

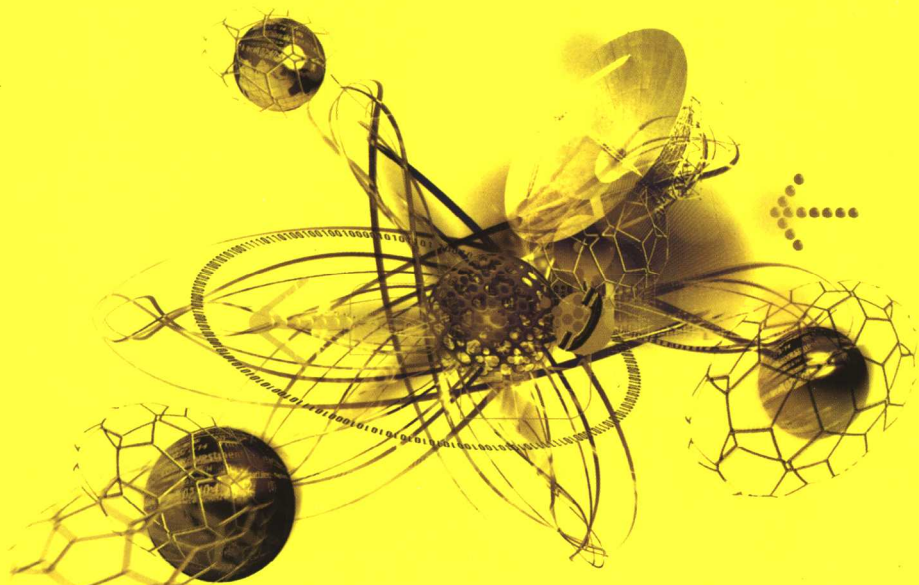
大学生学习的良师益友 考研、竞赛的资料指南

# 高等数学题典

——好题精编

下册

黄光谷 等编



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

大学生学习的良师益友 考研、竞赛的资料指南

# 高等数学题典

## 好题精编

下册

黄光谷 黄川 编  
李杨 蔡晓英



机械工业出版社

本书精选了高等数学（或微积分、数学分析）常用的五种优秀教材（或图书）中的有代表性的好习题（或考题），并对其作了分析或解答，按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称“考纲”）“数学一”中高等数学所列顺序编目，分为八章，下册四章依次是多元函数微分学、多元函数积分学，无穷级数与常微分方程，各章开始列有“考纲”的考试要求，各节开始列有主要概念、方法、公式及定理，然后由浅入深，按上册前言中五种书的顺序，精选了相应节的好题并逐题作了分析或解答。本书集各家之长，精选各书好题于一书，循序渐进，具有代表性、典型性、系统性、资料性和很强的可读性，特别适合各工科、理科、农林、财经管理等本科或专科、“专升本”各专业大学生学习高等数学（或微积分、数学分析）课程时作为必读参考书，也是考研或参加数学竞赛者的优秀复习资料，还可为教师提供命题参考。

## 图书在版编目（CIP）数据

高等数学题典. 下册/黄光谷等编. —北京：机械工业出版社，2005.11

ISBN 7-111-17722-3

I. 高… II. 黄… III. 高等数学—习题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 125964 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：刘小慧

责任编辑：郑 玫 版式设计：张世琴

责任印制：洪汉军 责任校对：魏俊云

北京京丰印刷厂印刷

2006 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

850mm × 1168mm  $1/_{32}$  · 15.75 印张 · 419 千字

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68326294

封面防伪标均为盗版

## 前 言

要学好数学，除了深入理解数学理论和基本概念以外，就是会解决具体的数学问题，并从中掌握方法和培养能力，本书更侧重于后者。

本书精选了下列五种优秀教材或图书中的好习题或考题，并对其作了分析或解答：

1. 同济大学应用数学系主编，高等数学，第五版，简称“高数”。

2. 同济大学应用数学系主编，微积分，第一、二版，简称“微积分”（本书上册用第一版，下册用第二版）。

3. 王绵森、马知恩主编，工科数学分析基础，简称“分析”。

4. 1987~2004年全国硕士研究生入学统一考试数学一至四试题，简称“考研题”。例如，注有（研，2004，一）者，指该题是2004年全国硕士研究生入学考试数学一的试题，其余类似。

5. 全国各省市或重点院校历年大学生数学竞赛试题，简称“竞赛题”。例如，注有（赛，1999，京）者，指该题是1999年北京市数学竞赛试题，其余类似。

本书按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称“考纲”）数学一高等数学所列考试内容的顺序编目，上册含函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何共四章；下册含多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程共四章。各章开始列有“考纲”的考试要求，便于读者掌握分寸、明确学习和复习该章内容的目的和要求。“考纲”是根据“高等数学课程基本要求”制定的，所以达到了考试大纲的要求，也完全达到了教学要求。

#### IV

阅读各章考纲要求时，要注意其中了解、理解、会、掌握等用词层次的不同，以便把握分寸。

各章内根据内容，划分成了若干节，每节开始列有主要概念、方法、公式及定理；便于复习引用，其记号与同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）一致；然后，按照由浅入深、由易到难和上述五种书的顺序，精选了各书的有代表性的习题或考题，给出了解答。有的题已有详细的分析或提示，则以其分析或提示代替解答，避免重复解答；简要的分析或提示用方头括号【】标出，这五种书中的习题或考题都较好，但本书限于篇幅，各精选其中约 $\frac{1}{5}$ 至 $\frac{1}{4}$ 合成一书，所以读此一书相当于读了五种书的精华。

特别感谢同济大学郭镜明教授。另外，本书中用到许多资料，向所引用书籍的作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中可能会有缺点或错误，恳请读者和同行批评指正，以便再版时修改。

编者

# 目 录

## 前言

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| <b>第五章 多元函数微分学</b> .....       | 1  |
| <b>考纲要求</b> .....              | 1  |
| <b>第一节 多元函数的基本概念 偏导数</b> ..... | 1  |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....          | 1  |
| 二、高数题选解 .....                  | 3  |
| 三、微积分题选解 .....                 | 7  |
| 四、分析题选解 .....                  | 10 |
| 五、考研题选解 .....                  | 13 |
| 六、竞赛题选解 .....                  | 15 |
| <b>第二节 全微分</b> .....           | 17 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....          | 17 |
| 二、高数题选解 .....                  | 18 |
| 三、微积分题选解 .....                 | 19 |
| 四、分析题选解 .....                  | 21 |
| 五、考研题选解 .....                  | 22 |
| 六、竞赛题选解 .....                  | 23 |
| <b>第三节 多元复合函数的求导法则</b>         |    |
| <b>隐函数(组)求导公式</b> .....        | 24 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....          | 24 |
| 二、高数题选解 .....                  | 25 |
| 三、微积分题选解 .....                 | 30 |
| 四、分析题选解 .....                  | 32 |
| 五、考研题选解 .....                  | 34 |
| 六、竞赛题选解 .....                  | 39 |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| 第四节 多元函数微分学的几何应用            |           |
| 方向导数与梯度 .....               | 41        |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....       | 41        |
| 二、高数题选解 .....               | 43        |
| 三、微积分题选解 .....              | 48        |
| 四、分析题选解 .....               | 51        |
| 五、考研题选解 .....               | 54        |
| 六、竞赛题选解 .....               | 57        |
| 第五节 多元函数的极值与最大(小)值 .....    | 59        |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....       | 59        |
| 二、高数题选解 .....               | 60        |
| 三、微积分题选解 .....              | 63        |
| 四、分析题选解 .....               | 65        |
| 五、考研题选解 .....               | 67        |
| 六、竞赛题选解 .....               | 72        |
| * 第六节 二元函数的泰勒公式 最小二乘法 ..... | 76        |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....       | 76        |
| 二、高数题选解 .....               | 77        |
| 第七节 总习题五选解 .....            | 78        |
| 一、高数题选解 .....               | 78        |
| 二、微积分题选解 .....              | 84        |
| 三、分析题选解 .....               | 88        |
| 四、考研题选解 .....               | 89        |
| 五、竞赛题选解 .....               | 93        |
| <b>第六章 多元函数积分学</b> .....    | <b>97</b> |
| <b>考纲要求</b> .....           | <b>97</b> |
| 第一节 二重积分的概念与性质 .....        | 97        |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....       | 97        |
| 二、高数题选解 .....               | 98        |
| 三、微积分题选解 .....              | 100       |
| 四、分析题选解 .....               | 104       |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 五、考研题选解 .....             | 104        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 105        |
| <b>第二节 二重积分的计算法 .....</b> | <b>107</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 107        |
| 二、高数题选解 .....             | 108        |
| 三、微积分题选解 .....            | 118        |
| 四、分析题选解 .....             | 122        |
| 五、考研题选解 .....             | 128        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 135        |
| <b>第三节 三重积分 .....</b>     | <b>138</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 138        |
| 二、高数题选解 .....             | 139        |
| 三、微积分题选解 .....            | 143        |
| 四、分析题选解 .....             | 147        |
| 五、考研题选解 .....             | 150        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 153        |
| <b>第四节 重积分的应用 .....</b>   | <b>155</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 155        |
| 二、高数题选解 .....             | 157        |
| 三、微积分题选解 .....            | 159        |
| 四、分析题选解 .....             | 163        |
| 五、考研题选解 .....             | 165        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 168        |
| <b>第五节 两类曲线积分 .....</b>   | <b>171</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 171        |
| 二、高数题选解 .....             | 174        |
| 三、微积分题选解 .....            | 178        |
| 四、分析题选解 .....             | 181        |
| 五、考研题选解 .....             | 183        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 186        |
| <b>第六节 格林公式及其应用 .....</b> | <b>188</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 188        |



|                              |            |
|------------------------------|------------|
| 二、高数题选解 .....                | 189        |
| 三、微积分题选解 .....               | 192        |
| 四、分析题选解 .....                | 195        |
| 五、考研题选解 .....                | 197        |
| 六、竞赛题选解 .....                | 201        |
| <b>第七节 两类曲面积分 .....</b>      | <b>203</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....        | 203        |
| 二、高数题选解 .....                | 206        |
| 三、微积分题选解 .....               | 211        |
| 四、分析题选解 .....                | 216        |
| 五、考研题选解 .....                | 219        |
| 六、竞赛题选解 .....                | 223        |
| <b>第八节 高斯公式与斯托克斯公式 .....</b> | <b>226</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....        | 226        |
| 二、高数题选解 .....                | 228        |
| 三、微积分题选解 .....               | 233        |
| 四、分析题选解 .....                | 237        |
| 五、考研题选解 .....                | 239        |
| 六、竞赛题选解 .....                | 242        |
| <b>第九节 总习题六选解 .....</b>      | <b>244</b> |
| 一、高数题选解 .....                | 244        |
| 二、微积分题选解 .....               | 251        |
| 三、分析题选解 .....                | 259        |
| 四、考研题选解 .....                | 261        |
| 五、竞赛题选解 .....                | 266        |
| <b>第七章 无穷级数 .....</b>        | <b>271</b> |
| <b>考纲要求 .....</b>            | <b>271</b> |
| <b>第一节 常数项级数及其审敛法 .....</b>  | <b>272</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....        | 272        |
| 二、高数题选解 .....                | 273        |
| 三、微积分题选解 .....               | 278        |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 四、分析题选解 .....             | 287        |
| 五、考研题选解 .....             | 290        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 296        |
| <b>第二节 幂级数及其应用 .....</b>  | <b>299</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 299        |
| 二、高数题选解 .....             | 301        |
| 三、微积分题选解 .....            | 308        |
| 四、分析题选解 .....             | 314        |
| 五、考研题选解 .....             | 320        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 325        |
| <b>第三节 傅里叶级数 .....</b>    | <b>329</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 329        |
| 二、高数题选解 .....             | 331        |
| 三、微积分题选解 .....            | 337        |
| 四、分析题选解 .....             | 341        |
| 五、考研题选解 .....             | 344        |
| 六、竞赛题选解 .....             | 347        |
| <b>第四节 总习题七选解 .....</b>   | <b>349</b> |
| 一、高数题选解 .....             | 349        |
| 二、微积分题选解 .....            | 357        |
| 三、分析题选解 .....             | 362        |
| 四、考研题选解 .....             | 363        |
| 五、竞赛题选解 .....             | 366        |
| <b>第八章 常微分方程 .....</b>    | <b>373</b> |
| <b>考纲要求 .....</b>         | <b>373</b> |
| <b>第一节 常微分方程的基本概念 可分离</b> |            |
| <b>变量的微分方程 .....</b>      | <b>373</b> |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....     | 373        |
| 二、高数题选解 .....             | 374        |
| 三、微积分题选解 .....            | 379        |
| 四、分析题选解 .....             | 381        |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 五、考研题选解 .....                      | 385 |
| 六、竞赛题选解 .....                      | 390 |
| 第二节 齐次方程 一阶线性微分方程 .....            | 394 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....              | 394 |
| 二、高数题选解 .....                      | 395 |
| 三、微积分题选解 .....                     | 402 |
| 四、分析题选解 .....                      | 405 |
| 五、考研题选解 .....                      | 407 |
| 六、竞赛题选解 .....                      | 416 |
| 第三节 全微分方程 可降阶的高阶微分方程 .....         | 419 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....              | 419 |
| 二、高数题选解 .....                      | 419 |
| 三、微积分题选解 .....                     | 426 |
| 四、分析题选解 .....                      | 429 |
| 五、考研题选解 .....                      | 430 |
| 六、竞赛题选解 .....                      | 436 |
| 第四节 高阶线性微分方程 常系数齐次线性<br>微分方程 ..... | 441 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....              | 441 |
| 二、高数题选解 .....                      | 442 |
| 三、微积分题选解 .....                     | 448 |
| 四、分析题选解 .....                      | 450 |
| 五、考研题选解 .....                      | 452 |
| 六、竞赛题选解 .....                      | 457 |
| 第五节 常系数非齐次线性微分方程 欧拉方程 .....        | 461 |
| 一、主要概念、方法、公式及定理 .....              | 461 |
| 二、高数题选解 .....                      | 462 |
| 三、微积分题选解 .....                     | 470 |
| 四、分析题选解 .....                      | 470 |
| 五、考研题选解 .....                      | 472 |
| 六、竞赛题选解 .....                      | 475 |
| 第六节 总习题八选解 .....                   | 478 |

|                   |            |
|-------------------|------------|
| 一、高数题选解 .....     | 478        |
| 二、微积分题选解 .....    | 483        |
| 三、分析题选解 .....     | 486        |
| 四、考研题选解 .....     | 487        |
| 五、竞赛题选解 .....     | 488        |
| <b>参考文献</b> ..... | <b>490</b> |

## 第五章 多元函数微分学

### 考纲要求

1. 理解多元函数的概念, 理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念, 以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件和充分条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
6. 了解隐函数的存在定理, 会求多元隐函数的偏导数.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值, 会求简单多元函数的最大值和最小值, 并会解决一些简单的应用问题.

### 第一节 多元函数的基本概念 偏导数

#### 一、主要概念、方法、公式及定理

##### 1. 平面点集 $n$ 维空间

内点、外点、边界点、聚点, 开集、闭集、连通集、区域、

有界集、无界集等基本概念 (略, 见 [1] 下册, P.1).

二维邻域  $\dot{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid |PP_0| < \delta\}$ .

去心邻域  $\dot{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$ .

$n$  维空间  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ .

范数(距离)

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

极限  $x, a \in \mathbf{R}^n, \|x \rightarrow a\| \rightarrow 0 \iff x \rightarrow a$ .

2. 多元函数(以二元函数为例)

定义 1 非空集  $D \subset \mathbf{R}^2$ , 映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  称为二元函数, 记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \text{ 或 } z = f(P), P \in D.$$

称  $D$  为定义域,  $f$  的图形是空间曲面.

3. 多元函数的极限

定义 2 设  $f(x, y)$  的定义域是  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $P(x, y) \in \dot{U}(P_0, \delta) \cap D$  时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

称

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \triangleq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ (常数)},$$

或

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0).$$

极限  $A$  又称为二重极限, 简称极限.

4. 多元函数的连续性

定义 3 若定义 2 中  $P_0 \in D$ , 且

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) = f(x, y),$$

称  $f(x, y)$  在  $P_0$  连续, 记为  $f(P) \in C(P_0)$ ; 不连续的点称为间断点.

一切多元初等函数在定义区域(包含在定义域内的区域或闭区域)上连续.

性质 在有界闭域  $D$  上连续的多元函数在  $D$  上有界、能取到最大最小值, 还有介值性(含零值性)与一致连续性(类似一元函

数,叙述略).

### 5. 偏导数

定义 4  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$   
 $\triangleq f_x(x_0, y_0) = z_x(P_0).$

### 6. 高阶偏导数

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

定理  $z_{xy}, z_{yx} \in C(D) \implies z_{xy} = z_{yx}.$

求偏导数(或高阶偏导数),只需把其余的自变量视为参变量(常量),运用一元函数求导法算之;对于分段函数衔接点处的偏导数,还需用定义求之.

### 二、高数题选解(习题 8-1、习题 8-2, [1](下册)P. 11、P. 18)

1. 已知函数  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$ , 试求  $f(tx, ty)$ . (原书习题 8-1 第 2 题)

解 【只需用  $tx, ty$  分别代换  $x$  与  $y$ .】

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) \tan \frac{tx}{ty} \\ &= t^2 \left( x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right) = t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

注 这时称  $f(x, y)$  为二次齐次函数. 一般地, 若

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

则称  $f(x, y)$  为  $k$  次齐次函数, 当  $k=0$  时, 即有

$$f(tx, ty) = f(x, y),$$

则为零次齐次函数, 又简称为齐次函数.

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1); \quad (2) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(原书习题 8-1 第 5 题)

解 【与一元函数求定义域类似, 可由解不等式或不等式组确

定多元函数的定义域.]

(1) 由  $y^2 - 2x + 1 > 0 \implies y^2 > 2x - 1$ , 定义域为

$$D = \{(x, y) \mid y^2 > 2x - 1\}.$$

若要画出定义域, 可先作其边界的图形. 此题区域的边界是开口向右的抛物线  $x = \frac{y^2 + 1}{2}$ , 它将平面区域分为左、右两部分, 由  $x < \frac{y^2 + 1}{2}$  或  $y^2 > 2x - 1$  知, 所求区域位于边界抛物线的左方(读者想像图形或自绘草图验证. 下同. 画图时应注意, 边界是否在定义域内.)

$$(2) \text{ 因 } \begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0 \\ \left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) \\ z^2 \leq x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ 故}$$

$$V = \{(x, y, z) \mid z^2 \leq x^2 + y^2, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

它是位于锥面  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$  的外部且不含原点的空间区域.

3. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y}; \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}.$$

(原书习题 8-1 第 6 题)

解 【求多元函数极限的常用方法有: 利用四则运算法则与连续性, 由变量代换化为一元函数求极限, 利用初等变形, 利用两边夹法则与无穷小性质等.】

(1) 化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \left[ \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot x \right] \\ &\stackrel{t=xy}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 1 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

⊙  $\begin{matrix} x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$  即  $(x, y) \rightarrow (2, 0)$ , 下同, 不注.



(2) 变形化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 \frac{4}{x^2 + y^2} \cdot e^0} \\ &= \frac{2t = x^2 + y^2}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

4. 证明极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$  不存在. (原书习题 8-1 第 7 题)

证 【对于重极限, 自变量的变化过程, 即点  $P \rightarrow P_0$  的方式有无穷多种. 如果其中任意两种方式下求出的极限值不相等, 则原极限不存在.】

设动点  $P(x, y) \rightarrow P_0(0, 0)$  是沿直线  $y = kx$  的方式进行, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} &= \lim_{y=kx \rightarrow 0} \frac{x+kx}{x-kx} \\ &= \frac{1+k}{1-k} \triangleq I (k \neq 1). \end{aligned}$$

由于  $k$  可取不同的数值, 于是  $I = \frac{1+k}{1-k}$  不是一个确定的常数, 故原极限不存在. 例如, 取  $k_1 = -1$ , 则对应的  $I_1 = 0$ ; 取  $k_2 = 2$ , 则  $I_2 = -3 \neq I_1$ .

5. 证明  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ . (原书习题 8-1 第 9 题)

证 【用重极限的定义或夹逼准则证之.】因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| &= \frac{\sqrt{x^2 \cdot y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\triangleq \frac{1}{2} \rho (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |OP|, P(x, y)), \end{aligned}$$

于是,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = 2\epsilon > 0$ , 当  $0 < \rho < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon, \text{ 故 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$