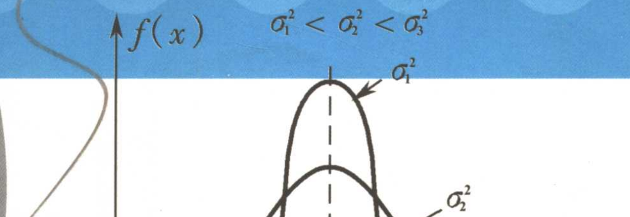
GAILUTONGJISIXIANGFANGFAYUJIETIYANJIU

概率统计
思想方法与解题研究

主　编　李英英
副主编　徐兴艾　李晓华



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率统计
思想方法与解题研究

主　编　李英英

副主编　徐兴艾　李晓华

编　委　(按姓氏笔画排列)

杜　娟　陈成钢　杨丽萍

范　鹰　岳　珠　熊春连

主　审　岳　珠

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共有八章，每章分为五个部分．即本章知识的作用及意义、知识要点及其思想方法、解题研究、自测练习题答案．本书配有三套综合练习题与两套研究生考题及其详细解答．

本书的特点是：详细阐述了概率统计的思想方法与解题技巧；由浅入深，突出重点，对难点问题分析透彻；例子多，类型广．可作为在校大学生及考研学生学习的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

概率统计思想方法与解题研究/李英英主编．—天津：天津大学出版社，2005.8

ISBN 7-5618-2193-X

Ⅰ.概... Ⅱ.李... Ⅲ.①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第097456号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 9.75
字　　数 291千
版　　次 2005年8月第1版
印　　次 2005年8月第1次
印　　数 1－4 000
定　　价 16.00元

前　　言

我们知道,概率论与数理统计的知识与方法在各个领域有着广泛的应用,并且它又是高等院校理、工、农、林、医、经济管理等许多专业的一门必修基础课.通过这门课程的学习,使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法,培养学生分析和解决实际问题的能力.概率论与数理统计这门课程与我们以前学过的数学课程具有不同的特点:思想方法难以掌握,解题时无从下手,解完后又不知正确与否,这些均给学生的学习带来不少困难.编者在积累多年教学实践的基础上,针对学生学习中的这些具体问题,为帮助学生克服这些困难,较好地掌握这门课程的基本内容及思想方法,辅助学生学习此课程而编写了此书.

本书有三个特点:第一,每章首先说明了本章研究的问题及它在概率统计中所处的地位;第二,对主要知识点不仅讲明重点、难点,而且对背景意义、思想方法,都进行了深入浅出的探讨,尽量将问题点明、讲透,便于学生对知识的理解与掌握;第三,实例多,类型广,结合知识点对各种类型题目进行解题研究,包括解题思路的分析、一题多解、方法与技巧的分析等方面的讨论,有些问题用反例论证,对部分易出错的问题专门强调并且加以指出,以便学习时引起注意,从而提高解题能力.

本书按如下结构编写,每章分为五个部分:一、本章知识的作用及意义;二、知识要点及其思想方法;三、解题研究;四、自测练习题;五、自测练习题答案.最后附有三套综合练习题及解答,两套考研真题及解答.通过各种类型题目的训练,便于学生由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高解题能力及加深对概率论与数理统计知识的理解都是大有益处的.

本书是面对在校本科生及考研学生学习的指导书,是有利学习的

辅导书.它能帮助学生更好地掌握本学科的知识和思想方法,提高解决实际问题的能力.相信本书对读者会有所帮助.

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

在编写本书的过程中得到了数学教研室领导的大力支持和帮助,也得到了数学教研室诸多老师的关心,在此一并表示感谢.

编者

2005年7月

目　　录

第一章 概率论的基本概念

一、本章知识的作用及意义

在社会生活与生产实践中存在着大量的随机现象,虽然这种现象的特点是它的偶然性,但因其存在统计规律性,使人们对它的研究迅速发展起来,这就是概率论这一以随机现象及其规律性为研究对象的数学分支的产生背景.这门学科内容丰富,应用广泛,与其它数学分支联系紧密.

随机试验、样本空间、随机事件是这章最基本的概念,理解了这些概念,对概率论的研究对象——随机现象的描述才有了载体,为了更深入地学习,了解随机事件之间的关系和运算是非常必要的.结合我们以前学习的集合之间的关系和运算,再加之本学科与很多领域都有联系,可以举出很多生动的例子,使得对随机事件的关系和运算的学习更感新鲜有趣.

概率统计定义的基础是随机试验中频率的稳定性,清楚频率与概率的关系对理解概率论与客观实践的联系十分重要.进一步,又给出了概率论的公理化定义(是由前苏联数学家柯尔莫洛夫于 1933 年给出的),这个公理化结构综合了前人的成果,明确定义了基本概念,使概率论作为一门数学的分支理论更加严谨.

古典概型是概率论发展初期研究的主要对象,其称谓也由此而来,它在概率论中占有相当重要的地位,由于它较直观,我们可以利用它的许多实例来帮助读者加深对各种概念的理解.当附加一种条件时,在此基础上讨论某些事件的概率,就引出了条件概率的概念,其概型仍为古典概型,只是附加了条件,即所谓在减缩的样本空间上去讨论.

在给出概率的公理化定义即概率的非负性、规范性、可列可加性的

基础上,又给出了计算一些事件概率的有力工具:加法公式、条件概率公式、乘法公式、全概公式和贝叶斯公式,从而使概率论发展初期的一些讨论及计算依据得到进一步的完善.

在条件概率的计算中,当条件概率等于无条件概率时,就给出本章的另一个重要概念即事件的相互独立性,当二事件相互独立时,有几个相关的结论是计算概率的重要依据.将事件的独立性推广到 n 个试验中,即得到 n 重伯努利试验概型,从而为下一章的一个重要分布——二项分布打下了基础.

二、知识要点及其思想方法

(一)样本空间与随机事件

1.随机现象

随机现象表面上是以偶然性为特征,但实际上却存在着统计规律性的一类现象.它广泛存在于自然现象和社会现象中,如抛一枚均匀的硬币,即使在相同的条件下,哪一面朝上也是不确定的,可是实际上正面朝上的次数大约占到一半.

2.随机试验

随机试验是指对随机现象进行观察,它具有下列三个特征:

(1)其试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个(至少两个),且在试验之前能明确知道发生的所有可能的结果;

(3)在每次试验前不能确切地知道哪个结果会出现.

在概率论中一般用大写的字母 $E,F,\cdots$来表示随机试验.

3.样本空间

在随机试验中,所有的不同时出现的可能结果组成的集合,用大写字母 S 表示.值得注意的是对同一个对象进行随机试验,若观察的内容不同,样本空间也会不同,如将某班学生的一次考试作为一次随机试验,若观察的是及格率问题,样本空间为 $S_1=\{$及格,不及格$\}$,若观察学生的得分情况,以 5 计分制,则样本空间为 $S_2=\{0,1,2,3,4,5\}$.

4. 样本点

随机试验的每一个可能的结果,即构成样本空间集合的单个元素.如 S_1 中的及格,不及格与 S_2 中的 0,1,2,3,4,5 等分别是对应于那个随机试验样本空间的样本点.

5. 随机事件

随机试验的样本空间 S 的子集称为此试验的随机事件,简称事件,用 $A,B,\cdots$表示.

基本事件:样本空间中的每一个样本点(不能再分解).

随机事件:由若干个基本事件复合(运算)而成.

不可能事件:不含样本点的集合,记为$\varnothing$.

必然事件:即试验的样本空间 S.

注意:事实上,不可能事件和必然事件是没有不确定性的,但为了今后讨论方便,在此也把它们作为随机事件来处理.

(二)事件之间的关系与运算

1. 事件之间的关系

包含:若事件 A 发生必然导致事件B 发生,则称事件 B 包含事件 A.记为 $A\subset B$.

相等:若 $A\subset B$ 且$B\subset A$,则称事件 A 与事件B 相等.记为 $A=B$.

互不相容:若 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件B 是互不相容的,或是互斥的.

2. 事件之间的运算

和事件:事件 A,B 至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件B 的和事件,记为 $A\cup B$.

类似地,称$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

积事件:事件 A,B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件B 的积事件,记为 AB 或$A\cap B$.

类似地,称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件;称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

差事件:事件A发生B不发生的事件,称为事件A与事件B的差事件,记为$A-B$.

逆事件:若$A\cup B=S$且$A\cap B=\varnothing$,则称事件A与事件B互为逆事件,又称事件A与事件B互为对立事件.事件A的对立事件记为$\overline{A}$.显然,$\overline{A}=S-A$.

注意:这里容易混淆的是互不相容事件和逆事件的概念.事件A与事件B互不相容是指事件A与事件B不能同时发生,即$AB=\varnothing$,但是事件A与事件B是可以同时不发生的.在随机试验中,事件A与事件B互逆是指$AB=\varnothing$且$A\cup B=S$(即$A=\overline{B}$).

区别互不相容与互逆的关键是:互逆只在讨论组成样本空间的两个事件且只有两个事件时存在,而互不相容却可以在样本空间有多个事件时存在.因此互逆的两事件必是互不相容的,但互不相容的事件却不一定是互逆的.

如在一次射击的随机试验中,击中与击不中是互逆的两个事件,因为在射击中事件击中与击不中只有一个发生,不会两个事件同时不发生.但在射击中,击中10环与击中9环是互不相容的,但却不是互逆的,因为它们可以同时不发生(可以不击中10环,也不击中9环,而击中8环).

3.事件之间的运算规律

设A,B,C为三事件,则有如下规律.

交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德·摩根定律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.也称为对偶律.

(三)排列、组合

1. 加法原理

若完成一件事有 k 种方式,每种方式分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 种方法,而完成这种事件只要选择任一方式中的任何一种方法,则完成这件事的方法共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种.

2. 乘法原理

若完成一件事有 n 个步骤:第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,…,第 n 步有 m_n 种方法,则完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

3. 排列

从 n 个不同的元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素排成一列(与次序有关),其不同的排列总数为

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

当 $m = n$ 时为全排列:$\mathrm{P}_n = n!$.

从 n 个不同的元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素(可重复)排成一列,其不同的排列总数为 n^m.

4. 组合

从 n 个不同的元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素构成一组(与次序无关),其不同的组合数为

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!\ (n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

也表为 $\binom{n}{m}$.

(四)事件的频率与概率

1. 事件的频率及性质

频率:对随机事件 A,若在 n 次试验中出现了 n_A 次,则称 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率.

频率的性质:

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)$f_n(S)=1$;

(3)对 k 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

2.概率的统计定义

如果试验的次数 n 很大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数值 p 的附近,而且一般说随着试验次数 n 的增加,其频率在这个数值 p 附近摆动的幅度会越来越小,称 p 为随机事件 A 的概率的统计定义.由此概率的统计定义也同样具有与频率相同的三条性质.

注意:随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在 n 次试验中表示事件 A 在试验中发生的频繁程度,当 n 较小时,$f_n(A)$ 看起来是无规律的,当 n 不相同时,$f_n(A)$ 的值一般是不同的,但当 n 充分大时,$f_n(A)$ 就会在一个值 p 的附近摆动,n 越大,摆动的区间越小.从这个意义上说,一般依概率的统计定义得到的是那次随机试验中某事件概率的近似值.因此,在较小的区间内取一个值 p 就作为统计定义下事件 A 的概率的近似值.

如掷一枚硬币,若 n 较大,$P(H)$ 可取 $\frac{500}{1\ 000}$,也可取 $\frac{499}{1\ 000}$.

在学习概率的统计定义时,也许会认为,可将概率的统计定义表为 $p=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)$,这是不恰当的,这是因为 $f_n(A)$ 在数值 p 的附近摆动与微积分中的极限定义不同,不符合极限定义.因为对任意给定的 $\varepsilon>0$,由于随机现象的存在,可能找不到相应的 N_ε 使 $n>N$ 时,有

$$|f_n(A)-p|<\varepsilon \text{ 成立}.$$

3.概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 S,若对 E 的每一个事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.它具有

(1)非负性,对任一事件 A,$P(A)\geqslant 0$;

(2)规范性,$P(S)=1$;

(3)可列可加性,对两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

注意:概率的公理化定义看起来较抽象,实际上这种数学意义上的严格定义是由于概率论的发展而自然产生的.我们由概率的统计定义看,其定义显然欠缺严密性,这就使人们对概率的客观含义甚至其结论产生怀疑,同时概率在各个领域的应用也受到限制,这也反过来大大地防碍了它的进一步发展.1933 年,前苏联数学家柯尔莫洛夫提出了概率的公理化定义体系,这个理论继承了前人成果,明确了基本概念.它在概率论成为一个严谨的数学分支的问题上,起到了一个里程碑的作用,同时对今后几十年概率论的迅速发展也产生了积极的影响.

4.概率的性质

(1)$P(\varnothing)=0$.

(2)对任一事件 A,$P(A)=1-P(\overline{A})$.

(3)若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}(A_i).$$

(4)对二事件 A,B,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A).$$

5.概率的加法公式

(1)对任意二事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(2)对任意的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1,A_2,\cdots,A_n).$$

注意:应用加法公式时,对任意的二个事件 A,B,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,其特例是 A,B 互不相容时,才可用 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,在很多情况下,也是利用两事件互不相容的加法公式,去讨论一些事件的概率,证明一些重要的结论.如证 4 中性质(4),$A\subset B$ 时,$P(B-A)=P(B)-P(A)$,如图 1.1 有 $B=A\cup(B-$

$A)$,且 $A,B-A$ 二事件互不相容,故有

$$P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)=P(B),$$

移项即得结论.

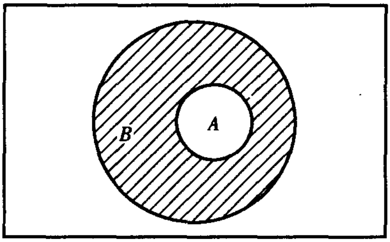


图 1.1

6. **古典概型**

若随机试验具有如下特点:

(1)样本空间含有有限个基本事件;

(2)每个基本事件发生的可能性相同,

则随机试验中的事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间中的基本事件总数}}.$$

利用上面的公式计算随机事件概率的数学模型称为古典概型.

注意:此公式中的等可能性是针对基本事件而言,对于一般的事件 A,其概率当然应由其所包含的样本点的个数来决定,一个人购买了 10 份某有奖彩票,其获奖机会应 10 倍于一个购买一份此有奖彩票的人.

7. **几何概型**

当随机试验 E 的可能结果有无限(不可列)个时,每个基本事件发生的可能性相等,当试验的样本空间及所求的事件 A 都可以用其几何度量值(长度、面积或体积)来表示时,事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{ 事件的几何度量值}}{\text{样本空间的几何度量值}}.$$

(五)条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

1.条件概率

(1)设有随机试验 E 的二事件 A,B,且 $P(A)\neq 0$,则在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为事件 B 在条件 A 下的条件概率,记为 $P(B|A)$.

2.条件概率的计算方法

(1)在试验 E 的样本空间 S 中计算有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)>0,$$

或

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0.$$

(2)在减缩的样本空间中直接计算

$$P(A|B)=\frac{AB\text{ 事件包含的基本事件数}}{A\text{ 事件包含的基本事件数}}.$$

注意:如果在减缩的样本空间上计算,应注意试验 E 的样本空间并没有变,只是在原基础上又加一条件(如 A 发生的条件下)求事件 B 的概率,这时我们可理解为原试验样本空间没有变,但计算 $P(B|A)$ 的公式中 $B|A$ 是一个事件,这个事件的样本空间由于增加了条件,减缩成为了 S_A,而作为分子的 P 成为 $P(AB)$,故 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(S_A)}$,这里 $P(S_A)$ 中的 S_A 所包含的基本事件数就是事件 A 所包含的基本事件数,见例 17.

再做两点说明是:以 A 为条件时,通过上面的说明可见 $P(B|A)\neq P(B)$,而且一般说来 $P(B|A)\neq P(AB)$.这里 $P(B|A)$ 是在试验 E 中附加了在条件 A 发生后,再求事件 B 发生的概率,而 $P(AB)$ 就是在试验 E 的条件下,A,B 同时发生的概率,其区别是它们发生时的条件不同(虽然都是 A,B 同时发生).简言之,$P(B|A)$ 是在试验 E 的条件下,再考虑一个事件 A 发生条件下,事件 B 再发生的概率(即事件 A,B 同时发生的).而 $P(AB)$ 就是在试验 E 的条件下事件 A,B 同时发生的概率,它们之间是有联系的,即在试验 E 条件下,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(AB)=P(B|A)P(A).$$

注意:条件概率除了具备非负性、规范性和可列可加性之外,在相同条件下,它具备概率的一切性质.在具体做题时,经常用到下面的一些性质:如:$P(\varnothing|B)=0$,$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$(相当于 $P(A)=1-P(\overline{A})$).注意 $P\,\overline{(B|A)}$这种记法在对条件概率的定义中毫无意义.

条件概率的加法公式:

$$P((B_1\cup B_2)|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P((B_1B_2)|A).$$

若 $A=S$,则条件概率就成为无条件概率.

3.**乘法定理**

(1)若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

(2)推广到三个事件,若 $P(AB)>0$,则

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

此计算原理还可以推广到 n 个事件.

4.**全概率公式**

(1)样本空间的划分:设随机试验 E 的样本空间为 S,若在 E 上一组事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,满足

(i)$B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$,

(ii)$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的划分.

(2)全概率公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 S 的一个划分,若对随机试验 E 上的一个事件 A,有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$$

(3)贝叶斯公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分,若对随机试验 E 的一个事件 A,有 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A|B_k)P(B_k)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

注意:全概率公式与贝叶斯公式一般是计算较为复杂事件概率的重要工具.这个公式的应用基础是条件概率,这里的事件 A 是与构成样本空间划分 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 这个事件组有关系的一个事件,事件 A 的概率不容易求,但 $A = B_1A \cup B_2A \cup \cdots \cup B_nA$,因此,诸 $B_1A, B_2A, \cdots, B_nA$ 是互不相容的.把 B_i 看成是 A 发生的原因,而 A 是它们导致的结果,公式中的 $P(B_i)$ 及 $P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是根据以往的经验较易求得的,从而用这个公式由“原因”求出“结果”.

贝叶斯公式也称为“后验概率”公式,它实际上是条件概率.如求 $P(B_i|A)$ 是在事件 A 发生之后再来判断事件 B_i 发生的概率,也就是在已知结果发生的情况下,来分析探求导致这一结果发生的诸“原因”,事件 B_i 发生的可能性的大小.贝叶斯公式是由“结果”分析“原因”.这两个公式在很多领域中都很有实用价值.

(六)事件的相互独立性

1.**定义**

对事件 A 和 B,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A 与 B 相互独立.推广到三个事件,若事件 A, B, C 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C), P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A, B, C 三事件相互独立.若推广到 n 个事件,对 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 满足对任意的 $k(1<k\leqslant n)$,任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,等式

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

2.**性质(适用于两个事件相互独立的情况)**

若事件 A 和 B 相互独立,则

(1)$\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立;

(2)$P(B|A)=P(B)\quad(P(A)>0)$,

$P(A|B)=P(A)\quad(P(B)>0)$.

注意:(1)在实际应用中,我们有时不是用定义来判断事件的独立