域是对称的，而被积函数为一奇函数，因而知其积分值为0.

（五） 证：设$U_n(x)\to U(x)$，$x\in[a,b]$，但$U_n(x)\not\rightrightarrows U(x)$.
即，存在$\varepsilon_0>0$，对任意N，均有$n>N$及$x_n\in[a,b]$使$|U_n(x_n)-U(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$，不妨设$x_n\to x_0$，显然，$x_0\in[a,b]$.

$\because |U_n(x_0)-U(x_0)|$

$=|U_n(x_0)-U_n(x_n)+U_n(x_n)-U(x_n)+U(x_n)$
$\quad -U(x_0)|$

$\geqslant|U_n(x_n)-U(x_n)|-|U_n(x_n)-U_n(x_0)|-$

$|U(x_n)-U(x_0)|$

由中值定理：$|U_n(x_n)-U_n(x_0)|\leqslant|U_n'(\zeta)|\ |x_n-x_0|$

再由题中条件及$x_n\to x_0$，可使其小于$\frac{\varepsilon_0}{3}$，同样有

$|U(x_n)-U(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{3}$成立。（这是由于，$|U_n(y)-U_n(x)|\leqslant M\ |y-x|$，取极限即得：

$$|U(y)-U(x)|\leqslant M\ |y-x|\ )$$

从而，对一切N，都有$n>N$，使：

$$|U_n(x_0)-U(x_0)|\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{3}-\frac{\varepsilon_0}{3}=\frac{\varepsilon_0}{3}$$

这与$U_n(x)$在x_0点应收敛矛盾。

故必有：$U_n(x)\rightrightarrows U(x)$，　$x\in[a,\ b]$。

〔注〕　此题也可用有限复盖定理直接加以证明。

（六）　证：令 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$，则$\max\limits_{x\in[a,\ b]} g(x)=1$，且$g(x)>0$

任给$0<\varepsilon<1$，由连续性必存在区间$E\subset[a,\ b]$，使对一切$x\in E$，有$1-\varepsilon\leqslant g(x)\leqslant 1$，

从而$\int_a^b g^n(x)dx\geqslant\int_E g^n(x)dx\geqslant(1-\varepsilon)^n(mE)$

故　$\sqrt[n]{\int_a^b g^n(x)dx}\geqslant(1-\varepsilon)\sqrt[n]{mE}$　（mE 表示区间E的长度）。

$\therefore\ \varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g^n(x)dx}\geqslant 1$。

又显然$\sqrt[n]{\int_a^b g^n(x)dx} \leqslant \sqrt[n]{(b-a)}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b g^n(x)dx} \leqslant 1$。

故$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \frac{dx}{[f(x)]^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b g^n(x)dx} = 1$。

（七） 证：类似上题证法易知：若$\bar{f}(x)$，$\varphi(x)$均为$[a, b]$上的正值连续函数，且$\max\limits_{x\in[a,b]} \bar{f}(x) = M$，则有：

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [\bar{f}(x)]^n \varphi(x)dx} = M$。

于是在此题中，$\bar{f}(x)=x$，$\varphi(x)=f(x)$，$\max\limits_{x\in[1,2]} \bar{f}(x)$

$=2$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = 2$。

而$r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = 2$。

即知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{M_n}$的收敛半径$r=2$。

二、北 京 大 学

（一） 求下列之极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2}$；