现代数学基础

XIANDAI SHUXUE JICHU

许志才　殷志祥　许　峰　编著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础

许志才　殷志祥　许　峰　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了现代数学的基础理论和某些应用知识. 全书分为十二章. 第一章介绍了泛函分析中的 Banach 空间理论、线性算子理论和非线性分析等基本知识. 第二章介绍了微分流形与黎曼几何的基本理论，以及张量分析与微分形式. 第三章是关于偏微分方程的现代理论. 第四章到第六章，属于运筹学中的图论部分，涉及的内容有网络最大流问题、最小费用流问题、覆盖与装填等. 第七章和第八章是近世代数的基本内容，主要介绍群论和环论. 第九章到第十一章是最优化方法部分，分别介绍了传统优化算法以及现代优化算法中的模拟退火算法、基本遗传算法、小生境遗传算法、多目标优化遗传算法等. 第十二章介绍了分形与混沌.

本书可供工科硕士、博士研究生阅读，亦可供相关专业的教师与科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

现代数学基础／许志才，殷志祥，许峰编著 －北京：科学出版社，2005.8

ISBN 7-03-016215-3

I. 现… II. ①许…②殷…③许… III. 数学－高等学校－教材 IV. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 099596 号

责任编辑：杨瑰玉／责任印制：高 嵘

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北京山德新印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2005年8月第一次印刷 印张：9

印数：1～2000 字数：230 000

定价：15.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学是关于现实世界的数量关系和空间形式的一门科学[1]. 随着自然科学和技术的发展，数学所研究的数量关系和空间形式的储备不断扩大起来，以致数学的这个一般定义已含有越来越丰富的内容.

数学是一门具有独特的研究对象和研究方法(即逻辑推理方法)的特殊科学，但是只有在积累了足够多的实际材料之后，人们才有可能明确地认识到它的独立地位. 最早在公元前6~前5世纪，古希腊人就已具有这样的明确认识. 在此之前的数学发展当然属于数学的萌芽时期，而公元前 6~前 5 世纪正是**初等数学**(elementary mathematics)时期的开端. 在这两个最早的时期内，数学的研究只涉及很有限的基本概念的储备，这些还是在历史发展的很早阶段由于经济生活上的最简单的需要而发生的. 最初的力学和物理问题都可以由这些基本数学概念来解决.

在17世纪中，自然科学和技术中的新问题迫使数学家集中注意于创造方法，以便对运动、量的变化过程以及几何图形的变换进行数学研究. 随着在解析几何中使用变量和微积分的建立，开始了变量数学(mathematics of variable quantities)即**高等数学**(higher mathematics)时期.

由于数学所研究的数量关系和空间形式继续扩大范围，在19世纪初叶就需要把数学研究对象的扩大过程本身作为数学研究的一个论题有意识地进行处理；面临的任务是要以相当普遍的观点对可能有的各式各样的数量关系和空间形式进行系统研究. 在这方面第一个重大进步就是 Lobachevskii 创立了“拟想”几何学. 这类研究的开展在数学中引进了新的特征，以致19和20世纪的数学发展到了一个特殊的**现代数学**(modern mathematics)时期.

在17和18世纪所积累起来的大量实际资料，使得进行深入

的逻辑分析并把这种分析同新的观点相结合成为必要. 这时数学同自然科学的关系，虽然紧密的程度在实质上并未消减，却已具有十分复杂的形式了. 重大新理论的产生，不仅是由于自然科学或技术的直接需要，也由于数学本身的内在要求. 19 世纪初叶和中叶在全部数学分析中占有中心地位的**复变函数论**(theory of functions of a complex variable)，大体上正是这样发展起来的. 作为数学内在发展的结果而兴起的理论的另一个精彩例子是 Lobachevskii 几何学.

比较直接地和不断地依靠力学与物理学的需要而成长起来的，是向量和张量分析. 向量和张量概念转向无穷维量，则是在**泛函分析**(functional analysis)的框架内发生的，并与现代物理的需要有着密切的联系.

这样，由于数学的内在需要，也由于自然科学的新的需要，数学所研究的数量关系和空间形式大大地扩充起来，在数学中因此有了存在于任何群的元素之间的、向量之间的、函数空间中的算子之间的关系，各种各样任意维数的空间形式，等等.

在 19 世纪开始的这个数学发展阶段,其本质上新异之处在于研究的数量关系和空间形式必须扩大范围的问题本身，已成为数学家自觉地和积极地感到兴趣的对象. 在从前，如负数和复数的引入及其运算法则的准确形成这类问题需要长期努力，而现在数学的发展则要求拟定一些方法来有计划地建立新的几何和代数系统.

数学对象的极大扩充引起人们密切关注数学“基础”问题，即批判地修正数学的初始原理(公理)，构成定义和证明的严格系统，以及批判地考察这些证明中所用到的逻辑方法. 对于在发展个别数学理论时数学家在实际工作提出的逻辑严格性的标准要求，直到 19 世纪末才完全形成. 深入和仔细分析对证明的逻辑严格性的要求，数学理论的构成，以及数学问题的算法可解性和不可解性问题，就是**数理逻辑**(mathematical logic)的研究对象.

19 世纪初叶，数学分析的应用范围有了新的大扩展. 以前，

需要大量数学工具的物理学分支是力学和光学，现在又加上了电动力学、磁学和热力学，连续介质力学这个重要分支也得到广泛发展. 技术上对数学的需要也在迅速增加，作为力学和数学物理一些新领域的基本工具而被深入发展的是**常微分方程**(ordinary differential equation)、**偏微分方程**(partial differential equation)和**数学物理方程**(equation of mathematical physics)的理论.

微分方程理论是流形拓扑学研究的出发点. 这里也是**代数拓扑学**(algebraic topology)中的"组合"方法、"同调"方法和"同伦"方法的起点. 在**集合论**(set theory)和**泛函分析**(functional analysis)基础上产生了其他拓扑学分支，并导致系统构造一般**拓扑空间**(topological space)理论.

在对自然的研究和对技术问题的求解中，**概率论**(probability)方法成为对微分方程方法的一种重要补充. 如果说在 19 世纪初叶概率方法主要用于弹道学和误差理论，那么在 19 世纪末和 20 世纪初由于**随机过程**(stochastic process)论的建立和**数理统计**(mathematical statistics)工具的发展，概率论有了许多新的应用.

数论的许多个别的结果和思想，在 19 世纪在各个方向上发展成为严整的理论，可以分为**代数数论**(algebraic number theory)、**解析数论**(analytic number theory)、**逼近论**(approximations theory).

代数学研究重点转移到一些新的代数学领域：群、环、域理论以及一般代数结构. 在代数学和几何学交界处，产生了**连续群理论**(theory of continuous group)，其方法后来渗入数学的一切新领域以及其他自然科学中.

初等几何学和射影几何学主要是从研究其逻辑与公理基础的观点上引起数学家的注意的，但是吸引大量科学力量进行研究的几何学基本领域是**微分几何学**(differential geometry)、**代数几何学**(algebraic geometry)和**黎曼几何学**(Riemannian geometry).

作为在无理数的严格算术理论和集合论的基础上系统构造数学分析的结果之一，产生了**实变函数论**(theory of functions of a real variable).

在应用纯数学研究结果解决实际问题时，往往要求给出问题的数值形式的解. 但是，即使对问题进行了充分的理论分析之后，这通常还是极困难的. 因此，在 19 世纪末和 20 世纪初产生的分析和代数的数值解法，随着电子计算机的制造和使用逐渐发展成为一门独立的数学分支：**计算数学**(computational mathematics).

现代数学的这些突出的基本特征，上面列举的数学各分支的基本研究方向，在 20 世纪初叶已经形成. 尽管在 20 世纪，数学有了突飞猛进的发展，这种数学各分支划分的框架在很大程度上被保留下来. 但是，数学本身发展的要求，各科学领域的“数学化”，数学方法向许多实际活动领域的渗透，以及计算技术的迅速进步，导致数学家对数学各分支研究兴趣的变迁和融合，并导致一系列新的数学科目的出现. 例如，**自动机理论**(theory of automata)、**信息论**(information theory)、**对策论**(theory of games)、**运筹论**(operations research)、**控制论**(cybernetics)、**分形理论**(fractal theory)、**混沌理论**(chaotic theory)、**数量经济理论**(mathematical economics)、**控制系统**(control system)、**组合分析**(combinatorial analysis)、**图论**(graph theory)、**编码理论**(coding theory)、**离散分析**(discrete analysis)、**最优控制的数学理论**(mathematical theory of optimal control)等等.

20 世纪数学的发展有四大特点[2]，即从局部转移到整体，从低维转移到高维，从可交换转移到不可交换，从线性转移到非线性. 几何学和代数学的对立统一依然存在，从哲学上反映了空间和时间之间的对立统一. 与**同调论**(homology theory)、**K-理论**(K-theory)和**李群**(Lie group)有关的技巧和概念被广泛运用. 在最近 20 年间，**量子场论**(quantum field theory)和**弦理论**(string theory)为数学注入了新观念. **理论物理学**(theoretical physics)对数学的影响还将在 21 世纪延续下去.

当今世界不得不面对一股潮流[3]：**科学的数学化**. 它对于人类文化的发展，对于世界的未来，究竟意味着什么，姑且置而不论，但对于现实的教育与科学活动的冲击，则已是不可回避的事

实. 科学论著中数学术语的充斥，甚至到了同行之间都难以互相交流的地步. 如果有人告诉你，某本经济著作有一半是数学公式与数学推理，你一点也不应奇怪；如果你看到一篇工商管理的博士论文，竟然全都是高深的数学语言，也未必值得惊异. 这就是21世纪科学的数学化.

本书主要是为工科博士生所写的. 我们希望通过本书引导读者在**泛函分析**、**微分流形**、**微分方程**、**近世代数**、**图论与网络**、**分形与混沌**、**小波分析及其应用**等范围广泛而又饶有兴趣的领域做一次有益的漫游，让读者尽情地欣赏现代数学中种种妙趣横生的高超思想，而又不完全为繁琐艰深的逻辑证明所困扰. 要实现这一似乎很矛盾的目标，我们的方法是，从每一专题中挑选那些最典型的材料，并尽可能借助直观形象与初等原型去表述它. 我们认为，要了解一个数学结论，真正重要的不是逻辑证明的细节，而是对问题实质的全局性理解，恰好这方面往往被形式推理掩盖了. 一旦抓住理解一个结论的主导想法，严格的证明通常就不太困难，而对大多数应用工作者也许根本就不必要. 正是由于摆脱了细节的纠缠，我们才得以在较小的篇幅中为读者提供较多的有用信息. 更重要的是，我们希望以这种方式来使读者看到，现代数学并非真正如乍一看来那样远离人间烟火，完全窒息在严格的逻辑桎梏中而成为少数人的独占品. 实际上，它所研究的问题及所用的方法都深深植根于现代科学的现实土壤中，从而完全能为各专业的读者所理解与应用.

本书的前三章由许志才教授编写，第四至八章由殷志祥教授编写，最后四章由许峰教授编写. 本书的作者们自提笔至今，数修其稿，终于撰成全书，呈献于读者，但限于水平，错误难免，恳请读者惠予指正.

编著者

2005 年 5 月

目　录

第一章　泛函分析

泛函分析是现代数学分析的一部分，其基本论题是研究函数 $y=f(x)$，其中至少一个变量在无穷维空间上变化．大体上，这种研究可分成三个部分：① 引入和研究这种无穷维空间；② 研究最简单的函数，即当 x 和 y 都在一个无穷维空间中取值[这些函数称为**泛函**(functional)]；③ 研究一般的上述类型的函数——**算子**(operater)．对线性函数 $x\mapsto f(x)\in Y$，$x\in X$，即线性算子已经有了最完美的研究．线性算子本质上是把**线性代数**(linear algebra)推广到无穷维的情况．把经典分析和代数的方法结合起来是泛函分析方法的特征，这导致初看起来相距甚远的数学分支之间产生了关联．

泛函分析作为一门独立的数学分支始于 19 世纪末而最终建立于 20 世纪二三十年代，这一方面是由于研究特殊类型的线性算子——积分算子和与其有关联的积分方程的影响，另一方面则是现代数学内在发展的结果．量子力学也对泛函分析的发展有巨大的影响，是因为它的一些基本概念，例如能量转化成无穷维空间上的一些线性算子．

本章只涉及泛函分析研究的最基本的三个内容：Banach 空间、线性算子、非线性分析．

1.1　Banach　空　间

首先让我们回顾一下熟知的 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，它由所有形如 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的 n 个实数的有序组构成．每个 x 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量或者点．每个向量按公式

$$|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2} \tag{1-1}$$

计算它的模长. $|x|$ 也称为 **Euclid 范数**. 它具有直观上明显的性质:

(1) $|\alpha x|=|\alpha||x|$;

(2) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(3) $|x|\geqslant 0$; $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

以上 $x,y\in\mathbf{R}^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$. 若 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一序列, x 是一个向量, 则

$$x^{(k)}\to x\Leftrightarrow\left|x^{(k)}-x\right|\to 0\quad(k\to\infty) \tag{1-2}$$

人们注意到: $\mathbf{R}^n$ 中的极限理论及基于极限概念的分析理论的许多结果, 仅依赖于公式(1-2)与模长性质(1)~(3), 而与模长的定义(1-1)无关, 因而实际上并不依赖于 Euclid 空间的特殊构造. 这一具有重大意义的事实启示出: 在某个向量空间上定义极限之后, 就可以将 Euclid 空间中那些仅依赖于性质(1)~(3)的概念与结论推广到该空间, 从而得到传统分析学的一个具有广阔发展余地的拓广. 以上想法引向赋范空间概念, 它的形式定义在逻辑上是很简单的.

定义 1.1 设 X 是 $\mathbf{K}$ (= $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)上的向量空间, 如果对每个 $x\in X$, 指定了一个实数 $\|x\|$, 称为 x 的**范数**, 它满足以下**范数公理**:

(i) 齐次性: $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;

(ii) 三角不等式: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;

(iii) 正定性: $\|x\|\geqslant 0$; $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$.

以上 $x,y\in\mathbf{R}^n,\alpha\in\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 则称 X[或写作 $(X,\|\cdot\|)$]为**赋范空间**.

依定义 1.1, $\mathbf{R}^n$ 就是一个实赋范空间, 其中的范数就是 Euclid 范数(1-1).

与特殊的 Euclid 范数不同, 定义 1.1 所规定的一般范数并没有计算公式. 初看起来, 这似乎是一缺点, 但实际上, 这正是范数概念的优点. 本质的东西其实只是公理(i)~(iii), 人们不应该被

某个具体的范数计算公式所约束. 例如, 在 $\mathbf{R}^n$ 中就可以采用不同于(1-1)的范数:

$$\|x\| = \max|x_i| \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1-3}$$

容易证明, 范数(1-3)亦满足公理(i)~(iii).

以下假设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个给定的赋范空间.

为了加强与平常 Euclid 空间的类比, 我们将大量借用通常的几何术语. 例如, X 中的元素称为点或向量, 向量 x 亦解释为从 0 到 x 的有向线段, 而 $\|x\|$ 即其"长度". 三角不等式(ii)无非是说: 三角形一边之长不超过另两边之和. 如同在 R^n 中一样, 由公理(ii)易推出:

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| \tag{1-4}$$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \tag{1-5}$$

其中 $x, y, x_i \in X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 不等式(1-4)和(1-5)的几何意义显而易见. 如果在 X 中定义距离:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X) \tag{1-6}$$

则易直接验证, X 在这个距离下成为一个度量空间. 对于 X 中的任何两个子集 A, B, 定义它们之间的距离为

$$d(A, B) = \inf\|a - b\| \quad (a \in A, b \in B) \tag{1-7}$$

定义集合 A 的直径为

$$\operatorname{diam} A = \sup\|x - y\| \quad (x, y \in X) \tag{1-8}$$

当 A 的直径有限时, 称 A 是有界集.

设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列, x 是 X 中的一点. 几乎原封不动地套用 R^n 中的极限定义, 规定

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1-9}$$

这时说序列 $\{x_n\}$ 以 x 为极限, 记为 $\lim x_n = x\ (n \to \infty)$. 以上意义的收敛就称为以**范数收敛**. 读者从微积分学课程中熟知的许多极限性质, 如极限的惟一性、收敛序列的有界性、极限运算性质等, 都可以推广于赋范空间中的序列极限, 且无需逐一重新论证, 只需指明在 Euclid 空间中所叙述性质的证明仅用到模长性质(1)~(3)

就够了. 亦可将无穷级数概念引进到赋范空间.

至此，读者或许会认为，赋范空间中的极限论原来很简单：无非照搬老的极限定理而已. 下面就要指出一个不能照搬的极限定理. 在经典分析中，最重要的定理无疑是：

Cauchy 收敛原理 序列$\{x_n\}$收敛的充要条件是

$$\lim|x_m - x_n| = 0 \quad (m,n \to \infty) \tag{1-10}$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m,n \geqslant N : |x_m - x_n| < \varepsilon \tag{1-11}$$

然而，一般赋范空间中并没有类似的结果，因此需要以下定义.

定义 1.2 若赋范空间 X 中的序列$\{x_n\}$满足以下 Cauchy 条件：

$$\lim\|x_m - x_n\| = 0 \quad (m,n \to \infty)$$

则称序列$\{x_n\}$为 **Cauchy 序列**. 如果 X 中所有 Cauchy 序列都收敛，则说 X 是完备的，或称 X 为 **Banach 空间**①.

直接看出，收敛序列必为 Cauchy 序列，然而 Cauchy 序列未必收敛；只有在 Banach 空间，Cauchy 序列才是收敛序列.

容易证明 Euclid 空间$\mathbf{R}^n$是 Banach 空间. 应用上常见的 Banach 空间大多以函数空间(包括序列空间)的形式出现，其中最简单而又最常用的是 L^p 函数空间和 C^m 函数空间，它们分别属于“坏函数”的空间和“好函数”的空间，二者在实际应用及其他函数空间的研究中均起到基本作用，同时在工程技术问题中也经常遇到它们. 下面考虑一些 Banach 空间例子.

例 1 设 $J=[a,b](a<b)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，$q = p/(p-1)$ $(p=1, q=\infty; p=\infty, q=1)$. 以 m 记 Lebesgue 测度(度量的推广). 对 J 上的任意一个可测函数 $u(x)$，令

$$\|u\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |u|^p \,\mathrm{d}m\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \inf_{A \subset J, mA=0} \sup_{x \in J \setminus A} |u(x)|, & p = \infty \end{cases} \tag{1-12}$$

① S.Banach(1892~1945)，波兰数学家，赋范空间与线性算子理论的主要奠基者.

$$L^p(J)=\left\{u:\|u\|_p<\infty\right\}$$

若 $u\in L^p(J)$，则称 $\|u\|_p$ 为 u 的 L^p **范数**，而称 u 为 **p 次可积函数**(当 p 有限时)或**本性有界函数**(当 p 无限时). 如果 $u,v\in L^p(J)$ 几乎处处相等，则将它们看做是同一个元素. 下面证明 $L^p(J)$ 依 L^p 范数是一个 Banach 空间. 只需验证范数公理和完备性.

(1) 验证范数公理. 直接看出 $\|\cdot\|_p$ 满足公理(i)和(iii)，因此只需验证公理(ii). 用微分学方法不难证明不等式：

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha}\leqslant \alpha x+(1-\alpha)y\quad (0<\alpha<1;x,y\geqslant 0)\tag{1-13}$$

现在利用(1-13)来建立著名的 Hölder 不等式：

$$\|uv\|_1\leqslant\|u\|_p\|v\|_q\tag{1-14}$$

不妨设 $0<\|u\|_p$，$\|v\|_q<\infty$ [否则公式(1-14)自动成立]，于是

$$\frac{\|uv\|_1}{\|u\|_p\|v\|_q}=\int_a^b\left(\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|v|^q}{\|v\|_q^q}\right)^{1/q}\mathrm{d}m\leqslant\int_a^b\left(\frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p}+\frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}\right)\mathrm{d}m$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

这表明不等式(1-14)成立.

现在利用 Hölder 不等式来验证三角不等式. 设 $u,v\in L^p(J)$，则

$$\begin{aligned}\|u+v\|_p^p&=\int_a^b|u+v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_a^b|u||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m+\int_a^b|v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m\\&\leqslant\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)\left\||u+v|^{p-1}\right\|_q\\&=(\|u\|_p+\|v\|_p)\|u+v\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

这推出 $\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p$.

(2) 证明完备性. 设 $\{u_n\}$ 是 $L^p(J)$ 中的 Cauchy 序列，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m,n\geqslant N:\|u_m-u_n\|<\varepsilon\tag{1-15}$$

取 $n_1>0$，使得

$$\|u_n-u_{n_1}\|_p<2^{-1}\quad(\forall n\geqslant n_1)$$

次取 $n_2>n_1$，使得

$$\|u_n-u_{n_2}\|_p<2^{-2}\quad(\forall n\geqslant n_2)$$

如此下去，得出升列 $n_1<n_2<\cdots$，使得

$$\|u_n-u_{n_k}\|_p<2^{-k}\quad(\forall n\geqslant n_k;k=1,2,\cdots)\tag{1-16}$$

令 $v_k=u_{n_{k+1}}-u_{n_k},v=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k|$，则

$$\|v\|_p=\left[\int_a^b\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|)^p\mathrm{d}m\right]^{1/p}=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}|v_k|\right\|_p$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|v_k\|_p\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{-k}<\infty$$

上面第二个等号用到 Levi 定理，第一个不等式用到(1-15)，第二个不等式用到(1-16). 由此可见，$|v|^p\in L^1$，从而 v 几乎处处有限. 这推出级数 $\sum v_k$ 在 J 上几乎处处收敛，从而序列 $\{u_{n_k}\}$ 几乎处处收敛. 设 $u_{n_k}\to u,a.e.(k\to\infty)$，取定 $\varepsilon>0$，由(1-15)，有

$$\|u_n-u_{n_k}\|_p<\varepsilon\quad(n,n_k\geqslant N)$$

由 Fatou 定理，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\|u_n-u\|_p^p=\int_a^b\lim_{k\to\infty}|u_n-u_{n_k}|^p\mathrm{d}m\leqslant\lim_{k\to\infty}\|u_n-u_{n_k}\|_p^p\leqslant\varepsilon^p$$

故得 $\|u_n-u\|_p\leqslant\varepsilon\,(\forall n\geqslant N)$，这表明

$$u=u_n+(u-u_n)\in L^P(J),\quad\|u_n-u\|_p\to0\quad(n\to\infty)$$

至此，完备性得到证明.

下面转向“好函数”的空间 $C^m(J)\,(m\in\mathbf{Z}_+)$.

例 2　Banach 空间 $C^m(J)\,(m\in\mathbf{Z}_+)$. 令

$$C^m(J)=\{u:u^{(k)}\in C(J),0\leqslant k\leqslant m\}$$