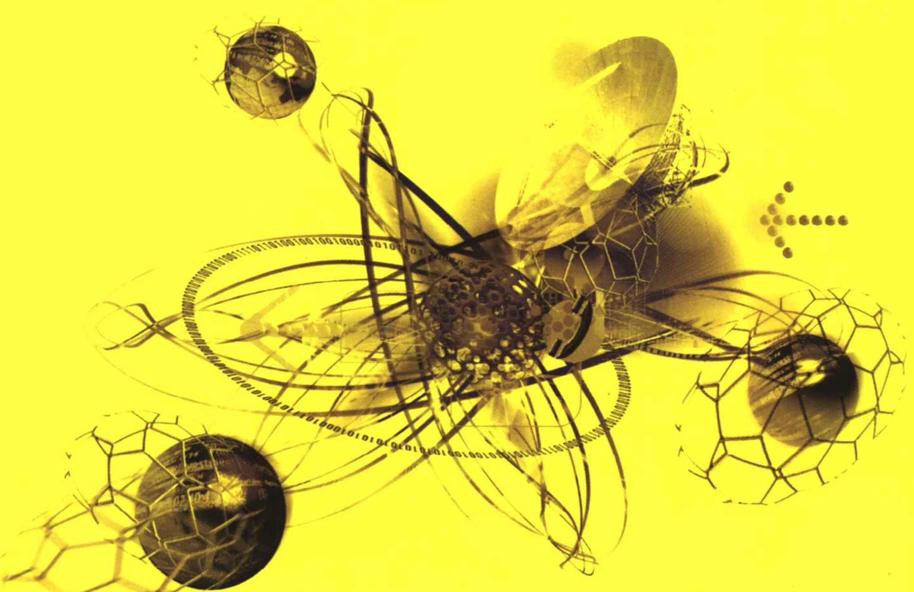
大学生学习的良师益友 考研、竞赛的资料指南

高等数学题典

——好题精编

下册

黄光谷 等编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学生学习的良师益友　考研、竞赛的资料指南

高等数学题典

好题精编

下册

黄光谷　黄　川
李　杨　蔡晓英　编

机械工业出版社

本书精选了高等数学（或微积分、数学分析）常用的五种优秀教材（或图书）中的有代表性的好习题（或考题），并对其作了分析或解答，按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称“考纲”）“数学一”中高等数学所列顺序编目，分为八章，下册四章依次是多元函数微分学、多元函数积分学，无穷级数与常微分方程，各章开始列有“考纲”的考试要求，各节开始列有主要概念、方法、公式及定理，然后由浅入深，按上册前言中五种书的顺序，精选了相应节的好题并逐题作了分析或解答。本书集各家之长，精选各书好题于一书，循序渐近，具有代表性、典型性、系统性、资料性和很强的可读性，特别适合各工科、理科、农林、财经管理等本科或专科、“专升本”各专业大学生学习高等数学（或微积分、数学分析）课程时作为必读参考书，也是考研或参加数学竞赛者的优秀复习资料，还可为教师提供命题参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学题典．下册/黄光谷等编．—北京：机械工业出版社，2005.11

ISBN 7-111-17722-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．高等数学-习题

Ⅳ．013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第125964号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：刘小慧

责任编辑：郑　玫　版式设计：张世琴

责任印制：洪汉军　责任校对：魏俊云

北京京丰印刷厂印刷

2006年1月第1版·第1次印刷

850mm×1168mm 1/32·15.75印张·419千字

定价：28.00元

前　　言

要学好数学，除了深入理解数学理论和基本概念以外，就是会解决具体的数学问题，并从中掌握方法和培养能力，本书更侧重于后者。

本书精选了下列五种优秀教材或图书中的好习题或考题，并对其作了分析或解答：

1. 同济大学应用数学系主编，高等数学，第五版，简称“高数”。

2. 同济大学应用数学系主编，微积分，第一、二版，简称“微积分”（本书上册用第一版，下册用第二版）。

3. 王绵森、马知恩主编，工科数学分析基础，简称“分析”。

4. 1987～2004年全国硕士研究生入学统一考试数学一至四试题，简称“考研题”。例如，注有（研，2004，一）者，指该题是2004年全国硕士研究生入学考试数学一的试题，其余类似。

5. 全国各省市或重点院校历年大学生数学竞赛试题，简称“竞赛题”。例如，注有（赛，1999，京）者，指该题是1999年北京市数学竞赛试题，其余类似。

本书按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称“考纲”）数学一高等数学所列考试内容的顺序编目，上册含函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何共四章；下册含多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程共四章。各章开始列有“考纲”的考试要求，便于读者掌握分寸、明确学习和复习该章内容的目的和要求。“考纲”是根据“高等数学课程基本要求”制定的，所以达到了考试大纲的要求，也完全达到了教学要求。

阅读各章考纲要求时，要注意其中了解、理解、会、掌握等用词层次的不同，以便把握分寸。

各章内根据内容，划分成了若干节，每节开始列有主要概念、方法、公式及定理，便于复习引用，其记号与同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）一致；然后，按照由浅入深、由易到难和上述五种书的顺序，精选了各书的有代表性的习题或考题，给出了解答。有的题已有详细的分析或提示，则以其分析或提示代替解答，避免重复解答；简要的分析或提示用方头括号【 】标出，这五种书中的习题或考题都较好，但本书限于篇幅，各精选其中约$\frac{1}{5}$至$\frac{1}{4}$合成一书，所以读此一书相当于读了五种书的精华。

特别感谢同济大学郭镜明教授。另外，本书中用到许多资料，向所引用书籍的作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中可能会有缺点或错误，恳请读者和同行批评指正，以便再版时修改。

编　者

目　录

第五章　多元函数微分学

考纲要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 了解隐函数的存在定理，会求多元隐函数的偏导数.

7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

第一节　多元函数的基本概念　偏导数

一、主要概念、方法、公式及定理

1. 平面点集　n 维空间

内点、外点、边界点、聚点，开集、闭集、连通集、区域、

有界集、无界集等基本概念（略，见［1］下册，P.1）.

二维邻域　$\mathring{U}\ (P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |PP_0|<\delta\}$.

去心邻域　$\mathring{U}\ (P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$.

***n* 维空间**　$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

范数(距离)

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

极限　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\|\to 0\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.

2. 多元函数(以二元函数为例)

定义 1　非空集 $D\subset\mathbf{R}^2$,映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为二元函数,记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D \text{ 或 } z=f(P),P\in D.$$

称 D 为定义域,f 的图形是空间曲面.

3. 多元函数的极限

定义 2　设 $f(x,y)$的定义域是 D,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

称

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\triangleq\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A(\text{常数}),$$

或

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A,f(P)\to A(P\to P_0).$$

极限 A 又称为二重极限,简称极限.

4. 多元函数的连续性

定义 3　若定义 2 中 $P_0\in D$,且

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)=f(x,y),$$

称 $f(x,y)$在 P_0 连续,记为 $f(P)\in C(P_0)$;不连续的点称为间断点.

一切多元初等函数在定义区域(包含在定义域内的区域或闭区域)上连续.

性质　在有界闭域 D 上连续的多元函数在 D 上有界、能取到最大最小值,还有介值性(含零值性)与一致连续性(类似一元函

数,叙述略).

5. 偏导数

定义 4 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \triangleq \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$$\triangleq f_x(x_0,y_0)=z_x(P_0).$$

6. 高阶偏导数

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

定理 $z_{xy}, z_{yx}\in C(D)\Longrightarrow z_{xy}=z_{yx}$.

求偏导数(或高阶偏导数),只需把其余的自变量视为参变量(常量),运用一元函数求导法算之;对于分段函数衔接点处的偏导数,还需用定义求之.

二、高数题选解(习题 8-1、习题 8-2,[1](下册)P.11、P.18)

1. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.(原书习题 8-1 第 2 题)

解 【只需用 tx, ty 分别代换 x 与 y.】

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y).$$

注 这时称 $f(x,y)$为二次齐次函数.一般地,若

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y),$$

则称 $f(x,y)$为 k 次齐次函数,当 $k=0$ 时,即有

$$f(tx,ty)=f(x,y),$$

则为零次齐次函数,又简称为**齐次函数**.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;　　(2) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(原书习题 8-1 第 5 题)

解 【与一元函数求定义域类似,可由解不等式或不等式组确

定多元函数的定义域.】

(1) 由 $y^2-2x+1>0 \Longrightarrow y^2>2x-1$,定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y^2>2x-1\}.$$

若要画出定义域,可先作其边界的图形.此题区域的边界是开口向右的抛物线 $x=\dfrac{y^2+1}{2}$,它将平面区域分为左、右两部分,由 $x<\dfrac{y^2+1}{2}$ 或 $y^2>2x-1$ 知,所求区域位于边界抛物线的左方(读者想像图形或自绘草图验证.下同.画图时应注意,边界是否在定义域内.)

(2) 因 $\begin{cases} x^2+y^2\neq 0 \\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x,y)\neq(0,0) \\ z^2\leqslant x^2+y^2 \end{cases}$,故

$$V=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2,(x,y)\neq(0,0)\}.$$

它是位于锥面 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 的外部且不含原点的空间区域.

3. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$[⊖];　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

(原书习题 8-1 第 6 题)

解 【求多元函数极限的常用方法有:利用四则运算法则与连续性,由变量代换化为一元函数求极限,利用初等变形,利用两边夹法则与无穷小性质等.】

(1) 化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]$$

$$\xlongequal{t=xy}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to 2}x=1\cdot 2=2.$$

⊖ $\substack{x\to 2 \\ y\to 0}$ 即 $(x,y)\to(2,0)$,下同,不注.

(2) 变形化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\frac{4}{x^2+y^2}\cdot e^0}$$

$$\xlongequal{2t=x^2+y^2}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$$

4. 证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在.(原书习题 8-1 第 7 题)

证 【对于重极限,自变量的变化过程,即点 $P\to P_0$ 的方式有无穷多种.如果其中任意两种方式下求出的极限值不相等,则原极限不存在.】

设动点 $P(x,y)\to P_0(0,0)$是沿直线 $y=kx$ 的方式进行,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y=kx\to 0}\frac{x+kx}{x-kx}$$

$$=\frac{1+k}{1-k}\triangleq I(k\neq 1).$$

由于 k 可取不同的数值,于是 $I=\dfrac{1+k}{1-k}$不是一个确定的常数,故原极限不存在.例如,取 $k_1=-1$,则对应的 $I_1=0$;取 $k_2=2$,则 $I_2=-3\neq I_1$.

5. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.(原书习题 8-1 第 9 题)

证 【用重极限的定义或夹逼准则证之.】因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\triangleq\frac{1}{2}\rho\left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|OP|,P(x,y)\right),$$

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=2\varepsilon>0$,当 $0<\rho<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}-0}\right|<\varepsilon,\ \text{故}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$