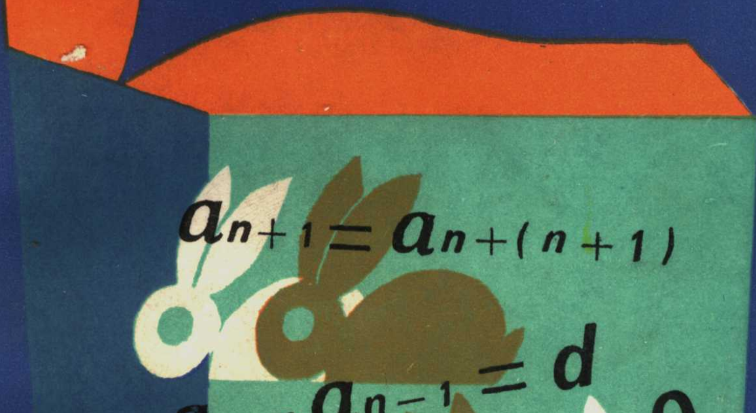
中学生文库

递归数列



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

递归数列

陈家声　徐惠芳　编著

上海教育出版社

责任编辑 冯 贤 沈君佩

封面设计 范一辛

中学生文库 递 归 数 列

陈家声 徐惠芳 编著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 江苏海安印刷二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.75 插页 2 字数 87,000

1988 年11月第 1 版 1988 年11月第 1 次印刷

印数 1-10,200 本

ISBN 7-5320-0651-4/G·550 定价: 1.20元

前 言

递归数列及其递归方程的求解是中学数学和各种应用科学的一个重要内容. 随着计算机科学等许多新兴学科的飞速发展，促进了计算数学的不断发展. 本书谈到的关于“连锁反应关系”的数学问题，是数学中重要的、饶有趣味的问题之一.

例如“平面上有 n 条直线两两相交，但没有三条直线交于一点，问这 n 条直线把平面划分成多少个区域?”

这个问题是一个“连锁反应关系”的问题，我们假设 a_n 为 n 条直线把平面分成的区域数. 设想在平面上划一条直线，这条直线把平面分成 2 个区域，即 $a_1=2$; 再划一条直线，使第二条直线与第一条直线相交，这样，就把平面划分成 4 个区域，即 $a_2=4$; 由题意可知，$a_3=7, a_4=11, a_5=16$, …于是，得到了一组数列 2, 4, 7, 11, 16, 22, … 当 n 增大时，用图形算出 a_n 的值那是太麻烦了. 是否有一个较为简便的方法来解呢? 这就是本书所要研究的问题.

我们再看一个例子. “(养兔问题)假定围场中开始时

有一对大兔，一个月后生了一对小兔，而这对小兔经过一个月就长成大兔，此后，每对大兔每月生一对小兔，而每对小兔经过一个月又长成大兔，如果不发生死亡，问第 n 个月，围场中有多少对大兔？”

这是一个很有趣的问题，由意大利数学家斐波那契首先提出的.

原来围场中有一对大兔，即 $a_0=1$；第一个月，这对大兔产下一对小兔，围场中仍有一对大兔，即 $a_1=1$；第二个月，这对兔子产下一对小兔，此时，第一个月生下的小兔已长成大兔，则围场中已有两对大兔，即 $a_2=2$；第三个月，原来的和第一个月出生的两对兔子各产一对小兔，而第二个月出生的一对兔子也长成大兔，即 $a_3=3$；第四个月，原来的和第一、二个月出生的一对兔子各产下一对小兔，而第三个月出生的两对小兔已长成了大兔，此时围场中共有五对大兔，即 $a_4=5$，…* 按照这种“连锁反应”地繁殖小兔，来推算出第 n 个月的大兔总数，当 n 较大时，我们同样需要找出一个简捷的“连锁反应关系式”来解出 a_n.

象这种利用“连锁反应”的关系而得到的关系式，称为递归方程，这种“连锁反应”关系又称为递推关系. 由上可知，应用递推关系的关键在于找出具体问题的递归方程，并设法求出递归方程的解. 本书从第二节起，对递归方程的各类解法作了一些探索，介绍一些解法思路和技巧，力求使

---

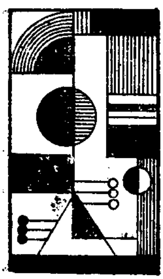
* 由 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 得到数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …这是著名的斐波那契数列，记为 F-数列.

读者在理解的基础上学习、掌握这部分知识和技能.

本书除了介绍等差数列、等比数列的通项求法，还着重介绍了递归数列和递归方程的解的求法，以及递归数列的应用.

本书既为中学生学好数列知识提供必要的知识和技能，也为正在准备参加高考及数学竞赛的中学生开拓新颖的解题思路.

目　录



一、数列及其通项

在中学数学中，我们主要学习两类数列——等差数列和等比数列．在自然科学和管理科学中还存在着许许多多的离散问题，其中有许多问题涉及到求数列的通项，在中学数学中我们曾学过如下这类问题．

[例 1]　若一个数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，写出它的前五项．

解　由已知通项公式，则其各项为：

$$\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot6}.$$

[例 2]　若数列$\left\{a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n+n^2\right\}$，写出它的前五项，并求出前 100 项的和．

解　前五项为：$\left(-\frac{1}{2}\right)+1$，$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2^2$，$\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3^2$，$\left(-\frac{1}{2}\right)^4+4^2$，$\left(-\frac{1}{2}\right)^5+5^2$．

$$S_{100}=\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{100}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n+n^2\right]=\sum_{n=1}^{100}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{100}n^2$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{100\times101\times201}{6}$$

$$=-\frac{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right]}{3}+338350.$$

此题给出了数列的通项，数列有限项的和就可以用求和公式求得.

[例 3] 给出数列的前若干项如下，写出适合已知项的一个数列的通项.

(1) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{14}$, …

(2) 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, …

(3) 1, 0, 1, 0, 1, 0, …

(4) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, …

(5) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

解 由于只给出了前若干项，因此求得的通项不一定能反映这个数列后面的未知项的变化规律，所以这样写出的"通项"就只能适合数列的前若干项，并且"通项"的形式不唯一.

(1) 此数列的分子、分母都是等差数列，

$$\therefore\quad a_n=\frac{n+2}{3n+2}.$$

(2) $\because\quad 0.9=1-\frac{1}{10}\quad 0.99=1-\left(\frac{1}{10}\right)^2\ \cdots$

$$\therefore\quad 可推出\ a_n=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

(3) 根据题意，通项可以写成 $a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ 或 $a_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$，也可以是

$$a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}$$
$$+K(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

其中 $K=K(n)$，是 n 的函数，且 $K(n)\neq 0\ (n\geqslant 7)$.

(4) 当 n 为奇数时，$a_n=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}$；

当 n 为偶数时，$a_n=\dfrac{n}{2}$.

于是，通项可写成 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}(n\text{ 是奇数})；\\ \dfrac{n}{2}(n\text{ 是偶数}).\end{cases}$

由(3)知，这个数列的通项公式也可写成

$$a_n=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

或
$$a_n=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}[1+(-1)^{n+1}].$$

(5) 因为给出的若干项是高阶等差数列*

则有 a_n:　　1,　3,　6,　10,　15,　21…　,

$b_n=a_{n+1}-a_n$:　　2　3　4　5　6…　,

$$\because\quad b_n=n+1,$$

---

* 本书第九节的“递归数列的应用”中，将着重介绍求高阶等差数列的通项及其前 n 项和。

$$\therefore \quad a_{n+1}-a_n=n+1 \quad (n\geqslant 1).$$

由递推，得

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\ a_n &= n+1, \\ a_n-a_{n-1} &= n, \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_2-a_1 \quad &= 2. \end{aligned}$$

将上面各式相加，有 $a_{n+1}-a_1=\dfrac{n(n+3)}{2}$，

$$\because \quad a_1=1, \quad \therefore \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

于是 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

从例 3 我们看到，对数列通项的求法，首先可以考虑能否利用等差数列、等比数列的通项公式来直接求出．这种求法，在数列中较为常见．它是从特殊到一般进行归纳推理，于是便可归纳出数列的通项来．如例 3 中的(1)、(3)、(4)、例 3(2)也是利用了从特殊到一般的归纳推理思想，但这样得到的通项 a_n 需要经过数学归纳法的论证.

我们也可以利用递推关系来求数列的通项，如例 3(5).

下面我们将学习另一种用解方程的方法来求数列的通项公式，我们先看下面几例:

[例 4]　一个数列从第二项开始，后一项与前一项的差是常数，求此数列的通项所满足的关系式.

解　这是一个等差数列，由"定义"知有如下关系式

$$a_n-a_{n-1}=d, \quad (n\geqslant 2) \tag{1.1}$$

根据已知条件,我们还可由 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=d$ 得到等差数列三个相邻的项 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 之间满足的一个关系式,即

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0. \tag{1.2}$$

[例 5] 一个数列从第二项开始, 后一项与前一项之比为常数,求此数列的通项所满足的关系式.

解 这是一个等比数列,由"定义"有如下关系式

$$a_n=qa_{n-1}. \tag{1.3}$$

同上例相类似, 我们还可得到等比数列三个相邻的项 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 之间满足的一个关系式, 即

$$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n-2}. \tag{1.4}$$

现在我们来考虑两个问题:能否从(1.2)式求出等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 呢?同样, 能否从 (1.3) 或 (1.4)式求出等比数列的通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ 呢?

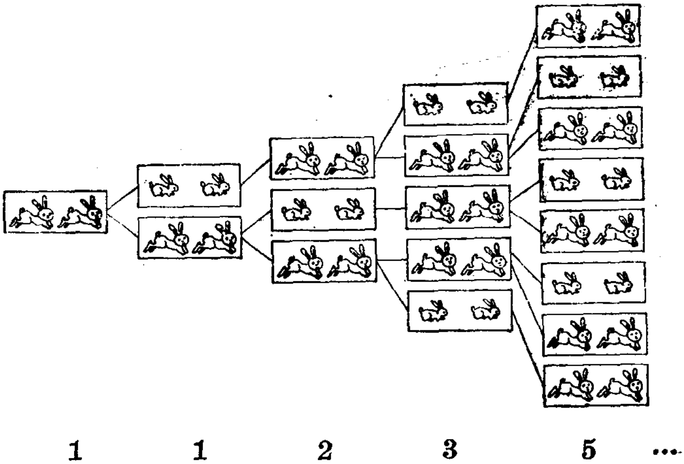
在实践中还有许多数列问题, 如下面要讲的养兔问题和着色问题等, 都能推导得到一个通项之间的递推关系式.

[例 6] 养兔问题(见前言).

解 设第 n 个月共有 a_n 对大兔. 由前言部分的分析, $\{a_n\}$组成斐波那契数列,即

$a_0=1, a_1=1, a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=8\cdots$如图所示.

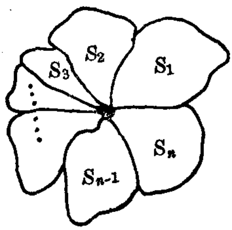
第 n 个月的大兔的对数 a_n 是由两部分构成的, 其中一部分是第$(n-1)$个月的大兔对数 a_{n-1}; 第二部分是由$(n-2)$个大兔所生的小兔而长成的大兔数, 共有 a_{n-2} 对.



$\therefore\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. (这里 $a_0=1$, $a_1=1$, $n=2,3,\cdots$)

(1.5)

[例 7] (着色问题)地图上某一地区有 n 个国家相邻，但 n 个国家只有一个公共点(如图).现用红、黄、绿三种颜色给地图染色，但不许相邻的国家有相同的颜色，问共有多少种染法?



解 设共有 a_n 种染法.

对第一个国家 S_1 共有 3 种染法(可涂红、或黄、或绿)，则涂去 S_1 后，对第二个国家 S_2 只有 2 种染法(S_1 染色后，对 S_2 只有两种颜色可选择了)，同理，对 S_3 有 2 种染法，对 S_4, S_5, …直到 S_n 每个国家都有 2 种染法. 所以共有

$3\times 2^{n-1}$ 种染法. 而在对 S_n 染色时，是以 S_{n-1} 为参照的，它有 2 种染法，这 2 种颜色可能与 S_1 不同色，也可能与 S_1 同色，而 S_n 与 S_1 同色情况必须排除. 但 S_n 与 S_1 同色的情形有多少种呢？事实上只要把 S_n 与 S_1 的交界线拆除就成为同一块了，这时就是 $(n-1)$ 块不同的染法，即 a_{n-1} 种.

$$\therefore \quad a_n=3\cdot 2^{n-1}-a_{n-1}. \tag{1.6}$$

［例 8］ 在一个核反应器内有两类粒子，在每秒钟里，1 个 α 粒子分裂成 3 个 β 粒子，1 个 β 粒子分裂成 1 个 α 粒子和 2 个 β 粒子. 如果在时间 $t=0$ 时，反应器里只有 1 个 α 粒子，那么在时间 $t=100$ 秒时，有多少个 α 粒子、β 粒子？

解 设在时间 $t=n$ 秒时，有 a_n 个 α 粒子，有 b_n 个 β 粒子，因为第 n 秒时的 α 粒子是由第 $(n-1)$ 秒时的 β 粒子分裂出来的，所以 $a_n=b_{n-1}$. 而第 n 秒时的 β 粒子是由第 $(n-1)$ 秒时的 α 粒子和 β 粒子分裂得到的，所以 $b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$.

由此得到方程组

$$\begin{cases} a_n=b_{n-1}, \\ b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}, \end{cases} \tag{1.7}$$

且 $$a_0=1,\ b_0=1.$$

从以上八个例子我们可以看到，一个数列的通项，大致有如下几种求法：

1° 由“定义”给出，如等差数列，等比数列的通项（如例 4、例 5）；

2° 直接给出数列的通项表达式 $a_n=f(n)$（如例 1、例 2）；

3° 给出数列的前若干项，根据它的变化规律，归纳总结出适合前若干项的一个通项公式（如例 3）；

4° 一个数列的第 n 项，如果不能用序号 n 来直接表示，有时可由方程或方程组形式给出此数列通项 a_n 的关系式. 如式(1.1)，(1.2)，(1.3)，(1.4)，(1.5)，(1.6)，(1.7).

一般地，形如

$$a_n=p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ka_{n-k} \tag{1.8}$$

（其中 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是常数. ）的方程，我们称为 k 阶递归方程. 满足递归方程的数列 $\{a_n\}$，就称为 k 阶递归数列或 k 阶循环数列. 因为这个递归数列的变化规律及性质都内含在方程(1.8)或者它的方程组中，因此，我们可以通过解方程(1.8)或它的方程组来求出通项公式 a_n.

用递归方程解出递归数列的通项的方法，对学习数列的有关知识将带来很多方便. 本书从第二节起将介绍如何求解各类递归方程和利用递推的思想求数列通项的方法.

下面我们先来讨论二阶常系数线性齐次递归方程的解法.

二、二阶常系数线性齐次递归方程的解法

定义　若 p_1, p_2 是实数, 且数列$\{a_n\}$的通项满足

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}=f(n), \quad (n>2) \tag{2.1}$$

则称数列$\{a_n\}$为递归数列, 其所满足的方程称为二阶线性递归方程. 若 $f(n)\neq 0$, (2.1)称为二阶常系数线性非齐次递归方程. 若 $f(n)\equiv 0$, (2.1)称为二阶常系数线性齐次递归方程. 即

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}=0. \tag{2.2}$$

若令 $a_n=x^n$, 代入(2.2), 得

$$x^2+p_1x+p_2=0. \tag{2.3}$$

这个方程就称对应于(2.2)的特征方程.

方程(2.2)的解中, 如果含有两个任意常数, 并从这个解能得到任何特解, 那么这个含有两个任意常数的解就称为通解. 所谓特解, 是相对于通解而言, 它是递归方程的符合给定已知条件的解. 从通解来确定特解, 需要给予附加条件, 这条件称为方程的初始条件.