普通高等教育规划教材

有限元法与MSC.Nastran软件的工程应用

郭乙木　万力　黄丹　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

有限元法与 MSC.Nastran 软件的工程应用

郭乙木 万力 黄丹 编
庄茁 孙长任 主审

机械工业出版社

本书是针对力学、机械、土木、航空、船舶、汽车和动力工程类高年级本科生及硕士研究生的需求而编写的教材。主要介绍线性有限元法的基本概念、力学模型的建立和 MSC.Nastran/Patran 软件介绍以及它们在工程上的应用。主要内容包括有限单元法的一般原理、常用有限元单元、力学模型建立、MSC.Nastran 软件使用的操作过程以及利用 MSC.Patran 软件进行有限元前后处理的操作。同时，本书还可以作为有限元和 MSC.Nastran/Patran 软件使用入门的必备手册，对解决工程实际问题有参考价值。因此，它对从事应用有限元软件进行分析、设计的工程技术人员是一本有益的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

有限元法与 MSC.Nastran 软件的工程应用/郭乙木等编. —北京：机械工业出版社，2005.8

ISBN 7-111-17492-5

Ⅰ.有… Ⅱ.郭… Ⅲ.①有限元分析-应用软件，MSC.Nastran ②有限元法-应用-工程技术 Ⅳ.①O241.82-39②TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 113101 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：季顺利
责任编辑：季顺利　版式设计：冉晓华　责任校对：吴美英
封面设计：张　静　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2006 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·8.625 印张·333 千字
定价：22.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
封面无防伪标均为盗版

前　言

有限单元法从20世纪60年代正式命名以来，发展至今，已成为工程数值分析中最为有效的技术手段，不仅成功地解决了一大批具有重大意义的工程实际问题，涌现了大量研究分析成果，而且已开发了大批具有商业价值的有限元软件，广泛应用于机械、航空、土木、能源、动力等工程领域，进而成为各领域设计规范的重要组成部分。

21世纪是信息化和网络化时代，计算机向更高速和更小型化发展，互联网的不断普及，将为工程和科学的计算机仿真分析和虚拟工程与科学带来更大的发展与进步，而有限元分析将是仿真分析和虚拟工程与科学的关键数值分析基础。可以预见，有限元技术将在21世纪具有更为广阔的发展前景和应用潜力。

鉴于上述原因，有限元法基本原理的掌握和商业软件的使用，已经逐步成为高等学校工学类当代大学生必备的知识技能之一，也是当前许多高等学校力学、机械、土木、动力、航空、船舶类专业的必修课程。为了教学上的要求，依据二十多年来作者担任本课程本科生和研究生教学的经验，结合当前工程上的需求，编写本书。内容安排上充分注意以学生为本、以教师为本。内容深度上充分考虑本科教学的需求、读者的实际水平和工程应用的要求。同时，考虑本科教学的学时安排，力求内容精炼、加强基础和便于应用。

全书10章分两大部分。前6章为有限元理论介绍，重点放在基础理论及有限元模型的建立上。介绍有限元的书很多，其深度和侧重面各不相同，本书的这一部分是在通览国内外有关经典著作基础上，结合作者长期从事有限元教学的体会，在内容安排上既注重基础，又深入浅出，力求通俗易懂，有益于工程实际应用。后4章介绍MSC.Nastran和MSC.Patran软件的使用和解决工程问题的实施过程。MSC.Nastran和MSC.Patran是美国MSC公司有限元软件，其有限元分析功能和适应工程面较为广泛和完善。读者若掌握与了解MSC.Nastran和MSC.Patran软件，不仅能为进一步深入全面了解掌握MSC公司有限

元软件包奠定基础，同时也为了解世界有限元软件发展现状和趋势打开一个视窗。

作为教材，本书大部分章后附有算例和习题。

本书第 1~6 章由浙江大学郭乙木教授编写，第 7~10 章由清华大学万力博士、河海大学黄丹博士和郭乙木教授编写。全书由郭乙木教授统稿。

在编写过程中，MSC·sofimare 公司中国区首席代表李军毅总经理提出了不少有益的建议，孙长任博士详细审阅了全部书稿并提出了修改意见。清华大学庄茁教授，应机械工业出版社要求，审阅了本书稿，并提出了部分修改意见。浙江大学楼铁炯博士、刘鹏飞博士、胡潇毅博士等为本书部分习题的选择、计算和书稿打印、绘图花费了大量的精力和时间。作者向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，本书肯定还存在诸多不妥和需要改进之处，敬请读者批评指正。

作　者

于　浙江大学求是园

目　录

第1章　绪　　论

1.1　引言

任何一门应用学科的发展都是由社会生产力发展的迫切需要和现实的可能性所决定。有限元法的发展也印证了这一规律，它仅仅经历了短短四十年余的时间，走过了从命名到全球广泛应用并渗透到几乎所有的技术工程和应用科学领域的漫长过程，如此快速发展在应用学科中是极为少见的。今天它已成为工程师和应用科技工作者不可缺少的解决复杂问题的一种技术手段。

具体地说，在工程技术和应用科学领域中，对于许多力学问题、场问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程和定解条件。由于求解偏微分方程的困难，用解析方法只能求解它们之中的极少数典型问题，即方程极为简单、且结构几何形状相当规则、边界约束理想化的问题，而绝大多数工程技术问题则不可能获得解析结果。为此，人们采用了简化假设的近似方法，即对考察对象提出各种假设，并相应地将控制方程、结构几何形状和边界条件加以简化，从而达到能用解析方法求解的目的。例如材料力学、结构力学和应用弹性力学的内容就是属于这一类。随着社会生产力的发展，人们对工程技术提出越来越高的要求，显然上述简化模型的分析结果已无法满足生产力发展的需要，必须寻求新的解决方法，这就是采用数值分析方法求得复杂工程问题的近似解。

数值分析方法发展至今基本上可以分为两大类：一类是以有限差分法为代表的方法，其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解，它的中心思想是以差分方程替代微分方程，由于差分存在步长（即 Δx），首先需将求解区域划分为网格，进而求得网格节点上的近似解。如果网格节点数目很多时，近似解的精度可以得到改善。有限差分法可以求解某些相当复杂的问题，特别是在流体场分析中，至今仍占有重要的地位。但深入研究发现，有限差分法具有很大的局限性，特别对于几何形状、定解条件复杂的问题，不仅数值精度下降，甚至发生难以克服的困难。另一类数值分析方法是首先建立与原问题基本方程和定解条件相等效的积分方法，然后按此建立近似解法，例如加权残值法、最小二乘法、迦辽金法、里兹法、力矩法等等，都属于这一类近似数值方法。如果原问题的偏微分方程与其等效的积分方程可以归结为某个泛函的变分（这方面知识可以参阅弹性力学变分原理)。相应的近似解法实际上是求解泛函的极值或驻值。上述不同的方法在不同领域上均获得成功应用的实例。但由于它们均是在整个求解区域上假

设近似函数，因此对结构几何形状复杂的问题仍然不可能给出满足近代工程技术精度要求的近似解，只有当有限元法的出现，才使这类数值分析方法获得重大突破，逐步发展成为一种完全独立的、新颖的且又十分有效的近似数值解法。

有限元法与上述所有近似解法的不同之处在于将求解区域看成由有限个单元体以某种形式互相连结而组成的集合体，且单元体可以形态各异，同时对单元体给出物理假设，即从数学上给出近似函数。

有限元法是 Clough 在 1960 年发表的论文中首先命名，经过近 40 多年的努力，不仅理论臻趋完善，而且应用得到迅速发展。这除了依赖于现代工业化技术迅猛发展的迫切需求以外，电子计算机的发展和程序设计理论的日趋完善，使得有限元的数值分析具有现实的可能性。由于它们的发展为有限元方法在工程应用中的实现提供了强有力的支撑平台，为有限元技术的广泛应用提供了技术手段。可以毫不夸张地说，电子计算机技术与有限元技术，在发展早期它们是相互支撑、共同发展的。直至今日，有限元分析在计算机技术领域中仍占有相当大的份额。

由于上述两方面的原因，使有限元完全成为现代工程领域和应用科学研究领域中无可替代的数值分析手段和仿真技术的基础，成为现代工程师所必需掌握的一门实用技术。它对未来技术的发展发挥越来越重要的影响，这也是我们编写本书的初衷。

1.2 有限元的特点

有限元技术的迅猛发展，除了依赖于现代工业化技术发展迫切需要的大环境之外，有限元本身所具有的许多特点也引起了大量理论研究人员和广大工程技术人员的关注。

它的主要特点有：

1) **概念清晰，深入浅出。**它既可以在理论上进行深入研究和不断探索，建立相应的数学模型和理论框架，进而扩大其应用领域，提高数值分析精度，从理论上进一步完善，也可以通过非常直观的物理解释去理解，并可方便而现实地求解各类工程实际问题。

2) **具有很强的适用性，应用范围极其广泛。**开始定义有限元方程是建立在其积分方程必须具有泛函的基础上，后来随着理论的发展，突破了这一限制，将其建立在连续介质的基础上，这又极大地扩充了它的应用范围。进而发展成为只要确立微分方程和定解条件就可以采用有限元法进行数值分析。目前它不仅能成功地处理线弹性力学问题、非均质材料、各向异性材料、非线性应力—应变关系、大变形问题以及各种复杂边界条件问题，而且能成功地求解热传导、流体力学、电磁场、冲压、碰撞、噪声等领域的各类非线性问题，以至于目前开始向纳

米量级的分子动力学渗透。

3）**具有统一、规范的表达形式**。它采用矩阵形式表达，因此十分便于计算机编程，可以毫不夸张地断言，有限元理论与应用的发展，完全离不开有限元软件的发展。有限元软件的更新换代直接代表着有限元理论的发展历程，软件的推广应用又推动了有限元技术的不断进步。

虽然有限元具有上述的显著特点，但是对于有限元方法的初学者，以及应用和开发有限元软件的工程技术人员来说，必须了解和掌握以下两点：

一是有限元的基本概念和它的分析步骤，否则有限元软件只是给你提供一个数值分析的黑盒子，使你面对软件中必须输入的参数无所适从，或者只知其然，不知其所以然。这样可能会使数值分析结果完全偏离工程实际，甚至给出错误的结论；二是有限元是一门应用技术，它必须通过计算机软件的运行才能提供需要解决的工程问题的数值结果，也就是说必须依赖于计算机的运算，手工计算是绝对不可能的。目前，国际上通用的商业化有限元软件已不少于上百个，它们各有特色，都是在前人研究成果基础上的归纳和总结。作为初学者来说必须学会有限元软件的一般使用方法和技巧，只有通过软件的使用才会加深对有限元技术的理解和理论的掌握。上述两者必须加以有机的结合和统一，只有这样才有可能较熟练掌握这一具有广泛应用价值的实用技术，这也是编写本书的目的。

1.3 本书的内容与编排

应用有限元技术分析工程问题，大致包含下列主要步骤：

1）**建立模型**。即按需要解决工程问题的分析要求，将物理意义上的实物转化为有限元分析的数学模型，这一步是解决问题的关键。建模的方法很多，并在不断发展，在本书中，我们将着重介绍按其结构的力学性能建立模型，即以单元力学性质划分的建模形式。

2）**推导有限元方程**。由于工程问题中，考察对象各不相同、几何形态和介质的物理力学性能的各异，因此必须寻求物理力学性能的表达式基本一致的元素，以此作为考察对象的基本单元，并建立相应的有限元方程，诸如平面单元、轴对称单元、梁单元、板壳单元等等。目前这类单元已多达近百种，这里我们只选择典型的几种单元系统地讨论并建立其有限元方程。通过这些讨论，不仅能使读者了解单元的有限元方程的建立过程，而且可以在此基础上对其他单元形式进行拓展，进而全面掌握各类单元有限元方程的建立过程。这些可以比喻为建筑物中的砖瓦、各种预制件和连接件，把它们装配在一起就构成人们需要解决的工程问题。

3）**求解有限元方程**。有限元方程组的求解是有限元法的一个重要问题，线性问题比较简单，可选择的方法相对较少，分析结果也比较稳定，但非线性问题

就复杂得多了。可能对于同样一个有限元模型，选择不同算法，甚至不同步长，就会得到完全不同的结果。鉴于力学本科教学和一般工程类硕士生教学的要求，本书仅介绍线性问题的求解方法，同时将在数值分析方法中已经学过的部分不再重复，即只介绍线性有限元方程组求解中具有特色的内容。

4) **数值结果的表述**。有限元法的分析结果是数值结果。随着剖分有限元单元的数目增加，其数据量将是成倍增加。最后给出庞大的数据库，人们必须选择一种直观而又清晰的表达方式，诸如曲线、列表和云纹图等等，以便工程应用。

上述给出的主要步骤中，第 1 和第 4 项，人们简单地称为软件的前后处理，这当中不少部分由计算机完成，但人们必须加以干预和选择；而 2、3 两项的具体执行均是由有限元软件本身来完成。

为适应教学要求，并希望通过学习能掌握有限元基本技能，既具备解决一般工程问题的能力，又能为进一步深入研究有限元理论、解决复杂问题奠定必要基础。本书分为两大部分，前半部分介绍有限元基础理论，力求深入浅出，便于阅读，对于某些理论的证明与讨论，授课时可以按需要和学时限制加以删节，后半部分以美国 MSC.software 公司的 MSC.Nastran 和 MSC.Patran 软件为例，介绍有限元商用软件的应用。MSC 公司是目前世界上最大的有限元商用软件公司，其销售额占世界总量的 40% 以上，同时也是目前国内使用最为广泛的三大软件之一 (ABAQUS、ANSYS 和 MSC.NASTRAN)。这三大软件虽各有特色，但从解决一般工程问题角度考察，特别对线性问题的处理可以说是大同小异。为此，我们选择 MSC.Nastran 作为商用软件应用的范例，可能对读者在解决工程问题中会有所帮助，并通过对实际问题的求解，不仅有利于掌握有限元技术和提高解决工程问题的能力，同时也可以由此加深对有限元理论的理解。

第 2 章　有限元法的一般原理和基本方程

在众多的数值方法中，有限元法（Finite Element Method，缩写为 FEM）的适用性强，处理均质、非均质、线性、非线性、复杂边界等工程问题方便，并且具有计算精度高的优点，因此作为一种最快捷适用的数值分析方法广泛地应用于工程分析中。

本章将通过虚位移原理建立弹性力学问题有限元法（线性有限元）的表达格式。基于虚位移原理建立的有限元基本未知量是位移。以单元的节点位移作基本未知量是有限元中最常用的单元，称为位移元。为了正确阐述线性有限元法的一般原理，建立有限元方程和求解过程，我们以最简单的平面问题三节点三角形常应变单元为实例进行系统地讨论。

作为一种数值方法，有限元解的收敛性和精度估计必然是一个十分重要的问题。本章将简单地加以讨论，这里所阐述的一般原则可供在以后各章中作参考，或作进一步深入和具体化。

为了便利读者阅读，在系统介绍有限元一般原理和方程之前，首先简要阐述应用弹性力学中定义的平面问题、轴对称问题和板壳问题的基础知识。

2.1　应用弹性力学的简化模型

弹性力学的任务是研究弹性体在外力和温度变化等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移。工程界应用的绝大多数材料几乎都是弹性体，换句话说，工程界所讨论的安全性、舒适性、可靠性问题几乎都涉及弹性体，因此弹性力学是研究工程问题的基础。由于自然界存在的或人工制造的弹性体，从严格意义上说都是三维，也就是空间立体结构。为了数学推导和求解的方便，根据工程界应用的结构件形状，给出一定的假设条件，使其计算模型简化，在工程应用中便于付诸实施，这也是所有应用学科研究中所采用的方法。这里必须指出，这种简化是有条件的，简化后的分析结果，尽管会与真实结果之间存在一些误差，但这些误差必须是工程界根据工程的实际使用要求是在允许范围之内的。通过这种简化，将一般数学弹性力学问题转化为应用弹性力学问题。

下面我们将简要介绍应用弹性力学中常用的简化模型，以配合有限元理论介绍的需要。

2.1.1　梁与杆

实际构件有各种不同的形状，通常把构件的形状进行某些简化，然后按构件

的几何形状分类讨论。当考察的构件长度远大于横截面尺寸，这类构件称为杆件，简称杆。轴线（横截面形心连线）为直线的杆称为直杆，横截面大小和形状沿轴线不变的直杆称为等直杆。有限元中的**杆单元**只承受轴线方向的作用力，即只承受轴线方向的拉伸或压缩，因此又称为二力杆。若是曲杆，则只能按梁单元考察。

按材料力学定义，杆件还可以承受剪切、扭转和弯曲。在有限元中能够同时承受拉伸（或压缩）、剪切、扭转和弯曲的杆件，称为**梁单元**。由此可见，凡由等截面直杆组成的结构，当所有杆件的交结点均是铰接的，且在杆件上不作用与杆件轴线垂直的横向荷载，则有限元分析中可以采用杆单元，否则必定是梁单元和杆单元的组合，或全部是梁单元。关于梁、杆的理论和有关公式在材料力学课程中已作了详细介绍，这里不再赘述，读者可自行复习。

2.1.2　平面问题

在工程问题中，某些结构的形状和受力状态具有一定特点时，只要经过适当的简化和力学的抽象处理，就可归结为所谓的弹性力学平面问题，这种问题的特点在于一切现象看作是在一个平面内发生的，因而在数学上属于二维的问题。

平面问题分为两类：平面应变问题和平面应力问题

1. 平面应变问题

在直角坐标系下，考察一个母线与 Oz 轴平行且很长的柱形物体，其所承受的外力与 Oz 轴垂直，且它们的分布规律不随坐标 z 值而改变，如图 2-1 所示。在上述条件下，我们可以认为柱体是无限长的，如果从任意截面中取一个横截面，则柱形物体的形状和受载情况相邻截面是一致的。因此，在柱形物体变形时，截面上的各点只能在其自身平面（Oxy 平面）内产生位移，而沿 Oz 轴方向的位移是零。另外，由于不同的横截面都同样处于对称地位，故 u、v、w 只要具有相同的 x 和 y 坐标，就具有完全相同的位移，于是横截面上各点在直角坐标系下的位移可表示为

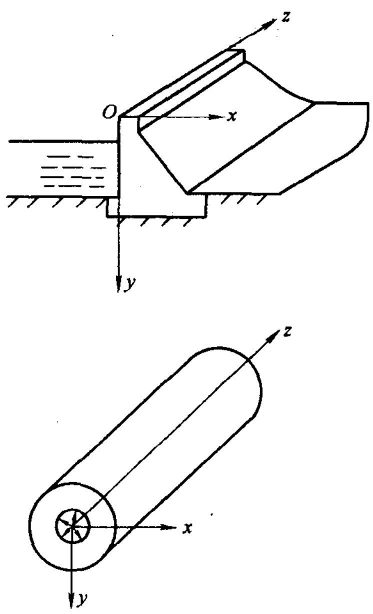

图 2-1　平面应变问题

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \\ w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

由弹性力学可知，位移与应变的关系式(几何方程)，其应变分量可表示为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

由于这类问题的位移和应变都是在 Oxy 平面内发生的，且与 z 相关的应变分量均为零，故称为平面应变问题。

对于应力分量，由广义胡克定律可知

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

式中，E 为材料弹性模量；μ 为泊松比。

由此可得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (2\text{-}2)$$

亦即平面应变问题，在 z 轴方向的正应力是存在的。这可以假想为柱形物体由无数个与 xy 平面平行的薄片组集，虽然各薄片沿 Oz 轴方向的伸长被扼止，但由于 Oxy 平面内的变形，使各薄片间相互挤压，使薄片表面产生正应力，且它与 σ_x 和 σ_y 有联系。

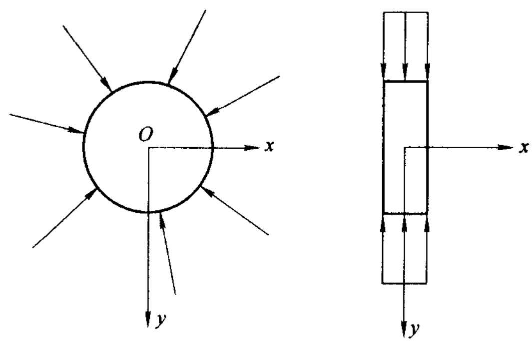

图 2-2　平面应力问题

2. 平面应力问题

现在考察几何形状与平面应变问题完全相反的一种情况，如图 2-2 所示。设有一块薄板(厚度为 h)，其所受外力(包括体力)平行于板平面(Oxy 平面)，并沿厚度方向(Oz 方向)不变，在板的表面上$\left(\text{即 } z = \pm\dfrac{h}{2}\text{处}\right)$，不受垂直于 Oxy 平面的外力作用，即有

$$\sigma_z\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0,\ \tau_{yz}\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0,\ \tau_{xz}\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0$$

由上式可知，因板很薄，所以在板内部应力 σ_z、τ_{yz}、τ_{xz} 即使存在，也是很小的。其他应力分量虽沿板厚度方向会有变化，但按同样理由，可以认为这种变化也是不明显的。

由此,我们可以认为在板的内部处处有

$$\sigma_z = 0,\tau_{yz} = 0,\tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_x = f_1(x,y),\sigma_y = f_2(x,y),\tau_{xy} = f_3(x,y)$$

具有这种性质的应力状态的问题,称为**平面应力问题**。

平面应力问题的位移—应变关系(几何方程)与式(2-1)完全相同,即

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

而广义胡克定律(亦称本构方程)可表示为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \tag{2-3}$$

有限元法是以位移为基本未知量,求得结构的节点位移后,再由结构的节点位移转化为单元节点位移,进而由单元节点位移按几何方程可求得单元应变,再由应变求得单元应力,最后由单元应力组集成结构应力场。按照这一思路,平面应变问题和平面应变问题,其几何方程是完全相同的。也就是说,应用有限元法求解平面应力问题或平面应变问题的结构位移场是完全一致的,因此我们将这两类问题在有限元法中统一命名为平面问题。但必须注意它们之间是有区别的,其区别主要在于一是结构的几何形状是完全不同的;二是由单元应变计算单元应力时所用的本构方程是不一样的。由弹性力学知识可以导得,它们可以统一地表示为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \mu_1\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \mu_1\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu_1)}{E_1}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

式中平面应变问题为 $E_1 = \dfrac{E}{1-\mu^2}$,$\mu_1 = \dfrac{\mu}{1-\mu}$;平面应力问题 $E_1 = E$,$\mu_1 = \mu$,且 E、μ 分别为材料弹性模量和泊松比。

同时,平面应力问题的应变状态除了 ε_x、ε_y、γ_{xy}外,还有 ε_z,它由下式给出

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2-5}$$

2.1.3　板与壳

在实际工程中，由两个平行平面和垂直于它们的柱面或棱柱面所围成的构件，当其高度尺寸远小于平面的任一方向尺寸时，称为板，两个平行面称为板面。柱面或棱柱面称为板边，两平行面之间距离称为板厚，而平分板厚的平面称板的中面。当板厚与板面内的最小特征尺寸之比大于 1/5 时，称厚板；当板厚与

板面内的最小特征尺寸之比小于 1/80 时，称为膜板；当板厚与板面内的最小特征尺寸之比在 1/80 和 1/5 之间时，则称为薄板。对于厚板，一般须作三维空间问题处理。对于膜板，由于板平面的抗弯刚度很小，基本上只能承受膜平面内的张力可作为平面应力问题处理。对于薄板，当全部外载荷作用于中面内而不发生失稳现象时，如上节所述，它也属于平面应力问题；当全部外载荷都垂直于中面时，则主要发生弯曲变形。在板发生弯曲变形时，中面上各点沿垂直方向的位移，称为板的挠度。如果挠度和板厚之比小于或等于 1/5，可认为是板的小挠度问题，如果超过这个限度，则可归属为板的大挠度问题，本书只讨论板的小挠度问题。大挠度问题属于非线性问题，理论上也比较复杂，读者可参阅相关文献。

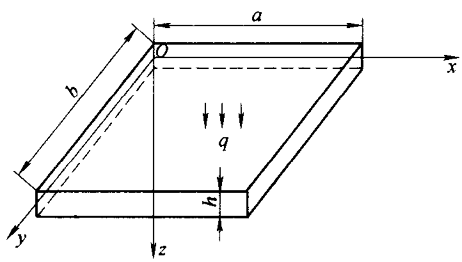

图 2-3　克希霍夫薄板

考察薄板小挠度弯曲理论的基本假设是由克希霍夫（Kirchhoff）提出，所以又称为克希霍夫薄板理论或克希霍夫板，它的主要假定是：

（1）变形前垂直薄板中面的直线（法线），在薄板变形后仍保持为直线，且垂直于弯曲变形后的中面，在其板内段的长度不变。这是著名的直法线假定，它与材料力学中在研究梁弯曲问题时所引进的平截面假定相似。根据这个假定，如果将薄板的中面作为 Oxy 坐标平面，z 轴垂直向下，如图 2-3 所示，则有 $\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$，$\varepsilon_z=0$。

（2）与 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 等相比，垂直与中面方向的正应力 σ_z 很小，在计算应力时候认为可以忽略不计。这个假定与梁弯曲问题中的纵向纤维间无挤压的假设相似。

（3）薄板弯曲变形时，中面各点只有垂直位移 w，而无 x 方向和 y 方向的位移，即

$$u\Big|_{z=0}=0\quad v\Big|_{z=0}=0\quad w\Big|_{z=0}=w(x,y)$$

按此可以给出中面内的应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 均等于零，即中面内无应变发生，中面内的位移函数 $w(x,y)$ 称为挠度函数。

依据上述三个基本假定，按弹性力学理论可建立相应的几何方程、物理方程和平衡方程。

薄板的几何方程为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0$$