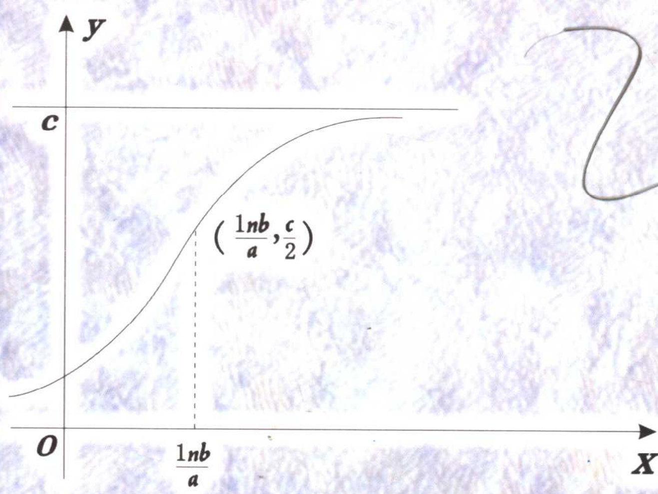
第四版

# 经济数学基础

# Fundamentals of Economical Mathemetics

任 平/主编




2

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

第四版

# 经济数学基础

任 平/主编

# Fundamentals of Economical Mathemetics

暨南大学出版社

中国·广州

**图书在版编目（CIP）数据**

经济数学基础/任平主编．—4版．—广州：暨南大学出版社，2006.1

ISBN 7-81029-562-4

Ⅰ．经…　Ⅱ．任…　Ⅲ．数学　Ⅳ．O123

出版发行：暨南大学出版社

**地址**：中国广州暨南大学

**电话**：总编室（8620）85221601　85226581

营销部（8620）85227972　85220602（邮购）

**传真**：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）

**邮编**：510630

**网址**：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

**排版**：暨南大学出版社照排中心

**印刷**：湖南省地质测绘印刷厂

**开本**：787mm×1092mm　1/16

**印张**：24.75

**字数**：572千

**版次**：1992年8月第1版　2006年1月第4版

**印次**：2006年1月第6次

**印数**：18001—21000册

**定价**：36.00

# 前　言

本书是在暨南大学经济学院使用过多年的内部讲义基础上根据相应的教学大纲修改而成，1992 年正式出版。

十余年来，本书得以再版、三版而四版，首先要感谢广大读者的厚爱。他们的关心和批评，始终是编者对本书进行多次修改、补充的动力。当然，还应感谢有关各方：暨南大学数学系和经济学院的同事，特别是陈广卿、刘少平、王健飞、符才冠等各位先生多年来的合作和帮助，对本书的完成至为重要；暨南大学出版社对本书的一贯支持，使编者受到极大鼓励；国务院侨办重点学科科研基金的长期资助对编者从事经济数学的学习和研究提供了重要保证，谨此一并致谢。

本书涵盖了教学大纲列为基本要求的全部内容。在保证学科的科学性和系统性的前提下，兼顾教学和应用上必要的灵活性和适用性。因此，本书对大纲规定的必须“理解”和“熟练掌握”的基本概念和方法，努力做到讲细讲清，尽可能把实际背景和思想路线阐述清楚，但不过分追求严谨的叙述和精密的推导，使学生能够正确理解所学基本概念和方法的实质，又不致陷入烦琐的讨论，引发初学者对高等数学的畏难乃至厌恶情绪。

在编写过程中，我们力图跳出大学非数学类专业高等数学就是工科数学的传统模式。财经类专业的学生应该以一种更广阔的视野来看待数学理论的掌握和运用，这不仅体现在教材内容的取舍上，还应反映在整个叙述方式特别是一些重要的概念和方法的介绍上。为此，我们特别注意与经济分析的有机结合，在教材中有针对性地介绍了一些经济概念和实例。选择的标准是：（一）与大纲规定的基本概念、基本理论和方法有密切联系；（二）简单、直观、学生易于接受而不需要预备知识；（三）有实际意义，或为后继课程所需要。例如，讨论极限时，介绍连续复利计算和人口增长模型；讨论导数时，注意从方方面面介绍它的各种变形，如边际、弹性、增长率；在一元和多元函数的微分学的应用部分，突出了极值问题，帮助学生建立优化的思想；在积分学部分，注意分析微分、积分之间的关系，并把它和经济分析中常用的一些概念联系起来；在微分方程和差分方程部分，注意介绍两者之间的联系和区别及其在经济分析中的应用特点；在线性代数部分，则有意淡化行列式的概念，突出了矩阵，特别是把简化了的一个投入产出模型作为综合实例，使学生直接感受到矩阵工具的重要性；对概率统计部分，我们实际上是把它作为数据处理方法来讨论的，并适当突出了决策分析的思想和应用。其中，关于贝叶斯公式的讨论就是一个例子。

近年来，基础课教学如何适应面向 21 世纪的教学改革问题，已经提到日程。本书此次修订，希望能对这一问题进行一些初步探索。

首先，要注意基础课教学内容和本学科现代研究成果的融合问题。基础课的教学内

容需要保持相对稳定。经济数学基础（或者一般的，大学本科各专业讲授的高等数学）的内容基本上是18和19世纪的成果。短期内，这一格局不可能也不必要有大的改变。但是，现代数学的理论和应用研究在20世纪取得迅速发展。许多思想、概念和方法是对传统数学的突破，数学基础理论的研究成果转化为应用的周期大大缩短。当然不能要求基础课程承担介绍这些成果的任务。但是，它应该反映这种发展趋势。例如，可以在线性方程组理论部分，适当介绍一些线性规划的基本概念，使学生在学习运筹学之前能尽早领略这一重要学科特有的优化思想，等等。

其次，要充分估计电子计算机的普及对基础课教学的影响。大量使用电子计算机，会提高还是降低学生的推理和计算能力，是教师普遍关心的问题。我们的做法是，对较简单的情况，如线性代数中 $n=2$、3 的情况，要求学生能进行严格、简洁的笔算。但对一般情况的处理，包括一些烦琐的数值计算，则鼓励他们使用计算机。基于同样的理由，在微积分中，适当淡化不定积分的计算，完全不讲定积分的近似计算，等等。

再次，传统的高等数学课程，重微积分而轻概率。讲概率也往往只介绍以排列组合为基础的古典概率。在随机性思维模式已经日益广泛地进入现代社会各个领域的今天，上述处理已不合时宜。因此，在概率部分，我们加强随机性思维的介绍，特别是适当地讨论主观概率的概念，引入风险分析的初步知识。

最后，本书是针对财经类专业需要而编写的。但是，由于计算机应用的普及，数学与人类各种实践活动更加贴近。文史、政法甚至艺术专业的学生了解一些高等数学基本思想的重要性、必要性日益凸现。本着这种理解，我们把整个教材分为核心部分、基本部分和全部，并在章节设计上做了相应的安排，使教学工作有了更大的灵活性。可供选择的建议如下：

| 类　型 | 教学时数 | 内　　容 |
|---|---|---|
| 核心 | 70～90 | 第1、2章，第3章的3.1、3.4、3.5，第4章（不含4.6），第5章（不含5.4、5.5），第6章（不含6.4），第7章（不含7.3），第10章（不含10.4） |
| 基本 | 140 | 第1、2、3、4章，第5章（不含5.4、5.5），第6章（不含6.4），第7章，第9章，第10章 |
| 全部 | 200～240 | 全书（包括选学，即※部分） |

根据广大读者的要求，新版增加了全书练习和习题的详解或提示，希望这一安排会有助于教师和学生更好地掌握本书的基本内容。

本书新版的修订工作，主要由暨南大学华文学院张卓副教授进行，最后由我定稿。因此，对书中出现的错误与不妥之处，由我负责。

任 平

2005年12月

# 目　录

# 1　函数和极限

## 1.1　集合与映射

**集合**　在高中代数中，我们已接触到现代数学这一最重要的基本概念——集合。直观地理解集合的概念并不困难。例如，我们学校的全体师生员工组成一个集合，某工厂拥有的全部机床组成一个集合，方程 $x^2-4x+3=0$ 的根也是一个集合。一般地说，把一些确定的对象看成一个整体就形成一个集合，通常用大写字母表示。集合里的各个对象称为集合的元素，通常用小写字母表示。

为方便今后的讨论，把有关的概念和符号简述如下：

不含任何元素的集合，称为空集，记作 $\varnothing$；

$a\in A$：表示 $a$ 是集合 $A$ 的元素；

$a\notin A$（或 $a \bar{\in} A$）：表示 $a$ 不是集合 $A$ 的元素。

对于两个集合 $A$、$B$，如果集合 $B$ 的任何一个元素都是集合 $A$ 的元素，则称 $B$ 为 $A$ 的子集，记作

$$B\subseteq A \text{ 或 } A\supseteq B$$

也称 $B$ 包含于 $A$，或 $A$ 包含 $B$。

若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作

$$A=B$$

由集合 $A$ 与集合 $B$ 的所有公共元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的交集，记作 $A\cap B$，简记为 $AB$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 同时 } x\in B\}$$

把集合 $A$ 与集合 $B$ 的所有元素合并在一起所组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

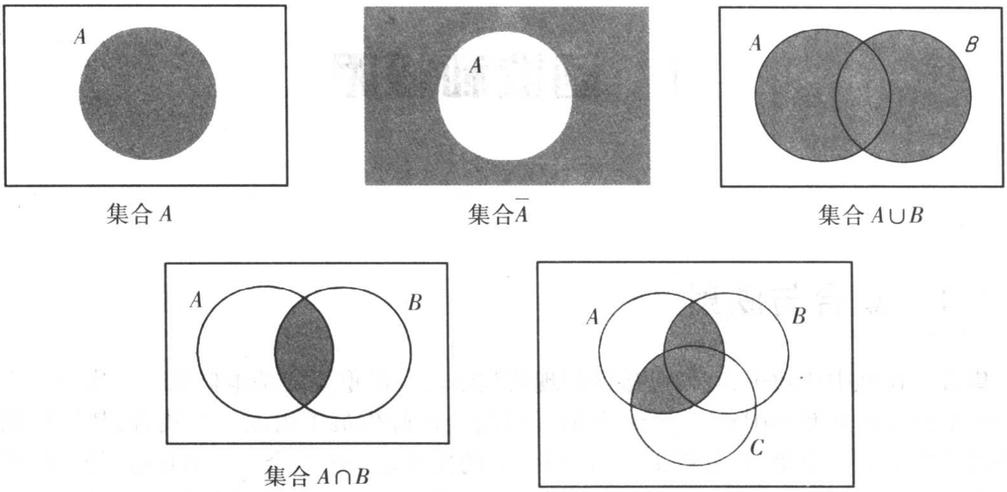
$A$ 的补集 $\overline{A}$ 定义为不属于 $A$ 的元素的全体构成的集合，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\notin A\}$$

当然，在谈到补集时，总是相对于一个全集而言。补集 $\overline{A}$ 有时也记为 $CA$。

**实数集**　最常见的集合是数的集合，简称数集，如自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集等。从实用的目的出发，在今后的讨论中，如不作特殊说明，我们指的数集就是实数集 $\mathbf{R}$。

实数集由有理数集和无理数集这两个子集组成。例如,$\frac{22}{7}$、3. 141 6 等是有理数，而圆周率 $\pi$、$\sqrt{2}$ 等就是无理数。




集合 $A$　　集合 $\overline{A}$　　集合 $A \cup B$

集合 $A \cap B$　　集合 $A \cap (B \cup C)$

**图 1. 1. 1　文氏图**

用数轴来表示实数集是很直观的。实数可以用数轴上的点来表示,数轴上的每一个点也都表示一个实数,因此,我们将根据不同情况,交替使用数轴上的点和实数这两个概念而不作区别。

设 $a < b$ 为两个实数,把满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数构成的集合记为$[a,b]$,称为闭区间。同样,我们把满足不等式 $a < x < b$ 的全体实数记为$(a,b)$,称为开区间;满足不等式 $a < x \leqslant b$ 的全体实数记为$(a,b]$,称为左开右闭区间;满足不等式 $x < b$ 的全体实数记为$(-\infty,b)$。类似地,不难理解 $[a,b)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,+\infty)$ 的意义。注意,这里“$-\infty$”和“$+\infty$”是两个记号而不表示实数,不参加数的运算。

在高等数学的讨论中,经常要用到绝对值的概念。实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 定义为:

若 $a$ 为正数,$|a|$ 等于它本身;

若 $a$ 为负数,$|a|$ 等于它的相反数,即 $-a$;

若 $a$ 为零,$|a|$ 等于零。列式表示则为

$$|a| = \begin{cases} a, & 若\ a \geqslant 0 \\ -a, & 若\ a < 0 \end{cases}$$

绝对值有如下重要性质:

(1)　$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(2)　$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a-r \leqslant x \leqslant a+r$,$r>0$ 为任意常数;

(3)　$|a+b| \leqslant |a| + |b|$。

符号“$\Leftrightarrow$”表示自左端可推出右端,自右端也可推出左端,即箭头两端的命题是互相等价的。

一般地，对 $P$、$Q$ 两个命题，若由 $P$ 成立可推出 $Q$ 成立，则称 $P$ 是 $Q$ 的充分条件，记为

$$P \Rightarrow Q$$

即 $P$ 成立足以保证 $Q$ 成立。这时，也称 $Q$ 是 $P$ 的必要条件，即 $P$ 成立必然要有 $Q$ 成立。若由 $P$ 成立能推出 $Q$ 成立，由 $Q$ 成立能推出 $P$ 成立，则称两者是等价的。这时，$P$(成立) 是 $Q$(成立) 的充分必要条件，$Q$(成立) 自然也是 $P$(成立) 的充分必要条件，或简称充要条件。

对给定的某一点 $x_0$，以 $x_0$ 为中心，长度为 $2\delta$ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，$\delta>0$ 为常数，即与 $x_0$ 的距离小于 $\delta$ 的点的集合称为 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$。利用绝对值的符号，$U(x_0,\delta)$ 可表示成


图 1.1.2

$$|x-x_0| < \delta$$

解开，则可写成

$$x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

两者是等价的。

**映射** $A$、$B$ 为两个集合。如果按照某个对应法则 $f$，对于 $A$ 中的任何一个元素，在 $B$ 中都有唯一的元素和它对应，则把这样的对应(包括集合 $A$、$B$ 及从 $A$ 到 $B$ 的对应法则 $f$)称为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射，记作

$$f: A \to B$$

与 $A$ 中元素 $a$ 对应的 $B$ 中的元素 $b$，称为 $a$ 的象，$a$ 称为 $b$ 的原象，记作

$$b=f(a)$$

**例 1.1.1** $A$ 表示某超级市场中的全部商品，每件商品都得标出价格，于是，商品定价工作就是建立从 $A$ 到 $(0,+\infty)$ 的一个映射。

**例 1.1.2** 若 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，则

$$f(a_1)=f(a_2)=b_1, \quad f(a_3)=f(a_4)=b_2$$

给出了从 $A$ 到 $B$ 的一个映射。对应法则 $f$ 也可用图形来直观地表示。

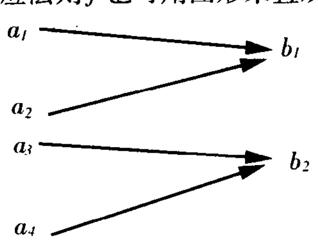



图 1.1.3

若 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的映射，如果对 $B$ 里的任一元素，有且只有一个 $A$ 里的元素 $a$ 与之对应，则称 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的一一映射。显然，例 1.1.2 的映射不是一一映射。例 1.1.1 的映射一般也不是一一映射。因为，不同的商品可能有相同价格，相同的商品也往往不止一件，价格当然就是相同的。所以商品定价不是一一映射。另一方面，数轴上的点与实数间的对应关系是一一映射。

## 练　习

1.1.1　设 $U=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,d\}$，$B=\{b,d\}$，求 $A\cup B$，$AB$，$\overline{A}$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\cup\overline{A}B$。

1.1.2　解下列不等式：

(1) $|-2x+1|\leqslant 5$　　(2) $|3-x|+|x-2|<1$

(3) $|x+2|<3$　　(4) $|ax+b|<c$, $a\neq 0$, $b$、$c>0$，为常数

1.1.3　试比较 $|x+2|$、$|x|+2$、$|x-1|-3$ 的大小。

1.1.4　试比较 $|a|-|b|$、$\big||a|-|b|\big|$、$|a|+|b|$、$|a-b|$ 的大小。

## 1.2　函数

**函数的概念**　在中学代数里已经学过函数的概念：如果在某变化过程中有两个变量 $x$、$y$，且对 $x$ 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则 $f$，$y$ 都有唯一确定的值和它对应，则称 $y$ 为 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$。$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量。$x$ 的取值范围称为函数的定义域，和 $x$ 的值对应的 $y$ 的值称为函数值。函数值的全体称为函数的值域。由此可见，所谓函数，就是由它的定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射。函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函数值，通常就记为 $f(a)$，有时也可写成 $f(x)\big|_{x=a}$ 或 $y\big|_{x=a}$。

建立函数关系时，它的定义域往往可根据问题的实际意义来确定，称为函数的**实际定义域**。例如，圆面积 $S$ 由半径 $r$ 确定，即 $S$ 是 $r$ 的函数：$S=f(r)=\pi r^2$。半径 $r$ 只能取非负的实数，则函数 $f(r)$ 的实际定义域就是非负实数的集合 $[0,+\infty)$，不难看出，这个函数的值域也是 $[0,+\infty)$。另一方面，如果不考虑函数的实际背景，而只是从形式上的表达式考虑，则把使函数 $f(x)$ 有意义的 $x$ 值全体，称为函数的**自然定义域**。例如，只从数式 $S=\pi r^2$ 考虑，$r$ 取任一实数，$\pi r^2$ 都有意义，则函数 $S=\pi r^2$ 的自然定义域为整个实数集。类似地，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的自然定义域就是所有的非零实数 $x\neq 0$。今后，除另加说明，我们约定所谓函数的定义域，指的就是自然定义域。

**例 1.2.1**　求函数 $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$ 的定义域。

**解**　要使 $\sqrt{\lg(x^2-3)}$ 有意义，必须

$$\lg(x^2-3)\geqslant 0$$
$$x^2-3\geqslant 1$$
$$x^2\geqslant 4$$
$$|x|\geqslant 2$$

所以函数 $y$ 的定义域是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

**例　1.2.2**　求函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

**解**　为使分子有意义，要求 $2-x>0$，即 $x<2$；为使分母有意义，要求 $x-1>0$，即

$x > 1$,所以函数 $y$ 的定义域为 $(1,2)$。

**函数关系的表示方法** 函数的概念由三个要素组成:对应法则、定义域与值域。其中,关键是对应法则。根据对应法则,可确定其自然定义域,值域也就随之确定。因此,函数关系的表示,归根结底是对应法则的确定。确定对应法则的方式并不唯一,而可根据需要适当选择。常用的有公式法,如圆面积 $S = \pi r^2$;图示法,即用图像来给出函数关系,如温度曲线;列表法,如数的平方表、三角函数表等。有时,也可采用文字描述的方法。例如,把 $x$ 的绝对值 $|x|$ 看成 $x$ 的函数,则 1.1 中关于绝对值的定义就确定了这一函数。在实际工作中,常常是多种方法结合起来使用。微积分学研究的函数,主要是能以公式法表示的函数,包括要用多个式子才能表示的函数。当自变量在不同范围内变化时,对应关系用两个或两个以上不同式子表示的函数,称为"分段函数"。要注意分段函数是几个公式结合起来表示一个函数,而不是表示几个函数。

**例 1.2.3** 把 $x$ 的绝对值 $|x|$ 看成 $x$ 的函数,它是一个分段函数

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

若用图形表示,则见图 1.2.1 所示。

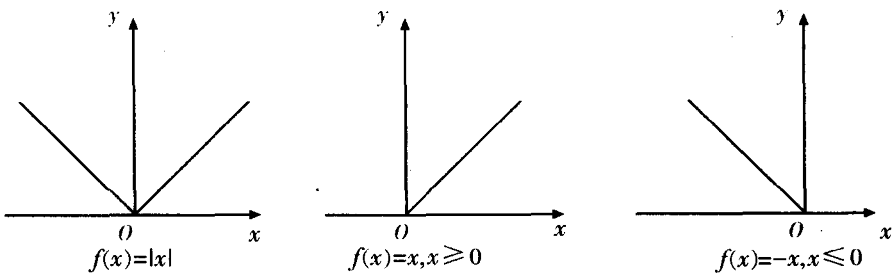



图 1.2.1

注意,不能把上述函数看成两个函数

$$f_1(x) = x, \quad x \geqslant 0; \qquad f_2(x) = -x, \quad x < 0$$

也不能把 $f(x)$ 看成 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和。因为这三个函数的定义域各不相同:$f(x)$ 的定义域是实数集,$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的定义域则分别是非负半轴和负半轴。

另一方面,若令

$$g_1(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$ 的定义域都是实数集,且有

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

**例 1.2.4** **符号函数** 实数的符号:正、负或零由实数唯一确定,也可看成它的函数。若以 1 表示"正",$-1$ 表示"负",0 表示"零",则可引入函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

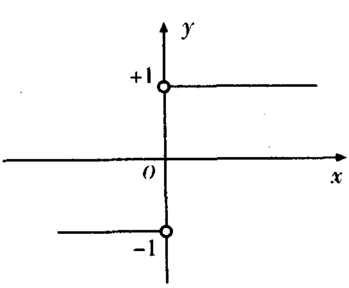



图 1.2.2

这是一个分段函数,称为符号函数,记作 $y = \operatorname{sgn}(x)$。它的图形由两条半直线和一个孤立点组成。图形上的"∘"是形象化的记号,表示 $\operatorname{sgn}(x)$ 当 $x = 0$ 时不等于1或 $-1$,而等于0。

**例1.2.5** 境内100克以内(含100克)信函每重20克(不足20克按20克计算)邮资80分,于是,邮资是信件重量的函数,可以表示为

$$y = f(x) = \begin{cases} 80, & 0 < x \leqslant 20; \\ 160, & 20 < x \leqslant 40; \\ 240, & 40 < x \leqslant 60; \\ 320, & 60 < x \leqslant 80; \\ 400, & 80 < x \leqslant 100。\end{cases}$$

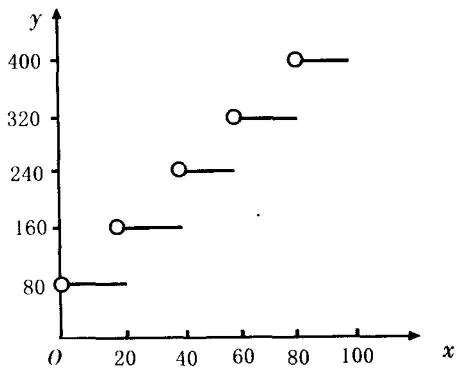


图1.2.3

**函数的几何特性** 从几何形状上看,函数的下列性质是基本的。

(1) 单调性 对函数 $y = f(x)$ 的定义域里某个区间中任意两点 $x_1 < x_2$,若总有 $f(x_1) < f(x_2)$ [或 $f(x_1) > f(x_2)$] 则称 $f(x)$ 在该区间是严格单调增加的(或严格单调减少的),简称递增(或递减)。递增以及递减函数统称为单调函数。

若把条件放宽,即要求对任意的 $x_1 < x_2$,总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ [或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$],则称 $f(x)$ 是广义单调增加(或广义单调减少),简称不减(或不增)。

例如,$y = x^2$ 在负半轴上是递减的,在正半轴上是递增的。例1.2.5的邮资函数在整个定义域上是广义增函数,即不减的。

(2) 有界性 若存在某个正常数 $L > 0$ 而使对函数 $y = f(x)$ 的定义域里某个区间中的任意点 $x$,总有 $|f(x)| \leqslant L$,则称 $f(x)$ 在该区间是有界的。

例如,$y = x^2$ 在任一有限区间都是有界的,但在整个数轴上不是有界的,或称是无界的。

(3) 奇偶性 对函数 $y = f(x)$ 的定义域里的某个区间 $(-a,a)$ 中的任意点 $x$,若总有 $f(x) = f(-x)$ [或 $f(x) = -f(-x)$],则称 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 是偶函数(或奇函数)。

例如,$y = x^2$ 在整个定义域上是偶函数,而 $y = x^3$ 为奇函数。一般地说,若 $n$ 为正偶数,$y = x^n$ 为偶函数;若 $n$ 为正奇数,$y = x^n$ 为奇函数,函数的奇偶性也因此得名。显然,函数的奇偶性不仅对形如 $(-a,a)$ 的区间,包括数轴 $(-\infty, +\infty)$ 是有意义的,也可更一般地对关于原点为对称区间的并集进行讨论。例如,$y = x^{-1}$ 在 $(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$ 仍可看成奇函数。

(4) 周期性 若存在一个正常数 $T > 0$,而对函数 $y = f(x)$ 定义域里任意点 $x$ 总有 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期是 $T$ 的周期函数。显然,若 $T$ 为 $f(x)$ 的周期,则对所有正整数 $n$、$nT$ 都是 $f(x)$ 的周期。一般所说周期函数的周期,指的是最小正周期。

最常见的周期函数是三角函数。

函数的上述几何特性,可以通过它们的图像来说明,见图1.2.4。

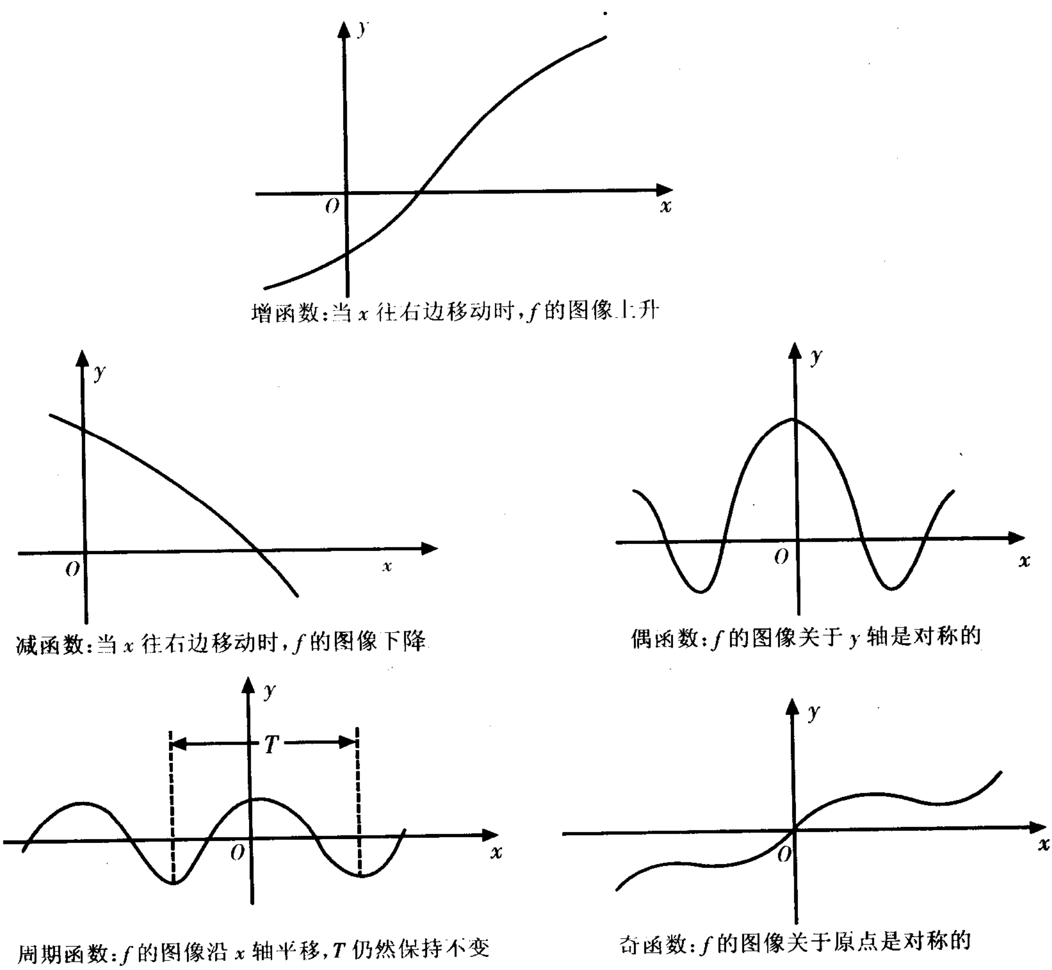
由于图像表示可充分利用人的视觉,只要看一下函数的图像,就能很容易判断出这函数是否是递增的、递减的或者两者都不是,以及这函数是否关于 $y$ 轴对称或关于原点对称,或者都不是。因此,函数的图像表示确有其方便之处。但是,如果进行理论上的研究,图像表

示就不如解析法。在微积分学讨论的函数，主要是用解析法，即用公式表示的函数。

**复合函数** 两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 可以通过中间变量 $u$ 构造出一个新的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称它为 $y$ 通过中间变量 $u$ 复合成的复合函数。这种复合是有条件的，即要求 $f(u)$ 的定义域包含 $\varphi(x)$ 的值域。这样才能使对 $x$ 值所对应的 $u$ 值，函数 $y=f(u)$ 有意义。如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 两个函数复合而成。然而，只有当 $1-x^2\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant 1$ 时才满足复合的条件。

复合的概念可以推广到三个或多个函数的情况，即若 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则 $y=f(u)=f[\varphi(v)]=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 是通过两个中间变量 $u$、$v$ 复合成的复合函数。

复合函数的重要性在于，利用它往往可将一个较复杂的函数看成由若干个相对来说比较简单的函数复合而成，即化繁为简以便研究。这种技巧对以后的讨论是很有用的。例如，函数 $\sin 3x$ 是由 $y=\sin u$，$u=3x$ 复合而成的复合函数。类似地，$y=\sin^3 x$ 可看成由 $y=u^3$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数；$y=\ln(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=1+x^2$ 复合成的复合函数，等等。



增函数：当 $x$ 往右边移动时，$f$ 的图像上升

减函数：当 $x$ 往右边移动时，$f$ 的图像下降

偶函数：$f$ 的图像关于 $y$ 轴是对称的

周期函数：$f$ 的图像沿 $x$ 轴平移，$T$ 仍然保持不变

奇函数：$f$ 的图像关于原点是对称的

**图 1.2.4 函数几何特性的图像描述**

**反函数**　已知函数$y=f(x)$，若对值域中的每一元素$y$，都有定义域中唯一的$x$使$y=f(x)$，即所给出的映射是一一映射，则称它的逆映射$f^{-1}$为函数$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$。习惯上，把自变量写成$x$，因变量写成$y$，因此，一般把$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$。根据定义，对函数$f(x)$定义域里的任一$x$，总有$f^{-1}[f(x)]=x$。显然，严格单调（增加或减少）函数的反函数一定存在。

如果函数关系是用解析式给出，则为求出它的反函数，只需把函数式$y=f(x)$看成以$x$为未知数的方程，从中解出$x=f^{-1}(y)$，再把符号$x$、$y$互换即可。

**例**　1.2.6　求$y=3x-6$的反函数。

**解**　由$y=3x-6$，有

$$x=\frac{1}{3}y+2$$

则函数$y=3x-6$的反函数为$y=\frac{1}{3}x+2$。

由图可见，函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图像在同一坐标系中关于直线$y=x$是对称的。

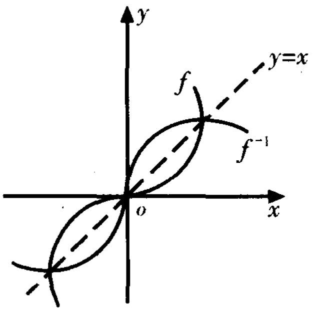



**图 1.2.5　函数$f$及其反函数$f^{-1}$的图像**

**初等函数**　在中学代数里讨论了所谓的基本初等函数，它们是：

(1)　常数函数　$y=c$，$c$为任一常数，如$y=0$，$y=\sqrt{2}$，$y=\frac{\pi}{2}$等。

(2)　幂函数　$y=x^a$，$a$为任意实数，如$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{4}}$等。

(3)　指数函数　$y=a^x$，$a>0$，$a\neq1$为固定的任一常数。如$y=2^x$，$y=0.1^x$，$y=e^x$，e表示自然对数底，$e\approx2.718\ 28$。数e在经济分析中非常重要，在下一节要对它作仔细的讨论。

(4)　对数函数　$y=\log_a x$，$a>0$，$a\neq1$为固定的任一常数。如$\log_{10}x=\lg x$称为常用对数，$\log_e x=\ln x$称为自然对数。在高等数学中应用的主要是后者。

(5)　三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，常用的是前四个。

(6)　反三角函数　所有的三角函数确定的映射不是定义域到值域上的一一映射，因此，一般地说，三角函数的反函数不存在。但是，若只限于考虑它的某个单调区间，如正弦函数$y=\sin x$在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$是严格单调增加的，则反函数存在，把它称为反正弦函数的主值，以$\arcsin x$表示，它的定义域是$[-1,1]$，值域是$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。今后，当讨论到反三角函数时，指的都是它们的主值。因此，$y=\arccos x$的定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$；$y=\arctan x$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；$y=\operatorname{arccot}x$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$。

现将基本初等函数列表说明，如图1.2.6所示。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所得出的并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数。在所有初等函数中，除基本初等函数外，最常用的还有多项式函数，特别

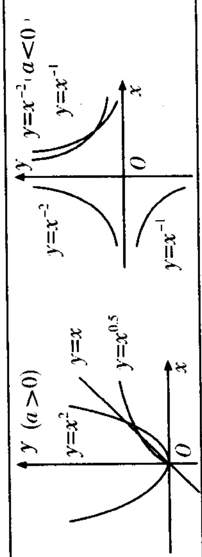
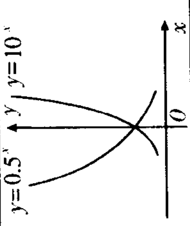
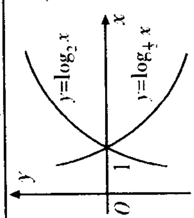
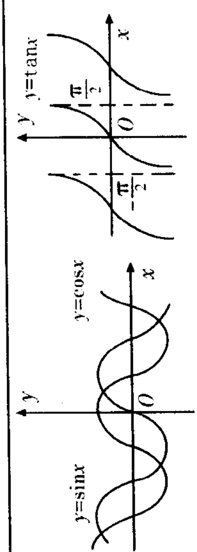
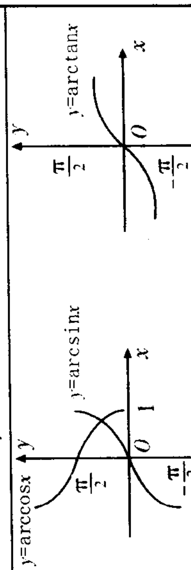
| 名称 | 表达式 | 定义域 | 图像 |
| --- | --- | --- | --- |
| 幂函数 | $y=x^a, a\in\mathbf{R}$ | 定义域随 $a$ 而异 |  |
| 指数函数 | $y=a^x, a>0, a\neq 1$ | $\mathbf{R}$ |  |
| 对数函数 | $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$ | $(0,+\infty)$ |  |
| 三角函数 | $y=\sin x$<br>$y=\cos x$<br>$y=\tan x$<br>$y=\cot x$ | $\mathbf{R}$<br>$\mathbf{R}$<br>$x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$<br>$x\neq n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ |  |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$<br>$y=\arccos x$<br>$y=\arctan x$<br>$y=\mathrm{arccot}\, x$ | $[-1,1]$<br>$[-1,1]$<br>$\mathbf{R}$<br>$\mathbf{R}$ |  |

图 1.2.6