大学数学系列教材

微积分

下册

宋开泰　黄象鼎　朱方生　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

:2

大学数学系列教材

微积分

下册

宋开泰　黄象鼎　朱方生　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分．下册/宋开泰，黄象鼎，朱方生编著．—武汉：武汉大学出版社，2005.10

大学数学系列教材

ISBN 7-307-04637-7

Ⅰ．微…　Ⅱ．①宋…　②黄…　③朱…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 073092 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北省荆州市今印印务有限公司

开本：880×1230　1/32　　印张：17.5　字数：466 千字

版次：2005 年 10 月第 1 版　　2005 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04637-7/O・329　　定价：24.00 元

前　言

教学内容的改革是教学改革的重点与难点，任务十分艰巨，在原国家教委的支持与关心下，我们曾参加“面向21世纪理科非数学专业高等数学教学内容与课程体系的改革研究”项目组的工作，并编写了《高等数学教程》(上、下册)，于1998年出版，于2001年修订。此书获读者好评。

为进一步适应高等教育的发展形势与要求，让读者面更宽广一些，我们在原书的基础上对内容作了较大的修改，更名为微积分(上、下)，可作为大学公共基础课教材。

本书适用于理、工科院校的计算机科学、信息科学、物理类各专业以及工科相应专业的教学用书，也可供工程技术专业及需要较厚实的数学基础的经济类的读者参阅。

本书内容包括一元微积分、解析几何、无穷级数（含傅立叶级数)、多元微积分以及常微分方程，虽然都是传统的内容，但在内容的处理上有以下四方面的特点：

1. 重视“三基”（基本概念、基本理论、基本方法)，内容丰富，讲解清楚。

2. 重视应用，特别注重与科学计算的联系。本课程的性质本来就与物理、几何存在广泛而深刻的联系，重要概念的引入均与物理现象、几何问题有关。为培养实际应用能力，我们还介绍了非线性方程的牛顿法、数据拟合的最小二乘法、数值积分法以及应用微分方程解决实际问题的典型例子等。

3. 便于自学。本书例子多，注解多。例题一方面注重知识点

的掌握与联系，另一方面注重解题方法的示范作用。注解主要是对一些重要概念、定理及典型例题与较难的习题解答做出的，以期读者更准确地掌握概念，更深刻地理解定理以及更灵活地掌握解题方法。

4. 便于考研。为方便准备考研的读者，除每节安排了丰富的习题外，还在每章之后安排了一定数量的总练习题。习题及总练习题所测试的知识点全面。对一些较难的习题及每章的总练习题在书后附有较详细的解答，以供复习参考。

对于学习本书的读者，我们提出如下建议，仅供参考。我们认为要学好高等数学，以下几个环节是不可少的：一是预习。这是一个自学过程，可以发现一些难点、重点，可以对所学内容有一个大致的了解。可以提高自学能力，还可以提高听课质量。从我们的教学经验中发现，预习与不预习效果是大不一样的。二是勤练，即多做题。不多做题是学不好数学的。所谓“学数学”就是“做数学”。经常有同学反映，听课似乎懂了，看书似乎明白了，可就是不会做题。其中原因不外乎两个方面：一方面是对当前所学的新内容并没有深刻理解，另一方面是数学知识及解题方法（经验）积累不够（因为题中可能涉及以往的数学知识与处理该类问题的方法）。因此多做题多积累是非常重要的。本书习题丰富，有的习题有一定难度，读者在做习题时，最好不要先看书后的解答，先应独立思考。试做后再看参考答案，效果要好得多。三是复习小结。在预习、听课、练习后还需进行复习小结，这一过程是通过归纳、类比、整理所学知识，以达到融会贯通的目的。对重要定理要掌握证明方法的关键步骤，对解题要作归纳、比较、分析。这是一个再思考、再学习的过程，坚持下去，对提高数学水平（包括解题能力）大有裨益。

学习数学是一件辛苦的事情，但具有良好的数学素质对青年朋友们今后的深造、就业乃至跨行业竞争，无疑是有重要帮助的。总之一句话，学好数学将使自己终生受益。

本书内容涉及面较广，教学过程中，可根据各专业的具体情况，灵活掌握，有些打*号的内容，可暂时不讲。

本书修改过程中，得到武汉大学出版社的大力支持与帮助，在此谨表示衷心的感谢。限于编者水平，错漏之处，诚望读者指出。

编　者

于武昌珞珈山

2005年8月

目　　录

第 9 章　空间解析几何与向量代数 …… 1
9.1　空间直角坐标系 …… 1
9.1.1　空间直角坐标系 …… 1
9.1.2　空间点的直角坐标 …… 2
9.1.3　两点间的距离 …… 3
习题 9.1 …… 4
9.2　向量代数 …… 4
9.2.1　向量概念 …… 4
9.2.2　向量的加减法 …… 5
9.2.3　向量与数的乘法 …… 7
习题 9.2 …… 8
9.3　向量的坐标 …… 8
9.3.1　向量在轴上的投影 …… 9
9.3.2　分向量与向量的坐标 …… 10
9.3.3　向量的模与方向余弦 …… 12
习题 9.3 …… 14
9.4　向量的数量积、向量积、混合积 …… 14
9.4.1　两向量的数量积 …… 14
9.4.2　两向量的外积 …… 17
9.4.3　向量的混合积 …… 21
习题 9.4 …… 23
9.5　空间的直线与平面 …… 24
9.5.1　平面的方程 …… 25

9.5.2 两平面的相互关系 …… 29
9.5.3 点到平面的距离 …… 30
9.5.4 空间的直线方程 …… 31
9.5.5 平面与直线间的关系、平面束 …… 37
习题 9.5 …… 39
9.6 几种常见的二次曲面 …… 41
9.6.1 柱面、投影柱面 …… 41
9.6.2 球面 …… 44
9.6.3 锥面 …… 45
9.6.4 旋转曲面 …… 47
9.6.5 椭球面 …… 49
9.6.6 双曲面 …… 51
9.6.7 抛物面 …… 53
习题 9.6 …… 55
9.7 坐标轴的变换 …… 56
9.7.1 坐标轴的平移 …… 57
9.7.2 坐标轴的旋转 …… 58
习题 9.7 …… 60
9.8 曲面方程与曲线方程 …… 60
9.8.1 曲面的一般方程与参数方程 …… 60
9.8.2 曲线的一般方程与参数方程 …… 62
9.8.3 曲线在坐标面上的投影 …… 64
9.8.4 曲线的一般方程与参数方程的互化 …… 65
习题 9.8 …… 66
第 9 章总练习题 …… 67

第 10 章 多元函数微分学 …… 70
10.1 多元函数 …… 70
10.1.1 平面点集 …… 70
10.1.2 $\mathbf{R}^2$ 的几个基本定理 …… 76

10.1.3 多元函数的基本概念 …………………………… 77
习题 10.1 ……………………………………………… 80
10.2 多元函数的极限与连续性……………………… 82
10.2.1 多元函数的极限 ……………………………… 82
10.2.2 多元函数的连续性 …………………………… 88
10.2.3 有界闭区域上连续函数的性质 ……………… 91
习题 10.2 ……………………………………………… 92
10.3 偏导数与全微分……………………………………… 93
10.3.1 偏导数及高阶偏导数的概念和计算 ………… 94
10.3.2 全微分 ………………………………………… 101
10.3.3 方向导数 ……………………………………… 111
习题 10.3 ……………………………………………… 116
10.4 复合函数微分法 …………………………………… 117
10.4.1 链锁法则 ……………………………………… 117
10.4.2 一阶全微分形式的不变性 …………………… 125
习题 10.4 ……………………………………………… 127
10.5 隐函数存在定理与隐函数微分法 ……………… 128
10.5.1 一个方程、一个自变量情形 ………………… 128
10.5.2 一个方程,$n(n\geqslant 2)$个自变量的情形 …………… 132
10.5.3 方程组的情形 ………………………………… 134
*10.5.4 变量代换……………………………………… 141
习题 10.5 ……………………………………………… 143
10.6 多元函数微分学在几何中的应用 ……………… 145
10.6.1 空间曲线的切线与法平面 …………………… 145
10.6.2 曲面的切平面与法线 ………………………… 150
习题 10.6 ……………………………………………… 155
10.7 多元函数极值 ……………………………………… 156
10.7.1 二元函数泰勒公式 …………………………… 156
10.7.2 多元函数极值的必要条件与充分条件 ……… 161
*10.7.3 最小二乘法 ………………………………… 167

10.7.4 条件极值、拉格朗日乘数法 …… 171
习题 10.7 …… 175
第 10 章总练习题 …… 176

第 11 章 重积分 …… 179
11.1 二重积分 …… 179
11.1.1 二重积分的概念与性质 …… 179
11.1.2 二重积分的计算 …… 183
习题 11.1 …… 201
11.2 三重积分 …… 204
11.2.1 三重积分的概念 …… 204
11.2.2 三重积分的计算 …… 206
习题 11.2 …… 219
11.3 重积分的应用 …… 221
11.3.1 几何上的应用 …… 221
11.3.2 物理中的应用 …… 225
习题 11.3 …… 232
第 11 章总练习题 …… 233

第 12 章 曲线积分与曲面积分 …… 236
12.1 曲线积分 …… 236
12.1.1 第一型曲线积分的概念、性质及计算 …… 236
12.1.2 第二型曲线积分的概念、性质及计算 …… 243
12.1.3 两类曲线积分之间的联系 …… 250
习题 12.1 …… 253
12.2 格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件 …… 255
12.2.1 格林公式 …… 255
12.2.2 平面曲线积分与路径无关的条件 …… 262
习题 12.2 …… 267

12.3 曲面积分 …………………………………………………………… 268
12.3.1 第一型曲面积分的概念、性质及计算 ………………… 268
12.3.2 第二型曲面积分的概念、性质及计算 ………………… 272
习题 12.3 …………………………………………………………… 281
12.4 高斯公式、斯托克斯公式………………………………………… 282
12.4.1 高斯公式 ………………………………………………… 282
12.4.2 斯托克斯公式 …………………………………………… 288
*12.4.3 空间曲线积分与路径无关的条件 ……………………… 292
习题 12.4 …………………………………………………………… 294
*12.5 场论简介 ………………………………………………………… 295
12.5.1 数量场的等值面与梯度 ………………………………… 296
12.5.2 算符∇的介绍 …………………………………………… 298
12.5.3 向量场的向量线 ………………………………………… 299
12.5.4 向量场的通量与散度 …………………………………… 300
12.5.5 向量场的环量与旋度 …………………………………… 305
12.5.6 保守场等几个重要的向量场 …………………………… 311
习题 12.5 …………………………………………………………… 314
第 12 章总练习题………………………………………………………… 315

*第 13 章 含参变量的积分 ……………………………………………… 318
13.1 含参变量的常义积分 …………………………………………… 318
13.1.1 积分限固定的情形………………………………………… 318
13.1.2 积分限变动的情形………………………………………… 324
习题 13.1 …………………………………………………………… 325
13.2 含参变量的广义积分 …………………………………………… 326
13.2.1 一致收敛的概念…………………………………………… 326
13.2.2 一致收敛的判别法………………………………………… 328
13.2.3 一致收敛的含参变量的广义积分的性质 ……………… 331
13.2.4 Γ 函数与 B 函数(欧拉积分) …………………………… 336
13.2.5 几个重要的例子…………………………………………… 342

习题 13.2 …… 344
第 13 章总练习题 …… 346

第 14 章 一阶常微分方程 …… 349
14.1 微分方程的基本概念 …… 349
14.1.1 微分方程 …… 349
14.1.2 微分方程的解 …… 351
习题 14.1 …… 353
14.2 一阶微分方程 …… 354
14.2.1 可分离变量的一阶微分方程 …… 354
14.2.2 可化为变量分离方程的一阶微分方程 …… 356
习题 14.2 …… 360
14.3 一阶线性微分方程 …… 361
14.3.1 一阶线性微分方程的概念 …… 361
14.3.2 贝努利(Bernoulli)方程 …… 364
习题 14.3 …… 365
14.4 全微分方程 …… 365
14.4.1 全微分方程的概念 …… 365
14.4.2 积分因子法 …… 368
习题 14.4 …… 371
14.5 一阶微分方程解的存在惟一性定理 …… 371
14.5.1 存在惟一性定理 …… 372
14.5.2 逐次逼近法与误差估计 …… 378
习题 14.5 …… 379
14.6 一阶隐微分方程 …… 380
14.6.1 可就 y 或 x 解出的方程 …… 380
14.6.2 不显含 y 或 x 的方程 …… 383
习题 14.6 …… 385
14.7 一阶微分方程应用举例 …… 385
习题 14.7 …… 388

第 15 章 高阶常微分方程 …………………………………… 389
15.1 几类特殊的高阶方程 ………………………………… 390
15.1.1 类型 $y^{(n)}=f(x)$ ………………………………… 390
15.1.2 类型 $F(x,y^{(n)})=0$ ……………………………… 391
15.1.3 类型 $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$ ………………………… 391
15.1.4 类型 $y''=f(x,y')$ ………………………………… 392
15.1.5 类型 $y''=f(y,y')$ ………………………………… 395
习题 15.1 ……………………………………………… 396
15.2 n 阶线性常微分方程 ………………………………… 397
15.2.1 基本概念 ……………………………………… 397
15.2.2 n 阶齐次线性方程解的结构 ………………… 399
15.2.3 n 阶非齐次线性方程的通解 ………………… 405
15.2.4 降阶法和常数变易法 ………………………… 406
习题 15.2 ……………………………………………… 409
15.3 高阶常系数线性微分方程 …………………………… 410
15.3.1 二阶常系数齐次线性方程 …………………… 411
15.3.2 二阶常系数非齐次线性方程 ………………… 414
15.3.3 n 阶常系数线性方程 ………………………… 419
*15.3.4 常系数非齐次线性微分方程的算子解法 ……… 424
15.3.5 欧拉方程 ……………………………………… 432
习题 15.3 ……………………………………………… 434
15.4 应用举例 ……………………………………………… 436
习题 15.4 ……………………………………………… 444
*15.5 微分方程的幂级数解法 ……………………………… 445
15.5.1 概述 …………………………………………… 445
15.5.2 常点的情形 …………………………………… 448
15.5.3 正则奇点的情形 ……………………………… 450
习题 15.5 ……………………………………………… 454

第 16 章　常微分方程组 …………………………………………… 455
16.1　标准方程组 ……………………………………………… 455
16.1.1　标准方程组的概念 …………………………………… 455
16.1.2　标准方程组的向量形式与存在惟一性定理 ……… 457
16.1.3　首次积分 …………………………………………… 459
习题 16.1 ………………………………………………… 465
16.2　线性微分方程组的一般理论 ……………………………… 465
16.2.1　齐次线性微分方程组解的结构 …………………… 467
16.2.2　基本解矩阵 ………………………………………… 470
16.2.3　非齐次线性方程组解的结构 ……………………… 472
习题 16.2 ………………………………………………… 475
16.3　常系数线性微分方程组 ………………………………… 475
16.3.1　常系数齐次线性方程组的求解 …………………… 476
16.3.2　常系数非齐次线性方程组的求解………………… 482
习题 16.3 ………………………………………………… 487
第 14,15,16 章总练习题………………………………………… 488

习题答案与提示……………………………………………………… 491

第 9 章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何是用代数的方法研究空间几何图形的学科，其基本思想是：首先建立坐标系，用有序实数组表示点的位置，然后用代数方程表示几何图形. 由于向量理论对于研究几何提供了一些十分有利的工具，在本章 9.1 节介绍空间直角坐标系以后，紧接着，我们介绍向量的概念、向量的坐标、向量代数运算及其基本性质，这些知识称为**向量代数**，本章 9.2～9.4 节予以介绍.

9.1　空间直角坐标系

9.1.1　空间直角坐标系

在空间中任选取一定点 O，过点 O 引三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz，并在各直线上取定正向，再取定长度单位，这样就确定了一个空间直角坐标系 $Oxyz$（图 9-1）.

点 O 称为**坐标原点**，Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴分别称为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**，统称为**坐标轴**. 通过每两个坐标轴的平面，分别称为 xy **平面**、yz **平面**和 zx **平面**. 三个坐标面把整个空间分成了 8 个部分，每一个部分称为一个**卦限**(图 9-2).

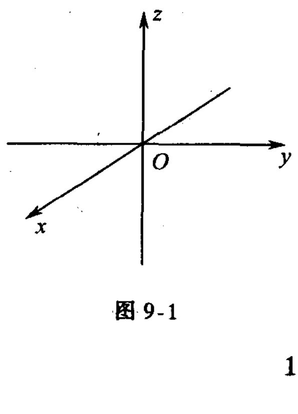

图 9-1

对于空间直角坐标系，我们作如下规定：如果把右手的拇指和食

指分别指着 x 轴和 y 轴的正向，中指指着 z 轴的正向，如图 9-3，这样的坐标系称为**右手系**.

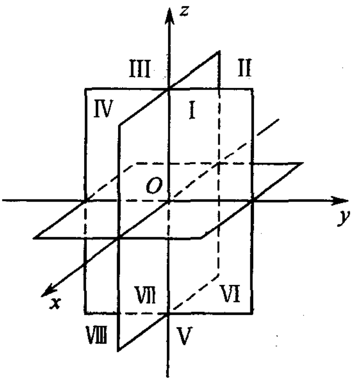

图 9-2

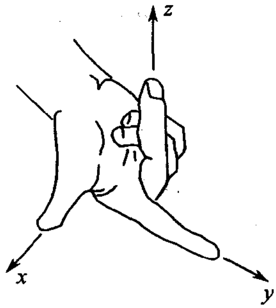

图 9-3

9.1.2 空间点的直角坐标

在空间建立了直角坐标系后，空间中的任一点就可以用它的三个坐标来表示. 设 M 为空间中一点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，分别交三个坐标轴于 P,Q,R 三点(图 9-4). 若这三点在 x,y,z 轴上的坐标分别为 x_0,y_0,z_0，则称有序数组(x_0,y_0,z_0)为点 M 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**. 反过来，任意给定一个由三个实数组成的数组(x_0,y_0,z_0)，都可以惟一确定空间中一点. 事实上，在 x,y,z 轴上分别取坐标为 x_0,y_0,z_0 的三个点 P,Q,R，然后过各点 P,Q,R 分别作垂直于x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三

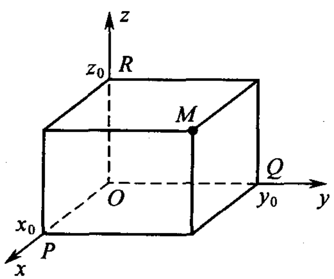

图 9-4

个平面的交点 M，就是以有序数组(x_0, y_0, z_0)为坐标的点.

因此，在空间中取定了直角坐标系后，空间中的点就与三个实数所组成的有序数组之间建立了一一对应关系. 特别地，在 xy 平面上，点的坐标形式是$(x, y, 0)$. 类似地，在 yz 平面上，点的坐标是$(0, y, z)$；在 zx 平面上，点的坐标是$(x, 0, z)$；在 x, y, z 轴上，点的坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；原点的坐标为$(0,0,0)$.

易知，在 8 个卦限中的点，其坐标的符号分别为

Ⅰ(+,+,+)，　Ⅱ(−,+,+)，　Ⅲ(−,−,+)，

Ⅳ(+,−,+)，　Ⅴ(+,+,−)，　Ⅵ(−,+,−)，

Ⅶ(−,−,−)，　Ⅷ(+,−,−).

例如，点$(-3,2,5)$在第Ⅱ卦限，点$(-2,-3,-1)$在第Ⅶ卦限.

9.1.3　两点间的距离

和平面解析几何一样，可以用坐标来计算空间中两点之间的距离.

若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间中两点，如图 9-5 所示，则 M_1 与 M_2 之间的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

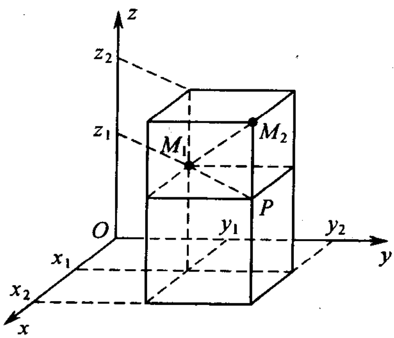

图 9-5