数学

高中毕业生总复习纲要

ENGLISH

1982

福建教育出版社

一九八二年高中毕业生

数学总复习纲要

上　册

福建教育学院编

福建教育出版社

一九八二年高中毕业生
数学总复习纲要
（上 册）
福 建 教 育 学 院 编
*
出 版：福建教育出版社
发 行：福建省新华书店
印 刷：福建新华印刷厂
开本：787×1092毫米 1/32 印张:8 字数:179千字
1982年1月第一版 1982年1月第一次印刷
印数：1—156,600
书号：7159·684 定价：0.59元

编 者 的 话

本《纲要》是根据《全日制十年制学校中学数学教学大纲》的要求编写的，供1982年高中毕业生系统地复习中学阶段所学的基础知识和担任总复习课的教师教学参考用。

本《纲要》分上、下两册，包括代数、三角；几何、平面解析几何与导数和微分等五部分。各部分都首先把中学数学教材中的基础知识进行综合、概括，使学生通过复习获得比较系统和扎实的基础知识；然后围绕教材的重点和关键；选择较有启发性的范例和练习题，帮助学生更好地掌握数学的基本概念、定理、公式和法则，准确、灵活地应用这些知识进行解题，以提高学生的运算能力、逻辑推理和逻辑表达能力以及分析问题解决问题的能力。

《纲要》中对某些基础知识只提出纲目或概括成图表，如果学生对这些知识有所遗忘或缺漏，必须根据全国统编的全日制十年制数学课本进行复习。为了突出说明某些数学知识的应用，有的范例所采用的解题或证题的方法并不是最简捷的，有的也不完整。《纲要》中的基本练习题应根据不同班级的实际需要适当增补，复习题中有一部分难度比较大的题目，仅供解题能力比较强的学生选做。

在编写过程中，许多老师给我们提供了不少宝贵的意见和修改建议，特此表示感谢！但限于我们的水平，《纲要》中必定还存在缺点，需要通过教学实践进一步修正、充实和提高。我们殷切地期望老师和同学们随时提出批评、指正。

福建教育学院数学教研室

一九八一年十月

目　　录

代　数

三　角

代　　数

一、集　　合

具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。

1.常用的集合表示方法

（1）列举法　把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合。

（2）描述法　把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合。

在研究集合时，为了方便起见，常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素。

如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，表示为$a\in A$；

如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，表示为$a\overline{\in} A$。

常用N表示自然数的集合，J表示整数的集合，Q表示有理数的集合，R表示实数的集合，C表示复数的集合。

2.集合的一般概念

（1）子集　对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么，集合A就叫做集合B的子集，表示为

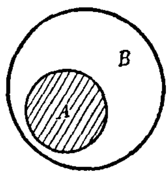


图　1·1

$$A\subseteq B\text{或}B\supseteq A,$$

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A就叫做集合B的真子集，表示为

$$A \subset B \text{或} B \supset A \text{ (图1·1)}.$$

（2）相等　对于两个集合A、B，如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，那么，集合A和集合B就叫做相等，表示为

$$A = B.$$

（3）空集　不含任何元素的集合叫做空集，用符号ϕ表示。

（4）交集　由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集，表示为$A \cap B$。

图1·2中的阴影部分，表示集合A与B的交集$A \cap B$。

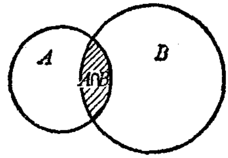
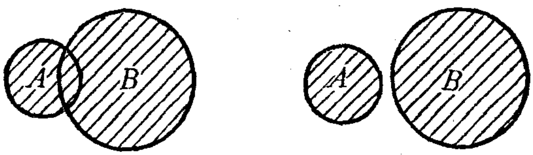


图　1·2

（5）并集　由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，表示为

$$A \cup B.$$

图1·3甲、乙中的阴影部分，表示集合A与B的并集$A \cup B$。



甲　　　　乙

图　1·3

（6）全集　在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符号I表示。也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。

（7）补集　已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集，表示为$\overline{A}$。

图1·4中的长方形表示全集I，圆表示集合A，阴影部分表示集合A的补集$\overline{A}$。

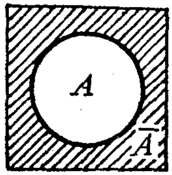


图 1·4

例 1　大于3小于11的偶数集用描述法与列举法表示出来。

解：(1) 描述法　$\{x : x=2n,\ 3<x<11,\ n\in J\}$；

(2) 列举法　$\{4,6,8,10\}$。

例 2　设　$A=\{x : x\leqslant 8,\ x\in N\}$，

$B=\{y : y^2-7y-8=0,\ y\in N\}$，

$C=\{x : x\neq x,\ x\in N\}$，

求　$A\cup B$；$A\cap B$；$A\cap\overline{B}$；$A\cup C$；$A\cap\overline{C}$。

解：$\because$　$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

$B=\{8\}$，$C=\phi$。

$\overline{B}=\{y : y\neq 8,\ y\in N\}$，$\overline{C}=N$。

$\therefore$　$A\cup B=A$；　$A\cap B=B$；

$A\cap\overline{B}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$；

$A\cup C=A\cup\phi=A$；

$A\cap\overline{C}=A\cap N=A\cap I=A$。

例 3　如果　$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，则　$A\cup B\subseteq C$。

证明：若　$A\cup B=\phi$，显然$A\cup B\subseteq C$；

若　$A\cup B\neq\phi$，　则在$A\cup B$中任意取一元素x，

则　$x\in A$或$x\in B$，又$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，

因而　$x\in C$。

即　$A\cup B$中的元素，都是C的元素。

练 习 1·1

1. 将下列集合用描述法表示出来：

$A=\{1,3\}$； $B=\left\{\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right\}$；

$C=\{\cdots\cdots,\ -4,-2,0,2,4,\cdots\cdots\}$；

$D=\{1,4,9,16,\cdots\cdots\}$。

2. 将下面集合用列举法表示出来：

$A=\{x: x\in N,\ 5<x<8\}$；

$B=\{w: w\in J,\ |w|<5\}$；

$C=\{y: y\in R,\ y^2-5y+2=0\}$；

$D=\{z: z\in C,\ z^3=1\}$。

3. 求适合条件的集合：

(1) $\{x: x=x+1\}$；

(2) $F=\{x: x\in J, 0<x<5\}$，$G=\{y: y\in J,\ 4\leqslant y<7\}$，求 $F\cap G$; $F\cup G$; $F\cap\overline{G}$;

(3) $I=\{x: |x-1|<1,\ x\in R\}$，$A=\{x: 0<x<1\}$，求$\overline{A}$。

4. 已知 $E=\{x: x=2n, n\in J\}$，$D=\{y: y=2n+1, n\in J\}$，$P=\{w: 0<w<25,\ w\in J\}$，$T=\{z: z=3n, n\in J\}$，

求 (1) $E\cup D$; (2) $E\cap D$; (3) $N\cap P$; (4) $J\cap\overline{E}$;

(5) $P\cap D$; (6) $(N\cap E)\cap T$; (7) $(E\cap T)\cap P$。

5. 证明 如果$A\subseteq B$，任意集合C，则 $A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

6. 已知 $A\subseteq\phi$， 证明 $A=\phi$。

7. 已知 $A=B$，$A=\{c,\ a,\ b\}$，$B=\{a,\ x,\ b\}$，求 x。

8. 若 $A\cup B=\phi$，$C=\{1,\ 2,\ 3\}$，问$A\cap C=$? $A\cup C=$?

9. 若 $A\cap B=I$，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，求I; B。

10. 若 $A\cap B=\phi$，能否推得$A=\phi$或$B=\phi$? 为什么?

11.若　$A\cap B=A\cap C$，能否推得$B=C$？为什么？

12.若　$A\cup B=A\cup C$，能否推得$B=C$？为什么？

13.若　$A=\{1,3,5\}$，$\overline{A}=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2\}$。

求　$\overline{B}$；$\overline{A\cup B}$；$\overline{A}\cap\overline{B}$.

二、数与代数式

（一）数

1.数的系统表

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(a+0i=a)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
        - ——可化为
          - 有限小数
          - 无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - ——无限不循环小数
  - 虚数 $(a+bi$　$b\neq0)$
    - 纯虚数（$0+bi=bi$，$b\neq0$）
    - 非纯虚数（$a+bi, a\neq0, b\neq0$）

2.实数

（1）性质

①在实数集内无最小的数，亦无最大的数。

②在实数集内的数与数轴（规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴）上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

③在实数集内任意两个数可以比较它们的大小。

实数大小的比较，可以按实数在数轴上所对应的点的排

列顺序来比较，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

④在实数集内的数施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算结果仍是实数集内的数。

(2) 实数的绝对值　若a是实数，$|a|$叫做a的绝对值。

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a\geqslant 0\text{时})； \\ -a & (\text{当}a<0\text{时})。\end{cases}$$

$|a|$在数轴上是表示实数a的点至原点的距离。

(3) 实数的运算定律

①交换律　$a+b=b+a$；$a\cdot b=b\cdot a$；

②结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

③分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。

例1　计算：

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^2-(-6.5)\times\frac{12}{13}+(-2)^4\div[(-2)^3+2]。$$

解： 原式$=\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{2^2\times 3}{13}+16\div(-8+2)$

$$=\frac{100}{9}+6-\frac{8}{3}=\frac{100+54-24}{9}=14\frac{4}{9}。$$

注意： 化带分数为假分数，化小数为分数，化某合数为质因数。

例2　把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来：

$$|-5|，\ -3，\ \left|\frac{2}{3}\right|，\ 0，\ \sqrt{5}，\ -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|。$$

解： $\because$　$|-5|=5$，$\left|\frac{2}{3}\right|\approx 0.67$，$\sqrt{5}\approx 2.24$，

$$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx-0.71,$$

$$\therefore\quad -3<-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<0<\left|\frac{2}{3}\right|<\sqrt{5}<|-5|.$$

例 3　设a是任意实数，化简$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$。

解：$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$

$$=|a|+|1-a|=\begin{cases}2a-1（当a\geqslant1时）;\\1\quad（当0\leqslant a<1时）;\\1-2a（当a<0时）.\end{cases}$$

例 4　证明$\sqrt{2}$是无理数。

证明：用反证法

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可表示成分数，即$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中m，n是自然数，且m，n互质），

$\therefore\quad 2=\left(\frac{n}{m}\right)^2$，$n^2=2m^2$，$\because\quad n^2$是偶数，$n$也是偶数，设$n=2p$，那么$m^2=2p^2$，$\therefore\quad m$也是偶数。

这样，m，n都是偶数，与m，n互质的假设相矛盾，因此$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数。

3. 复数

(1) 虚数单位i

规定：①$i^2=-1$；

②i可以与实数在一起按照同样的运算律进行四则运算。

性质$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$。$(n\in J)$

(2) 复数的有关概念

①复数概念　复数$a+bi$（a，b都是实数。以后说复数$a+bi$时，a，b都是实数），当$b=0$的时候，就是实数；当$b\neq0$的时候，叫做虚数，当$a=0$，$b\neq0$的时候，叫做纯虚数；a与b

分别叫做复数$a+bi$的实部与虚部。

②复数相等　两个复数相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等。

$$a、b、c、d\in R.$$

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$$

特别　$$a+bi=0\Longleftrightarrow\begin{cases}a=0,\\b=0.\end{cases}$$

两个复数，如果都是实数，可以比较它们的大小；如果不全是实数，就不能比较它们的大小。

③复平面

用坐标平面内的点Z来表示复数$z=a+bi$，这个点的横坐标是a，纵坐标是b（图1·5）。这个坐标平面叫做复平面。x轴叫做实轴，y轴叫做虚轴（复平面的虚轴不包括原点；原点在实轴上，表示实数0）。表示实数的点都在x轴上，表示纯虚数的点都在y轴上。

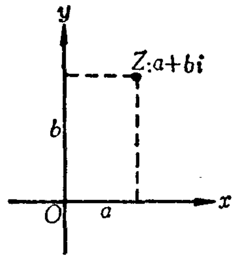


图　1·5

④共轭复数　当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数（当虚部不等于0时也叫做共轭虚数）。复数$z=a+bi$的共轭复数是$\bar{z}=a-bi$.

性质：$z+\bar{z}=2a$；

$z-\bar{z}=2bi$；

$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$。

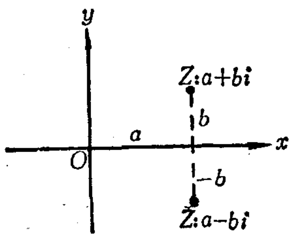


图　1·6

几何意义：共轭复数关于实轴对称（图1·6）。

(3) 复数的向量表示

①向量　既有大小又有方向的量叫做向量.

几何表示：向量可以用有向线段来表示，线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向.

规定：i. 长度相等方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量.

即向量可以根据需要进行平移.

ii. 长度为零的向量（它的方向不确定）叫做零向量，所有的零向量相等.

②复数的向量表示　设Z点表示复数$a+bi$，连结OZ，如果我们把OZ看成向量（方向是从O点指向Z点），就记作$\overrightarrow{OZ}$或$\vec{Z}$.

规定：相等的向量表示同一个复数.

复数集C与复平面内所有的点所成的集合之间是一一对应的，也与复平面内所有从原点出发的向量所成的集合之间是一一对应的（图1·7）.

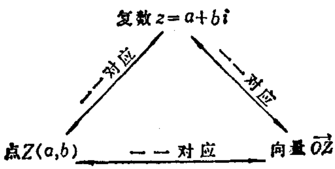


图 1·7

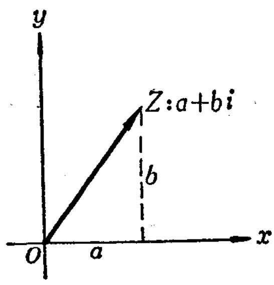


图 1·8

向量$\overrightarrow{OZ}$的长度r叫做复数$a+bi$的模（或绝对值），记作$|a+bi|$（图1·8）.

$$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如果$b=0$，那么$a+bi$是一个实数a，它的模就等于$|a|$（即a的绝对值）。

复数的模是实数，可以比较大小。

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

$$(z_1\in C,\ z_2\in C.)$$

（4）复数代数形式运算

①加法与减法　把复数的实部与实部、虚部与虚部分别相加（减），即

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

几何意义：求两个复数的和，可以先作出与这两个复数对应的向量$\overrightarrow{OZ}_1$，$\overrightarrow{OZ}_2$，然后以这两个向量为两条邻边作平行四边形，则与这个平行四边形的对角线OZ所表示的向量相对应的复数就是所求两个复数的和(图1·9)。

两个复数的差z_2-z_1(即$\overrightarrow{OZ}_2-\overrightarrow{OZ}_1$)对应于连结两个向量终点并指向被减数的向量(图1·10)。

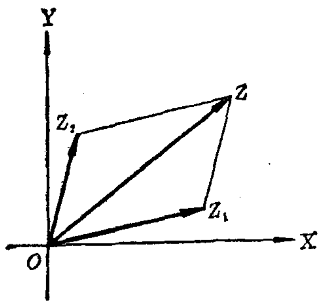


图　1·9

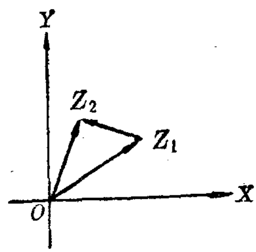


图　1·10

②复数的乘法　按多项式乘法法则进行，在所得的结果中把i^2换成-1，并且把实部与虚部分别合并，即