布列方程解应用题的钥匙

蒋中池

BU LIE FANG CHENG JIE YING YONG TI DE YAO SHI

中国少年儿童出版社

$$\begin{cases} x+y>7, \\ (10x+y)+27=10y+x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y>7, \\ (10x+y)+27=10y+x. \end{cases}$$

布列方程
解应用题的钥匙

蒋 中 池

中国少年儿童出版社

封面设计：李恒辰
责任编辑：陈效师

布列方程解应用题的钥匙

蒋中池

*

中国少年儿童出版社出版 发行
北京景山学校印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　6.75印张　122千字

1990年6月北京第1版　1990年6月北京第1次印刷

印数1—10,000册　定价2.15元

内 容 提 要

布列方程解应用题是初中代数的重点，又是难点，它有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

很多同学都怕学习这部分知识，主要原因是所有的应用题都要进行精细的分析和严密的思考，并要从纷纭复杂的条件中找出等量关系来。作者照顾到各种层次学生的要求，既对习题作了归类分析，又对解题能力和解题思维方法作了深入探讨。

本书知识要点突出，例题灵活，知识面广，习题典型，分析透彻。只要潜心钻研，持之以恒，就没有克服不了的困难。

前　　言

代数是数学的一个重要组成部分，它有比算术更多的计算方法．在小学算术里，我们学过了许多应用题，如果运用代数里布列方程的方法来求解，一般都比较简便．所以，布列方程解应用题是初中代数的一个重要部分，又是学习代数的主要任务之一．

部分初中学生对布列方程解应用题这部分内容，感到困难．上课时，听老师讲，似乎全然明白，但是拿来一道题，却又不知如何下手．更有甚者，一遇问题，诚惶诚恐，或者理解题意偏面；或者理解题意完全错误，导致答案不正确．为了帮助大家克服布列方程解应用题的种种困难，作者着手编写了这本小册子，其要点如下：

1．这本书的书名既然叫“钥匙”，那么，本书的宗旨必然以指导解题思想、思路、思维方法、解题方法为主．整个内容的取材，注意到学生可接受的水平，尽量使行文有趣味，联系实际．

2．本书的内容安排由点到面，由浅渐深，逐步展开．特别对解题步骤，本书详加剖析，选例尽量典型．在范例剖析中，就怎样分析条件，如何组织方程，尽可能地指出每类问题的解题思考特征，并就各种问题尽量指出一些注意要点，以使

读者戒备。

3．本书以"培养能力"作为出发点，即使在应变、综合、多解及适当引深部分，作者也本着前面铺基础，后面砌高楼的内容结构来满足不同层次读者的要求和欲望。

4．本书知识要点突出，例题灵活，知识面广，练习典型。读者可以一边阅读，一边做题，凡是较难的习题，本书都给了提示，后面还附有答案。

布列方程解应用题的方法是多种多样的，读者在掌握了解题方法以后，每解一题最好别出心裁，或一题多解，或举一反三，这样，能力便能培养，创造发明的嫩芽也就会开始萌育了。

在写作中，得到了沈超等教授的指导和帮助，同时陈效师同志在我写作的前前后后给了极大的关注，在此谨表谢意。但由于本人水平有限，真知不足，书中缺点或错误一定难免，敬请读者批评指正。

目　　录

一　怎样布列方程(组)解应用题

在这本书里，我们要着重研究布列方程（组）解应用题的知识，将要交给你一串钥匙，去打开布列方程解应用题的各个知识宝库。

1．为什么要学习布列方程(组)解应用题

在小学算术里，我们学过了各类应用题的解法，进入中学，在掌握了方程的解法以后，接着就利用它来解应用题．前者叫做应用题的算术解法，后者叫做应用题的布列方程解法．

应用题的这两种解法之间究竟有什么联系？解题思想方法上究竟又有什么区别呢？学过算术解法后，又为什么要学习布列方程解法？

让我们还是先用实例作一下对比吧！

例1．甲乙两车接受同数量的运输任务后，同时开始运载，当甲车完成全部运输任务时，乙车还有24吨未运完，已知甲乙两车的载重量分别为5吨、3吨，问两车各接受运输任务多少吨？

〔算术解法〕

$$5\times[24\div(5-3)]=5\times12=60(\text{吨})。$$

〔布列方程解法〕

由于甲乙两车接受同数量的运输任务，所以设甲乙各车接受的运输任务为 x 吨，根据两车工作时间相同的关系可列方程如下：

$$\frac{x}{5}=\frac{x-24}{3}.$$

解方程，得　$x=60$。

所以，两车各接受运输任务 60 吨。

例 2．甲乙两车接受运输任务各为 60 吨，同时开始运载，已知甲乙两车的载重量分别为 5 吨、3 吨，问当甲车完成全部运输任务时，乙车还有多少吨没有运完？

〔算术解法〕

$$60-3\times(60\div5)=24(\text{吨})。$$

〔布列方程解法〕

设甲车完成全部运输任务时乙尚有 x 吨未运完，根据两车工作时间相同的关系得方程：

$$\frac{60-x}{3}=\frac{60}{5}.$$

解之，得　$x=24$。

所以，甲车完成全部运输任务时，乙车尚有 24 吨未运完。

例 3．甲乙两车各接受运输任务为 60 吨，同时开始运

载，当甲车完成全部运输任务时，乙车尚有24吨未运完，又知甲车的载重量为5吨，问乙车的载重量为几吨？

〔算术解法〕

$$(60-24)\div(60\div5)=3\text{（吨）}.$$

〔布列方程解法〕

设乙车的载重量为x吨，据据两车工作时间的相同得方程：

$$\frac{60-24}{x}=\frac{60}{5}.$$

解之，得　$x=3$。经检验知$x=3$是原方程的根，也适合本应用题的实际情况。

所以，乙车的载重量为3吨。

例4．甲乙两车各接受运输任务为60吨后，同时开始运载，当甲车完成全部运输任务时，乙车尚有24吨未运完，又知乙车的载重量为3吨，问甲车的载重量为几吨？

〔算术解法〕

$$60\div[(60-24)\div3]=5\text{（吨）}.$$

〔布列方程解法〕

设甲车载重量为x吨，根据两车工作时间的相同得方程：

$$\frac{60}{x}=\frac{60-24}{3}.$$

解之，得　$x=5$。经检验知$x=5$是原方程的根，又适合本应用题的实际情况。

所以，甲车载重量为5吨。

对比以上四例的解法，可以得到两种解法之间有如下的逻辑关系：

布列方程解法是把未知数和已知数一律看做既定的数，不拘形式地使它们纳入了根据题意所列出的等式中；而算术解法，它必须集中全部已知数，想方设法组成一个和未知数相等的式子，由于受到这一限制，就使得一个应用题即使同时存在着这两种不同解法，往往它的算术解法远没有列方程解法来得容易。事实上，算术解法可以看做是列方程解法的一种特殊表现形式。如例1：

因为$\frac{x}{5}=\frac{x-24}{3}$，所以$5(x-24)=3x$，即$5x-5\times24=3x$，亦即$5x-3x=5\times24$，就是$(5-3)x=5\times24$，也就是 $x=5\times\frac{24}{5-3}$，即为$x=5\times[24\div(5-3)]$。所以，从列式这一点来说，布列方程解法要容易得多。

以上四例，实质是同一件事情中变换了已知量和未知量所得的四个不同问题。对于每一次条件的改变，算术解法都必须重新探索解题途径，才能列出算式来；而布列方程解法却只需借助一个式子，即把这件事情看做"甲乙两车各接受运输任务m吨后，同时开始运载，甲乙两车的载重量分别为a吨、b吨，当甲车完成全部运输任务时乙尚有n吨未运完"，列出等式$\frac{m}{a}=\frac{m-n}{b}$，借助了这个式子，就可布列出这件事情中的任何一个问题的方程来。因此，只需掌握其中一个问题的解

法，也就同时掌握了其他三个问题的解法，这是布列方程解法的又一个优越性。

另外，算术解法只能通过加减乘除四则运算来求解，受此限制就有很大的局限性，有些应用问题就很不容易找到算术解法，甚至有些应用题用算术解法就无法解。例如：某数与它的平方和是6，求某数。这样一个简单的问题用算术解法就难以解决，而改用布列方程解法却是轻而易举的事。

解：设某数为x，根据题意可得方程

$$x^2+x=6,$$

即 $$x^2+x-6=0,$$

解方程，得　$x_1=2$，　$x_2=-3$，

所以某数是2或-3。

由此可见，布列方程解法更有其优越性，一方面它比算术解法简便，另方面它还可以解决许多算术解法不易解出或者无法解出的实际问题。同时，列方程解应用题是数学联系实际的一个重要方面，它对于开发智能，养成良好的思维习惯，激励学习数学的热情，增强自信心，提高分析问题和解决问题的能力都有很大的意义。所以，在学好应用题的算术解法之后，再学习它的布列方程解法仍然是十分必要的。

根据应用题的具体情况和需要，有时也可选用两个或两个以上字母来分别表示应用题里不同的未知量，然后根据已知量与未知量间的关系，列出几个方程来联立，利用联立起来的方程组解应用题，这就叫做布列方程组解应用题。

有人要问，解应用题，既已有了算术解法，又有了弥补算

术解法不足的布列方程解法，已能解决很多应用题的求解，为什么还要学习布列方程组的解法呢？

我们从所接触到的应用题知道，在不少应用题里有多于一个的未知量；也有多于一个的所求量，并且所给出的条件又不易直接看出未知量彼此间的数量关系，这时用布列方程来解这类应用题，由于限定只能设立一个字母表示一个未知数，却要用设立的一个未知数的关系式表示出其他未知量来，就常感困难和麻烦。例如：甲有钱数的4倍与乙有钱数的3倍的和为75元；甲有钱数的5倍少4元比乙有钱数的6倍多2元，求甲乙两人的钱数。

上题若用布列方程解法求解，便只能设立一个未知数，不妨设甲有钱数为x元，然后根据题中的一个条件用x的代数式来表示出乙的钱数来。现在题中一共有两个条件，这两个条件都没有明白地告诉我们甲乙有钱数间的直接关系。如果用前一条件求乙的钱数，则为$\frac{75-4x}{3}$元；如果用后一条件求乙的钱数，便为$\frac{(5x-4)-2}{6}$元。而不论用哪一个条件由甲的钱数x求乙的钱数，都要迂回转圈，比较费事。

但上题若用布列方程组来解：

设甲有钱数x元，乙有钱数y元。由题中两个条件各列一个方程，得方程组

$$\begin{cases}4x+3y=75,\\5x-4=6y+2.\end{cases}$$

比较上面两法，显然列方程组比较简便。

甚至有些应用题，在使用布列方程解法解题的时候，不但列式复杂，而且解方程也麻烦。例如：一轮船在某河中顺流航行 100 里，逆流航行 64 里，共用 9 小时；另一次在同样时间内顺流和逆流都航行 80 里。求轮船在静水中的速度及水流的速度。

解：设轮船在顺流中的速度为 x 里/时，则顺流航行 100 里需 $\frac{100}{x}$ 小时；逆流航行 64 里需 $\left(9-\frac{100}{x}\right)$ 小时。轮船在逆流中的速度为 $\dfrac{64}{9-\dfrac{100}{x}}$（里/时），在静水中的速度为

$\dfrac{x+\dfrac{64}{9-\dfrac{100}{x}}}{2}$（里/时），水流速度为 $\dfrac{x-\dfrac{64}{9-\dfrac{100}{x}}}{2}$（里/时）。再根据题中后一条件，寻找等量关系，从而列出方程为

$$\frac{80}{x}+\frac{80}{\dfrac{64}{9-\dfrac{100}{x}}}=9.$$

可见，上题列式复杂，解方程也不容易。

但上题使用布列方程组的解法求解就容易得多。

解：设轮船在静水中的速度为 x 里/时，水流速度为 y 里/时。利用题中前后两条件列出两个方程联立成方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9, \\ \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9. \end{cases}$$

可以看出，上法列式容易，又解方程组的时候使用一下换元法（设$\dfrac{1}{x+y}=u$，$\dfrac{1}{x-y}=v$），也很容易地得出结果来。

更有一批应用题，根本就不能用所设的仅一个未知数的关系来表示出其他未知数的关系来，也就是不可能用布列方程解法来求解。例如：有一块长方形地面，若长增加 2 米，宽减少 1 米，则面积增加 2 平方米；若长减少 2 米，宽增加 2 米，则面积增加 4 平方米。求此地面面积。

这个问题实际上是求长方形的长和宽，但题中虽给出了两个条件，不论那一条件都无法由长求得宽，或由宽求得长。这样一个生活中到处可以碰到的浅显实例，用布列方程解法求解就根本不会解决，而使用列方程组的解法来求解，就马到成功。

解：设长方形地面的长为 x 米，宽为 y 米，根据题意可列方程组如下：

$$\begin{cases} (x+2)(y-1)=xy+2, \\ (x-2)(y+2)=xy+4. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} -x+2y=4, \\ 2x-2y=8. \end{cases}$$

解此方程组，得　$x=12, y=8, xy=96$。（答数从略）。

由此可见，布列方程解应用题是基础，在扎实学好布列方程解法的基础上，也完全有必要继续学习布列方程组解应用题的方法，这样，才能使我们具体解决应用问题的时候减少了许多困难和障碍。

2。布列方程解应用题的一般步骤

就初中代数应用题来说，应用布列方程的解法是解应用题的基础，无疑是要认真学好。那么怎样布列方程解应用题呢？

遇到一道应用题的时候，首先，要把用日常语言叙述的实际问题"翻译"为用数学语言出现的数学问题（设未知数、列出方程等）。其次，再通过数学运算进行求解，由数学问题的解决而导致实际问题的解决（由解方程到写出答数）。我们把这样的一个全过程，叫做布列方程解应用题。在这过程中，列出方程是关键性的一环。

如果懂得怎样把日常语言"翻译"成为数学语言，实际上就找到了列方程的窍门。所以，正确的语言"翻译"又是布列方程解应用题的关键。

从日常语言到数学语言的语言"翻译"，主要是通过字母的帮助，熟练地、简明地将一些量与量间的关系正确地表示出来。例如：某数与2之差的一半等于34，求某数。其语言"翻译"可按下表进行：