中学教学参考丛书

三 角 函 数

巩 宪 文 编

山 东 教 育 出 版 社

一九八六年·济南

中学教学参考丛书
三 角 函 数
巩宪文编
*
山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）
山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　5.5印张　117千字
1986年1月第1版　1986年1月第1次印刷
印数1—1,550
书号 7275·262　定价 0.80 元

编者的话

三角函数是中学数学的重要内容之一。为帮助中学数学教师搞好这部分内容的教学，我们特编了三角函数一书。

根据中学数学教学大纲的要求，书中较系统地介绍了三角函数的理论及应用，对三角函数中的难点和重点从不同的角度作了充分详细地论述。如，在讲三角函数图象的作法时，除讲图象的作法外，还用辩证观点阐述了平移、压缩图象和平移、压缩坐标的关系。再如，在讲三角恒等式的证明时，首先分析题意，找出解决问题的关键，然后用不同方法进行论证，找出较好方法，最后总结解决问题的规律。为使读者加深对三角函数的理解，在第五章还讲了三角函数在代数、几何方面的应用。

本书内容的讲述由浅入深，由易到难，文字通俗流畅，易于理解。书中配有一定数量具有广泛代表性的例题和习题。恳请读者批评指正。

一九八四年七月

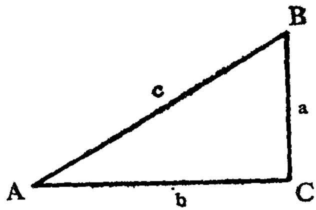
目　录

第一章　任意角的三角函数

锐角三角函数一般是在直角三角形ABC内定义的。用a、b、c分别表示锐角A、锐角B和直角C的对边，用$\frac{a}{c}$定义$\sin A$，$\frac{b}{c}$定义$\cos A$，$\frac{a}{b}$定义$\text{tg}A$等等。当前通用教材是用坐标定义的。

这种概念产生于测量和计算线段长度、角的大小。

由平面几何知道，在$Rt\triangle ABC$内（图1—1），若$\angle A=30°$，则$a=\frac{c}{2}$，$\angle B=60°$；由勾股定理推知，$b=\frac{\sqrt{3}c}{2}$，$a:b:c=\frac{c}{2}:\frac{\sqrt{3}c}{2}:c=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$。



（图1—1）

于是只要知a、b、c三者之一，则其余的即可算出。

同理，若$\angle A=45°$，则$\angle B=45°$，$a:b:c=a:a:\sqrt{2}a=1:1:\sqrt{2}$。任知$a$、$b$、$c$中之一，也可求出其余。

在实际简易测量中，根据相似三角形的对应边成比例，常常用一角为30°（或45°）的直角三角形目测高和距离，所以常用三角板是这两种类型的。

但是实际测量中，由于地形限制，不一定都能用上以上

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.

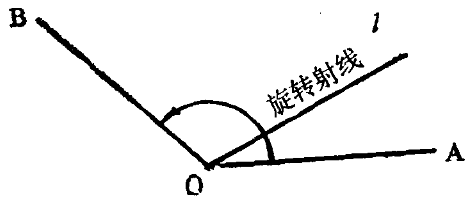
两种类型的三角板；由计算边长的实际问题而抽象出的三角形，也不一定含有30°或45°角。这一矛盾怎样解决？分析研究得出结论：直角三角形内两边之比与边的长短无关，仅与锐角的大小有关。因此产生了锐角三角函数概念。

在这一章里我们要把锐角三角函数概念推广到任意角的三角函数，并研究它们的性质、相互关系、图象等。

一、概念和性质

1.任意角及其有关概念

我们知道两线相交产生四个角，从一点出发的两射线构成两个角，一般把那个较小的，叫做它们所成的角。此外如时针绕中心旋转，车床上的摇把可依不同的方向旋转，都可以得到不同的角。如图1—2所示，一射线l从原始位置OA起按反时针方向旋转到OB，生成了角AOB。为了区别两种旋转方向所生成的角，我们把射线反时针方向旋转生成的角叫做正角，顺时针方向旋转生成的角叫做负角。角的大小由旋转



（图1—2）

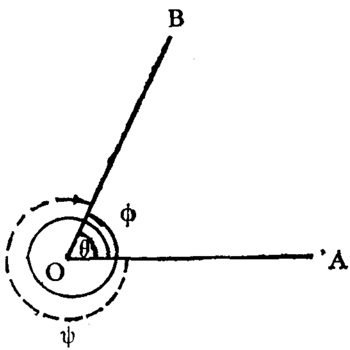
量的大小决定，角的正负由旋转的方向来决定。正负角的大小关系和正负数的大小关系一样，正角大于负角，正角的旋转量

越大，角的值也越大，负角的旋转量越大，角的值反而越小。

旋转射线的端点O叫做角的顶点，旋转射线开始的位置OA叫做角的始边，停止的位置OB叫做终边。

两个任意角的始边与终边相同，这两个角不一定相等。

如图1—3所示，OA与OB各有稳定位置，如果不加箭头表示，OA是反时针方向达到的OB，还是顺时针方向达到的OB？无论反时针方向或顺时针方向，旋转线是从OA起旋转到OB立即停止，还是旋转了一周、二周或多周达到OB的呢？因此，同样的$\angle AOB$，表示的角不同而且表示无限多的角。例如用θ表示反时针方向不够一周达到OB所成的角，用ϕ表示与θ同向旋转仅一周又达到OB所成的角，则$\phi=360°+\theta$；用ψ表示旋转线顺时针方向旋转不到一周而达到OB所成的角，则ψ是一个负角，它等于$-360°+\theta$，如此等等。图中若不加箭头，$\angle AOB$表示无限个正角和负角。其中的任一个角可表示成：



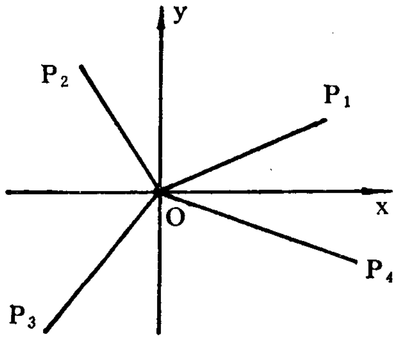
(图1—3)

$n360°+\theta$（n是整数）。

n表示旋转线所转的周数，n的+、－号表示反时针方向和顺时针方向。

在表达式$n360°+\theta$中，任意给n一个值，就得一个确定的角。因此在图1—3中，OA、OB表示的所有角构成一个集，记做$\{\alpha \mid \alpha=n\times 360°+\theta$，$n$为整数$\}$。

我们常常在直角坐标系中用x轴的正向ox当做任意角的始边，无论旋转线怎样旋转，也无论转了多少周，只要终线位置处于某一象限中，它们构成的角集中任一个就叫做某一象限的角。例如在图1—4中，ox与op_1构成的角集，无论其中哪一个都叫做第一象限的角，OX与OP_3所构成的角集其中无论哪一个都叫做第三象限的角。



（图1—4）

2.弧度制与60分法

在几何中把圆分为360等份，其中一份所对的圆心角叫做一度；度再分为60等份，每份叫做一分；分再分为60等份，每份叫做一秒。度、分、秒分别记做“°”、“′”、“″”。这种度量角度的方法叫做60分法，也叫做角度制。

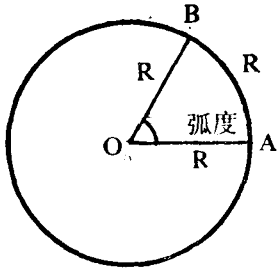
还有另一种度量角的方法，是以等于半径长的一段圆弧所对的圆心角作为度量角的单位（把它叫做一弧度）来度量角的。以弧度为单位度量角的方法叫做弧度制。

如图1—5所示，$\angle AOB$是一弧度。由于圆周长$=2\pi R$，所以整个圆心角等于2π弧度。有时将弧度二字略去，写成$360°=2\pi$，它的意义是360度等于2π个弧度。这就是30°、45°、60°写成$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$的意义和原因。

从基本关系　$360° = 2\pi$ 弧度出发，得：

π个弧度$=180°$，1 弧度$=\frac{180°}{\pi}\approx 57.2957°$，$1°=\frac{\pi}{180}$弧度，近似于0.1745弧度。

所以两种制度互化的规律如下：



（图1—5）

要把弧度化成角度用$\frac{\pi}{180}\approx 0.1745$除弧度数；

要把角度化成弧度用$\frac{\pi}{180}\approx 0.1745$乘角度数。

由弧度的定义易知：

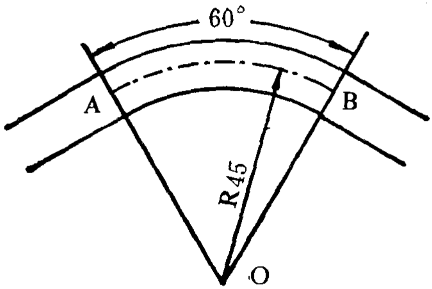
圆心角α的弧度数$=\frac{\alpha\text{所对的弧长}l}{\text{半径长}R}$，简记为$\alpha=\frac{l}{R}$。其中$\alpha$是圆心角的弧度，$l$是弧长，$R$是半径。所以根据上式，在一圆内圆心角（注意用弧度制）所对弧长及半径三者中任知其2，都能算出第三者。

例　如图1—6所示，求公路弯道部分的长度，即AB的长l。（单位：米）

解：$\because \alpha=\frac{l}{R}$，$\alpha$为弧度数，

$$\therefore\ l=\alpha\cdot R=\frac{\pi}{3}\times 45\approx 3.14\times 15=47.1。$$

通过弧度制的度量，$1°=\frac{\pi}{180}$弧度，即　$1°=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745$。由于$\pi$既表示角的弧度，又是一个实数，所以每



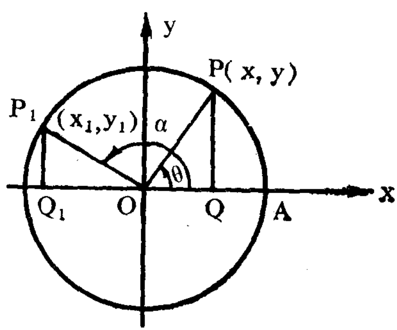
（图1—6）

一个角都对应着一个实数，反之，每一个实数都对应着一个角。这样创造了角度和实数相互转化的条件，以后可逐步看到这一转化的优越性。

二、任意角的三角函数

1．任意角三角函数的定义

任意角是锐角的推广，锐角是任意角的特殊情况（即大于0°小于90°的第一象限的角）。如图1—7所示，$\angle AOP$是一个锐角，用θ表示。我们知道$\sin\theta=\frac{对边}{斜边}=\frac{QP}{OP}$，$\cos\theta=\frac{邻边}{斜边}=\frac{OQ}{OP}$……；又$OQ$、



（图1—7）

QP分别是P点的横坐标x和纵坐标y，$OP=r$，所以$\sin\theta$是$\frac{y}{r}$，$\cos\theta$是$\frac{x}{r}$，……

当一个角的终边在第二、三、四各象限时，$\angle AOP$是任意角，并没有以它为内角的直角三角形如图1—7中的OP_1，无所谓它的对边、邻边、斜边等，但P_1仍有坐标(x_1,y_1)，这是$\angle AOP_1$与θ的相同之处。因此有

定义：设α是一个任意角，它的始边是x轴的正向，$P(x,y)$是它的终边上的一点，r是OP的长度，则

$$\sin\alpha=\frac{\text{纵坐标}}{OP\text{的长}}=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{\text{横坐标}}{OP\text{的长}}=\frac{x}{r},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\text{纵坐标}}{\text{横坐标}}=\frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\text{横坐标}}{\text{纵坐标}}=\frac{x}{y},$$

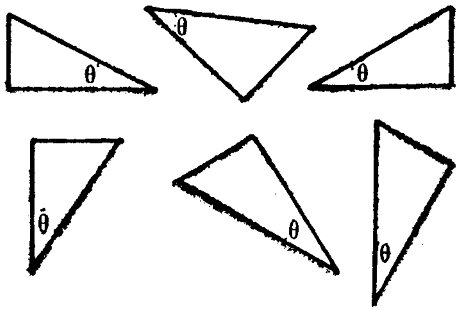
$$\sec\alpha=\frac{OP\text{的长}}{\text{横坐标}}=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{OP\text{的长}}{\text{纵坐标}}=\frac{r}{y}。$$

$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$和$\csc\alpha$分别叫做α的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割。

把锐角三角函数的概念，推广到任意角三角函数的概念，在$Rt\triangle ABC$中，用斜边、对边、邻边两两的比定义锐角三角函数，发展到用距离OP、纵坐标QP、横坐标OQ定义任意角三角函数。终边OP的位置和它的长度一定，P的坐标相应的也定。易见OP长度有变化，它的纵坐标、横坐标也相应的成比例地变化；终边OP的位置变了其长不变，QP、OQ也起变化，并且它的正负性质也有变化。可见锐角三角函数的定义，统一于任意角三角函数的定义；三角函数只与角的大小有关与边长无关的这一性质，推广后仍然成立。但是，由于三角形的边长都是正的，而P点的坐标则有正有负，所以

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

任意角的三角函数有正有负，而锐角三角函数都是正的。这是三角函数概念发展后，性质方面起的主要变化。必须注意无论直角三角形的位置怎样，如以下各种情况：



（图1—8）

θ的三角函数都是正的。以后就会看到这一特点的重要性。

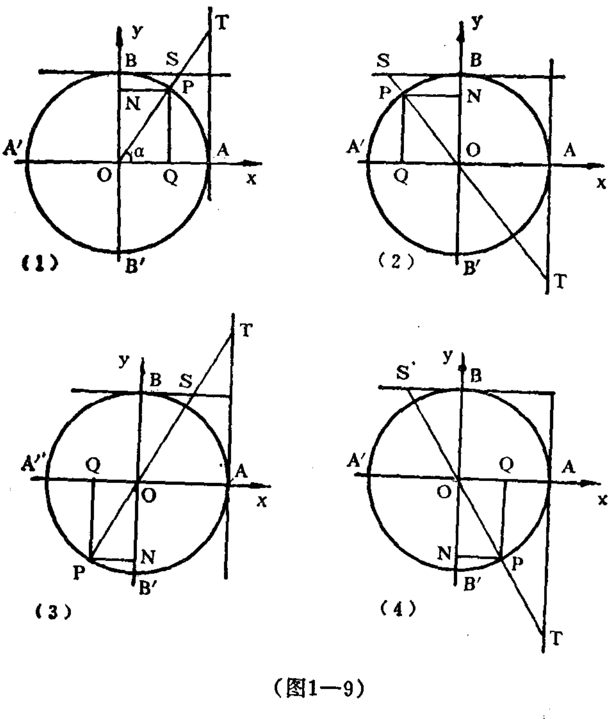
锐角三角函数，只要两角的同一函数值相等，则两角相等，其余的三角函数也相等。推广后任意角的三角函数就不是这样，始边和终边的位置相同，它们的角可以有这样那样的不同，但是它们的三角函数又都相同。这就是说，相同的三角函数它们的角可能不同，这是又一特点。

例如 $\sin\theta=\sin(2k\pi+\theta)$，$\cos\theta=\cos(2k\pi+\theta)$ ……

根据任意角三角函数的定义，根据OP永远为正和各象限点的坐标的正、负规律易知：第一象限的角，它的三角函数全是正的；第二象限的角，正弦、余割为正，其它都是负的；第三象限的角，正切和余切为正，其它是负的；第四象限的角，余弦、正割为正，其它是负的。

2.三角函数的线段表示法

三角函数与距离op的大小无关，为了方便，我们把op特殊化，令其为单位长1。仍使始边$OA(=1)$落于ox的正向上，终边op的端点在以1为半径的圆上，这样的图叫做单位圆。



(图1—9)

如图1—9所示，$\angle AOP$是任意角，在(1)、(2)、(3)、(4)图中分别表示第一、第二、第三、第四象限的角。过x轴、y轴与圆的交点A、B各作切线。

显然，无论在哪一象限内，由于op是1，所以有：$\sin\alpha=Qp=y$，$\cos\alpha=OQ=x$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$，……

为了简便将$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$等的分母也转化为1，因为无论哪一象限内，都有$\triangle POQ\backsim\triangle TOA$，所以$\frac{y}{x}=\frac{AT}{OA}=AT$，$\frac{OP}{x}=\frac{OT}{OA}=OT$；$\triangle OPQ\backsim\triangle SOB$，所以$\frac{x}{y}=\frac{BS}{OB}=BS$，$\frac{OP}{y}=\frac{OS}{OB}=OS$。

由此有如下定义

定义：由角α的终边与单位圆的交点P向x轴作垂线，Q表示垂足，则$QP=\sin\alpha$，QP叫做α的正弦线；$OQ=\cos\alpha$，OQ叫做α的余弦线。

OP延长（或反向延长）后交过A点的切线于T，交过B的切线于S，则

$AT=\operatorname{tg}\alpha$，$AT$叫做$\alpha$的正切线；

$BS=\operatorname{ctg}\alpha$，$BS$叫做$\alpha$的余切线；

$OT=\sec\alpha$，OT叫做α的正割线；

$OS=\operatorname{cec}\alpha$，$OS$叫做$\alpha$的余割线。

在历史上还有两条线段也表示α的三角函数：

$QA=1-\cos\alpha$ 叫做α的正矢线；

$NB=1-\sin\alpha$ 叫做α的余矢线。

正矢、余矢的意义和作用在平面几何中弓形里讨论它，三角函数中就不提它们了。八条线段表示了八种三角函数，所以三角学在历史上也叫八线学。正弦、余弦等名称也是由线段表示法得来的。例如QP是α对的弦，$OQ=NP$是α的余

角所对的弦，所以分别叫它正弦和余弦。其余以此类推。

必须注意：正弦QP和正切AT从x轴向上的方向为正，从x轴向下的方向为负；余弦OQ和余切BS从y轴向右的方向为正，从y轴向左的方向为负；正割OT和余割OS，从O到T、S的方向与从O到P的方向相同的为正，相反的为负。

从锐角三角函数概念扩展到任意角三角函数概念，又从取距离OP的特殊值1把概念扩展到用有向线段来表示，从概念本身讲前后是统一的，无矛盾的，但是也产生了一系列的问题：锐角三角函数中的一些公式，现在是否还成立？过去的三角函数表只限于90°和锐角，现在怎样求任意角三角函数的值？若已知任意角三角函数值能查表求出该角的值，结果是一解还是多解？任意角的变化范围是（$-\infty$　∞），任意角三角函数的值域是什么？三角函数有什么性质，它的图象是什么？下边我们将逐步讨论这些问题。

3.同角各三角函数间的关系

从任意角三角函数的定义看：显然有$\sin\alpha$和$\csc\alpha$，$\cos\alpha$和$\sec\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$和$\mathrm{ctg}\alpha$都互为倒数。即，

$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha};$$

也可以表示为：

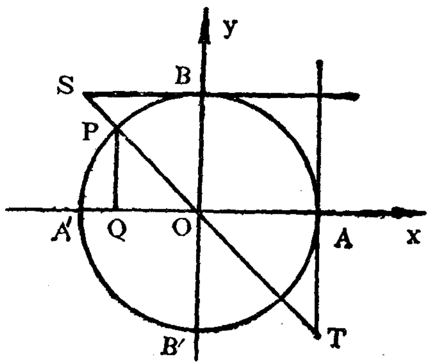
$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\ \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1。$$

这种关系，叫做倒数关系。

又有　$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，　$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$　。

这种关系，叫做商数关系。

从三角函数的线段表示法看：如图 1—10所示，每一任意角α，无论α是第几象限的角，终线OP，正弦QP，余弦OQ构成$Rt\triangle OQP$，其中$OP(=1)$是斜边；始边OA，正切AT，正割OT构成$Rt\triangle OAT$，其中$OA=1$，OT是斜边；半径$OB(=1)$，余切BS，余割OS构成$Rt\triangle OBS$。因此根据勾股定理有关系：



（图1—10）

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha,1+ctg^2\alpha=\csc^2\alpha。$$

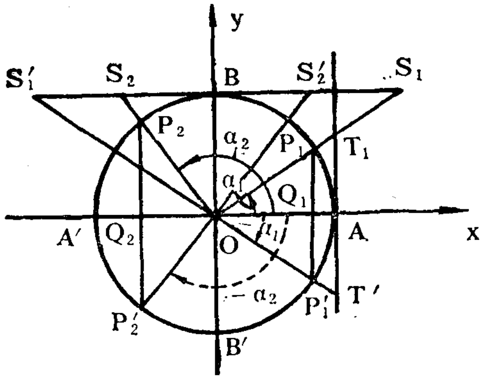
这种关系叫做平方关系。

以上三种关系，是最基本而又重要的关系，无论在理论和实际方面都有广泛的应用。由于这种内在联系，任一三角函数都可以用其它五种三角函数之一来表示，也可用它表示其它任一函数。

4.化任意角的三角函数为锐角三角函数

（1）负角的三角函数转化为正角的三角函数

正角是旋转线从OA起反时针方向旋转得到的，负角是旋转线从OA起顺时针方向旋转得到的。如果两角的绝对值



(图1—11)

相等，正负号相反，那么它们的终边就对称于x轴。如图1—11所示，$\angle AOP_1$和$\angle AOP_1'$，$\angle AOP_2$和$\angle AOP'_2$，它们的终边分别关于x轴对称。如果$\angle AOP_3$是第三象限的角，那么$-\angle AOP_3$的终边就在第二象限。从三角函数线段表示法看，显然有$\cos(-\alpha_1)=\cos\alpha_1$、$\cos(-\alpha_2)=\cos\alpha_2$、$\sin\alpha_1=-\sin\alpha_1$、$\mathrm{tg}\alpha_1=-\mathrm{tg}\alpha_1$。

又因延长P'_1O交过B切线于S'_1，从平面几何推知，锐角$S'_1OB=$锐角S_1OB，所以OS_1和OS'_1对称于y轴。从三角函数线段表示法知，$OT_1=OT'_1$，$BS_1=-BS'_1$，$OS_1=-OS'_1$（$\because OS_1$与OP_1同向，OS'_1与OP_1反向，$\therefore OS_1$为正，OS'_1为负）。所以$\sec\alpha=\sec(-\alpha)$，$\csc\alpha=-\csc(-\alpha)$，$\mathrm{ctg}\alpha=-\mathrm{ctg}(-\alpha)$。

总结一般规律如下：$(-\alpha)$的三角函数其绝对值等于α的同名三角函数；正、负符号除$\cos(-\alpha)$、$\sec(-\alpha)$分别与$\cos\alpha$、$\sec\alpha$同号外，其它四种都改变符号。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com