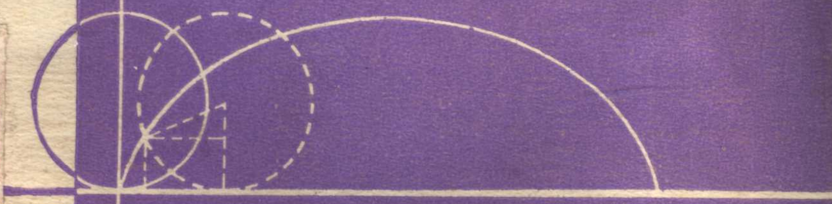
陕西省高等师范函授教材

初等数学

第三册

（平面解析几何部分）



陕西省高等师范函授教材

初等数学

第 三 册

（平面解析几何部分）

陕西教育学院选编

陕西人民出版社出版

陕西省新华书店发行

汉中地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.625 插页 1 字数 204,800

1980年2月第1版 1981年5月第2次印刷

印数46,201—51,200

书号：K7094·208 定价：0.80 元

目　录

第十一章　直线和圆

§ 31　直　线 …… 1
一、直线的倾角和斜率 …… 1
二、直线的方程 …… 4
三、直线间的相互关系 …… 11
四、点到直线的距离 …… 21
习题一 …… 29
§ 32　圆 …… 33
一、圆的方程 …… 33
二、直线和圆的相互关系 …… 38
三、曲线与方程 …… 47
习题二 …… 60

第十二章　圆锥曲线

§ 33　抛物线 …… 63
一、抛物线的定义和标准方程 …… 63
二、抛物线的几何画法 …… 69
三、抛物线的切线和法线方程 …… 71
四、抛物线的法线的性质 …… 78
习题三 …… 80
§ 34　椭　圆 …… 82
一、椭圆的定义和标准方程 …… 82
二、椭圆的基本性质 …… 87

三、椭圆的几何画法……………………………………94
四、椭圆的切线和法线……………………………………97
五、椭圆的法线的性质及其应用………………………103
习题四……………………………………………………106
§ 35 双曲线……………………………………………108
一、双曲线的定义和标准方程…………………………108
二、双曲线的基本性质…………………………………114
三、双曲线的几何画法…………………………………126
习题五……………………………………………………130
§ 36 抛物线、椭圆和双曲线的共同性………………132
一、椭圆和双曲线的准线………………………………133
二、抛物线、椭圆和双曲线的统一定义………………141
三、圆锥割线……………………………………………151
习题六……………………………………………………155

第十三章 坐标变换及二元二次方程的讨论

§ 37 坐标变换…………………………………………157
一、坐标轴的平移………………………………………157
二、坐标轴的旋转………………………………………165
习题七……………………………………………………170
§ 38 二元二次方程表示的曲线………………………171
一、形如 $Ax^2+Cy^2=K$ 的方程…………………………172
二、形如 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程……173
三、一般方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$
$=0$ ……………………………………………………177
§ 39 二元二次方程的化简……………………………182

一、有心曲线方程的化简法…………………………183
二、无心曲线方程的化简法…………………………188
习题八……………………………………………193

第十四章　参数方程

§ 40　曲线的参数方程………………………………195
一、参数方程的概念……………………………195
二、求曲线的参数方程…………………………200
习题九……………………………………………209
§ 41　旋轮线和渐开线………………………………211
一、旋轮线…………………………………………211
二、渐开线…………………………………………215
三、利用坐标变换求参数方程…………………220
习题十……………………………………………233

第十五章　极坐标系

§ 42　极坐标概念……………………………………236
一、点的极坐标……………………………………236
二、极坐标和直角坐标的关系…………………239
习题十一…………………………………………245
§ 43　曲线的极坐标方程……………………………246
一、求曲线的极坐标方程………………………247
二、圆锥曲线的统一方程………………………252
三、两种坐标系下曲线方程的互化……………255
四、极坐标方程的图形…………………………260
习题十二…………………………………………264

§44 等进螺线…………………………………………… 267

一、等进螺线的形成和定义……………………… 268

二、等进螺线的性质和图形……………………… 270

三、等进螺线的应用……………………………… 274

习题十三……………………………………………… 280

习题答案 …………………………………………… 282

第十一章　直线和圆

直线和圆是平面图形中最简单和最基本的图形。它们既可以看作动点作直线运动或圆周运动的轨迹，又可以看作一些物体轮廓的几何形象。深入地研究直线和圆的性质，在数学理论上和生产实际中都有重要意义。

这一章着重讨论如何利用坐标来研究直线和圆的问题。这里包括建立这些图形的方程，以及通过它们的方程来研究这些图形的性质或相互关系等问题。并在这个基础上进一步建立一般的曲线方程的概念。

§31　直　线

一、直线的倾角和斜率

在平面上要确定一条直线的位置，只要指出这条直线通过某一个定点和这条直线的方向就可以了。在直角坐标系中，一个定点P_0可以用它的两个坐标x_0、y_0来确定，而一个固定的方向怎样用数值来表示呢？我们自然会想到用这条直线和某坐标轴交角的大小来表示。

我们规定：直线l如果和x轴相交，就把l的向上的方向和x轴的正向所成的最小正角$\alpha(0<\alpha<\pi)$，叫做直线l的倾角。如果l与x轴平行，就说倾角$\alpha=0$。为了明确"向上"的含

义，可以换一种说法，就是，将x轴沿逆时针方向旋转到第一次和直线l平行（或者重合）时所转过的角就叫做直线l的倾角。

按照规定，倾角α的取值范围是 $0 \leqslant \alpha < \pi$。

为了用起来方便，通常不直接用倾角α的值来表示直线的方向，而采用倾角的正切值$tg\alpha$来表示. 它同样可以表示直线的方向。

定义 直线l的倾角α的正切$tg\alpha$叫做l的斜率，记为$k = tg\alpha$。

对于垂直于x轴的直线，其倾角 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，$tg\alpha$是没有意义的，这时我们就说垂直于x轴的直线没有斜率。

在 $0 \leqslant \alpha < \pi$中，除去$\alpha = \frac{\pi}{2}$外，其余的α值与$tg\alpha$是一一对应的。因此，用$tg\alpha$仍然可以表示直线的方向。

一条直线的斜率，可以用直线上一些点的坐标表示出来。我们有下面的定理。

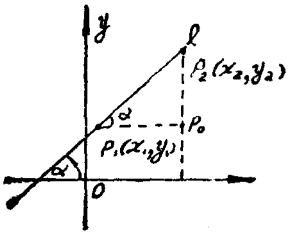
定理 如果$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$是不垂直于x轴的直线l上任意两个点，那么直线l的斜率是

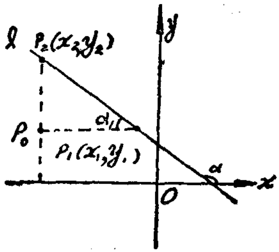
$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

证： 当l与x轴平行时，$\alpha = 0$，且$y_1 = y_2$，显然（1）式成立。当l与x轴不平行时，如图31—1。

如果α是锐角（图a），那么

$$tg\alpha = \frac{|P_0P_2|}{|P_1P_0|} = \frac{P_0P_2}{P_1P_0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$





(a)　　　　　图　31—1　　　　　(b)

如果α是钝角（图b），那么

$$tg\alpha = tg(\pi-\alpha_1) = -tg\alpha_1 = -\frac{|P_0P_2|}{|P_1P_0|}$$

$$= -\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = -\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

所以无论α是锐角或钝角，都有

$$k = tg\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ (1)式得证。

注意：P_1、P_2两点哪一个在上方对表示式（1）是无关紧要的。事实上，交换两点的位置时，两个差式y_2-y_1与x_2-x_1必同时变号，但比值$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$保持不变。

从定义可以看出：

当α是锐角时，斜率$k=tg\alpha>0$；

当α是钝角时，斜率$k=tg\alpha<0$；

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，斜率不存在；

当直线平行于x轴时，$k=tg0=0$。

例　求经过点$P_1(2,-1)$和$P_2(-5,2)$的直线的斜率和倾角。

解：根据斜率公式（1），得

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-1)}{-5-2}=-\frac{3}{7},$$

于是

$$tg\alpha=-\frac{3}{7}\approx-0.4286,$$

$\therefore$ 倾角$\alpha\approx156°48'$，斜率为$-\frac{3}{7}$。

二、直线的方程

1．点斜式

已知直线l的斜率为k，且过定点$P_0(x_0,\ y_0)$，求它的方程。

设直线l上的动点为$P(x,\ y)$，如图31－2。

当P不与P_0重合时，连线P_0P与l有相同的斜率，因而总有

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k,$$

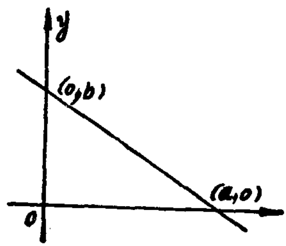


图31—2

即 $y-y_0=k(x-x_0)$． （1）

就是说，动点的坐标x，y必须满足关系式（1）．

当P与P_0重合时，$y-y_0=0$，$x-x_0=0$，x，y也满足关系式（1）。

这就可以说，直线l上所有的点都满足关系式（1）．

反过来，我们可以证明：不在直线l上的点的坐标，一定不满足关系式（1）．这样，关系式（1）就是所求的直线方

程。

更详细地说：方程$y-y_0=k(x-x_0)$是过点(x_0, y_0)，而且具有斜率为k的直线l的点斜式方程。

例 1 已知直线过点（2，－3），且斜率为2，求它的方程，并画出这条直线。

解：把已知点P_0的坐标$x_0=2$，$y_0=-3$和斜率$k=2$代入点斜式方程，得

$$y-(-3)=2(x-2),$$

化简为 $y=2x-7$，

这就是所求的直线方程。

要画出这条直线，只要在它上面取两个点就可以了。已知点(2，－3)在l上，我们在l上另取一点，比如设$x=0$，由方程得$y=-7$，用直尺连结(2，－3)和（0，－7）两点，即可作出直线（如图31－3）。

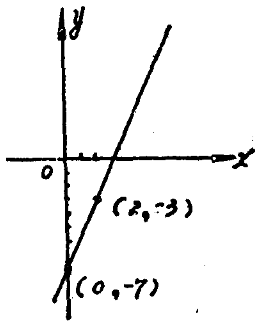


图31—3

2．斜截式

已知直线l的斜率为k，直线在y轴上的截距(即直线与y轴交点的纵坐标)为b，求它的方程。

由这已知条件，可知直线过定点（0，b）。据点斜式得到方程

$$y-b=k(x-0),$$

即 $$y=kx+b, \tag{2}$$

方程(2)就是所求直线的方程，也叫做直线的斜截式方程。

例 2 已知直线的倾角为$\alpha=\frac{\pi}{3}$，在x轴上的截距为

$b=-1$，求它的方程。

解：将$k=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$和$b=-1$代入斜截式方程，得

$$y=\sqrt{3}x-1,$$

这就是所求的直线方程。

3．两点式

已知直线过$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$两点$(x_1\neq x_2)$，求它的方程。

由这两点可确定直线的斜率为$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，取两点中的任一点为定点，比如$P_1(x_1, y_1)$，据点斜式可写出

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \qquad (3)$$

这就是直线的两点式方程。如果$y_2-y_1\neq 0$，那么还可以写成下式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (4)$$

但(4)式不如(3)式容易记住。不取P_1而取P_2作定点，同样可以写出一个方程来，但与(3)式是等价的，留给读者思考。

例3　求出过两点(4，1)和(－5，4)的直线方程。

解：把两点的坐标代入(4)，得

$$\frac{y-1}{4-1}=\frac{x-4}{-5-4},$$

化简为　$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$，

即为所求的直线方程。

当然也可用点斜式来求。先由两已知点求出斜率

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-1}{-5-4}=-\frac{1}{3},$$

再选定一点（4，1），据点斜式得

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-4),$$

整理为 $$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}.$$

4．截距式

已知直线在x轴上的截距为a，在y轴上的截距为b，求它的方程（$a\neq 0$，$b\neq 0$）。

根据已知的两个截距，便知直线经过轴上两点$(a,\ 0)$和$(0,\ b)$，由两点式（4）便可写出方程

$$\frac{y-b}{0-b}=\frac{x-0}{a-0},$$

即 $$-\frac{y}{b}+1=\frac{x}{a},$$

再整理而成

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad (5)$$

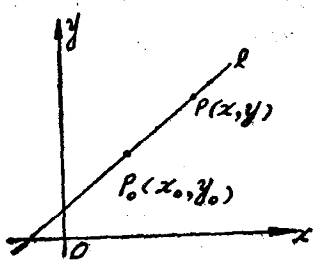


图 31—4

这就是直线的截距式方程。

例 4 已知直线在x轴上的截距是 3，在y轴上的截距是 5，求它的方程。

解： 根据截距式（5），立即得到所求方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1.$$

例 5 把直线方程$y=-3x-15$化为截距式。

解：原方程是斜截式方程，直线在y轴上的截距$b=-15$。再求直线在x轴上的截距a。令$y=0$，则$0=-3x-15$，$x=-5$，$\therefore$ $a=-5$，得所求截距式方程为

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-15}=1.$$

对于上列直线方程的几种形式，不必死记。只要掌握住点斜式，其他形式就不难根据已知条件一一推导出来。我们列出各种形式，是为了便于在具体条件下，灵活地用这些形式来写出直线的方程或研究直线。

对于垂直于x轴的一类直线，因为它们没有斜率，所以不能用上列任何一种形式来写出方程。但因在这样的直线上动点的横坐标x恒为常数而与纵坐标y无关，所以它的方程具有更简单的形式

$$x=a.$$

同样，垂直于y轴的直线的方程具有简单的形式

$$y=b.$$

5．直线方程的一般式

任意一条不垂直于x轴的直线l，它一定有斜率k，并且在y轴上有截距b。它的方程就可用斜截式写出来

$$y=kx+b,$$

再变形为

$$kx-y+b=0,$$

这就是二元一次方程

$$Ax+By+C=0. \qquad (6)$$

的形式。

如果l垂直于x轴，那么它的方程是

$$x=a$$

改写为$x-a=0$，也属于(6)的形式（即$B=0$的特殊情况）。

因此可以说，平面上任何直线的方程，都可写成二元一次方程$Ax+By+C=0$的形式（其中A、B不全为零）。

反过来，是否任何一个二元一次方程（6）的图形都是直线呢？我们在讲一次函数时已讨论过这个问题。

任意给出一个方程$Ax+By+C=0$（A、B不全为零）。

1）如果$B\neq 0$，那么改写为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

根据斜截式方程的意义，它表示一条具有斜率$-\frac{A}{B}$和在y轴上截距为$-\frac{C}{B}$的直线（可能与x轴平行）。

2）如果$B=0$，这时A不可能为零，方程（6）写成特殊形式$x=-\frac{C}{A}$，它表示一条垂直于x轴且在x轴上的截距为$-\frac{C}{A}$的直线。

这就可以说，任何一个二元一次方程$Ax+By+C=0$的图形一定是直线。

根据上述两方面的分析，我们得到下面的结论：

直线方程的一般形式是

$$Ax+By+C=0\ （A，B不全为零）.$$

以后我们常把方程是$Ax+By+C=0$的直线，简称为直线$Ax+By+C=0$。

例 6 说出下列直线的斜率和在y轴上的截距：

（1） $3x-4y-7=0$； （2） $\sqrt{2}x+2y+1=0$。

解：（1）∵ 直线$Ax+By+C=0$的斜率是$-\dfrac{A}{B}$，y轴上的截距是$-\dfrac{C}{B}$，

∴ 直线$3x-4y-7=0$的斜率是$k=-\dfrac{3}{-4}=\dfrac{3}{4}$，在$y$轴上的截距是$b=-\dfrac{-7}{-4}=-\dfrac{7}{4}$。

（2）直线$\sqrt{2}x+2y+1=0$的斜率是$k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，在y轴上的截距是$b=-\dfrac{1}{2}$。

例 7 把经过点（6，－4）并且斜率等于$-\dfrac{4}{3}$的直线的点斜式方程化为一般式，再化成截距式。

解：点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6),$$

化为一般式，得

$$4x+3y-12=0.$$

把常数项移到右边，再把两边除以12，就得截距式

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

三、直线间的相互关系

我们已经知道，任何一条直线都可以用一个二元一次方程$Ax+By+C=0$来表示，现在就利用直线的方程来讨论两条直线间的各种关系。

1．两条直线的交点

我们在第二章讲二元一次方程组的图象解法时指出，在坐标纸上作出两个方程的图象，读出交点的坐标，就得到方程组的近似解。现在问题的提法反过来，求两条已知直线交点的坐标。由于作图法通常只能得到近似的值，往往不满足生产技术上高精度的要求，因此考虑用解方程组的方法来求它们的交点。

设已知两条直线l_1和l_2的方程是

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$；　l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$。

$M(\alpha,\beta)$是它们的交点。我们知道下述的等价关系：

$$M是l_1,\ l_2的交点\Longleftrightarrow\begin{matrix}M在l_1上\\M在l_2上\end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{matrix}(\alpha,\ \beta)满足A_1x+B_1y+C_1=0\\(\alpha,\ \beta)满足A_2x+B_2y+C_2=0\end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow(\alpha,\ \beta)是方程组\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}的解。$$

这样，利用代数方法解二元一次方程组，即可得到两直线交点的坐标。

例1　求下列两条直线的交点：

l_1: $3x+4y-2=0$；　l_2: $2x+y+2=0$。

解：解方程组